

Olivier Thual

Mécanique des milieux continus

| Avec le corrigé des exercices



Toulouse INP - ENSEEIHT

Département “Mécanique des Fluides, Énergétique et Environnement”

Année 2020-2021, version du 14 juin 2020

Avant-propos

Ce polycopié est l'une des composantes de la Ressource Pédagogique Numérique (RPN) suivante :

O. Thual, Mécanique
des Milieux Continus,
Éd. Ress. Pédago. Ouv.
INPT 1018 (2012) 48h

disponible à l'adresse :



<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018>

Des approfondissements partageant les mêmes notations sont contenus dans l'ouvrage suivant :

O. THUAL, Introduction à la
Mécanique des milieux continus
déformables, Cépaduès Éditions, 1997.

<http://www.cepadues.com>



Enfin, des informations complémentaires sont aussi disponibles à l'adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr>

Table des matières

Introduction	5
1 Algèbre linéaire et tenseurs	7
1 Algèbre linéaire	8
2 Champs de tenseurs	11
3 Coordonnées curvilignes	15
2 Hypothèse du continu	23
1 Vecteur flux	24
2 Diffusion d'un champ scalaire	27
3 Équation de la chaleur	29
3 Petites déformations	35
1 Déformations quelconques	36
2 Longueurs, angles et volumes	38
3 Hypothèse des petites perturbations	40
4 Tenseur des contraintes	47
1 Loi de conservation de la masse	48
2 Modélisation des efforts	51
3 Principe fondamental de la dynamique	53
5 Équations de Lamé	63
1 Loi de Hooke	64
2 Module de Young et coefficient de Poisson	67
3 Ondes élastiques	70
6 Cinématique du continu	79

1	Description eulérienne du mouvement	80
2	Transport par les trajectoires	83
3	Tenseur des taux de déformations	85
7	Équations de bilan	93
1	Théorèmes de transport	94
2	Formulation des équations de bilan	97
3	Principe fondamental de la dynamique	100
8	Équations de Navier-Stokes	109
1	Fluides newtoniens	110
2	Équations de Navier-Stokes compressibles	114
3	Du compressible à l'incompressible	118
9	Problèmes corrigés	127
	Bibliographie	139

Introduction

Contrairement à la physique, qui s'intéresse à la structure microscopique de la matière, la mécanique et, plus particulièrement, la mécanique des milieux continus s'intéressent au comportement macroscopique des solides, des fluides ou de milieux plus complexes.

Cette modélisation de milieu continu nécessite de maîtriser un certain nombre de notions algébriques sur la manipulation des champs scalaires, des champs de vecteurs ou encore des champs de tenseurs d'ordre deux qui seront identifiés ici à des matrices par le choix d'un repère orthonormé. Les notions d'algèbre tensorielle essentielles pour le présent cours de mécanique des milieux continus sont regroupées dans le chapitre 1.

La justification de la modélisation des milieux par des champs continus et dérivables est effectuée au chapitre 2 où l'on introduit la notion de loi de conservation d'une grandeur physique sur l'exemple de l'énergie interne. On montre que l'existence de telles lois implique l'existence d'un vecteur flux pour modéliser les phénomènes de courte portée agissant sur des distances microscopiques plus courtes que les échelles considérées comme infinitésimales par la modélisation continue.

Pour pouvoir relier les efforts aux variations locales de longueurs, d'angles ou de volumes, on modélise les déformations des milieux par des applications de l'espace au chapitre 3. La différentielle d'une telle application permet de décrire la transformation des longueurs, des angles ou des volumes. L'accent est mis sur les petites déformations dans la mesure où l'on n'aborde pas, dans ce cours, la rhéologie des grandes déformations.

Le chapitre 4 énonce la loi de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique dans le cadre des petites perturbations. Les efforts sont ici modélisés par leur résultante et leur moment sur tous les sous-domaines du milieu. La loi de conservation de la quantité de mouvement permet de démontrer l'existence d'un tenseur flux de quantité de mouvement nommé tenseur des contraintes. La loi de conservation du moment cinétique permet de démontrer que ce tenseur est symétrique.

Une première application du principe fondamental est exposée au chapitre 5 pour la loi de comportement des solides élastiques homogènes et isotropes en petites perturbations appelée loi de Hooke. Les petites oscillations de tels solides sont régies par les équations de Lamé dont les solutions sont la superposition d'ondes élastiques longitudinales ou transversales. On calcule les vitesses de propagation de ces ondes.

Le chapitre 6 aborde l'étude du mouvement à l'aide d'une description eulérienne plus appropriée pour la modélisation des écoulements fluides. Les notations de dérivée particulaire, de transport de petits vecteurs ou encore de tenseur des taux de rotations et de déformations sont explicitées. On s'intéresse ici aux taux de variations des longueurs, des angles ou des volumes.

Le chapitre 7 complète les outils mathématiques en dérivant par rapport au temps des intégrales triples dont le domaine d'intégration est transporté par le mouvement. Ces outils permettent de formuler les équations de bilan qui constituent les axiomes de la mécanique des milieux continus. C'est le cas du principe fondamental de la dynamique généralisé ici au cas des mouvements de déformations quelconques.

Le chapitre 8 ouvre le champ de la mécanique des fluides en formulant la rhéologie des fluides newtoniens. Dans le cas compressible, la dynamique est alors couplée à la thermodynamique à travers le champ de pression. Il convient alors de postuler le "théorème" de l'énergie cinétique pour obtenir l'expression de la puissance des efforts intérieurs, puis d'énoncer le premier principe de la thermodynamique sous forme d'une équation de bilan pour l'énergie interne. On regroupe alors les lois de conservation et équations de bilan essentielles dans le système des équations de Navier-Stokes en détaillant les types de conditions aux limites nécessaires pour les résoudre. L'étude des ondes sonores permet d'appréhender l'approximation de fluide incompressible comme étant la limite des très petits nombres de Mach.

L'objectif de ce cours est donc de maîtriser les étapes qui relient les axiomes de base de la mécanique, les lois de comportement et les équations d'états aux deux équations d'évolution que sont :

- les équations de Lamé pour les solides élastiques,
- les équations de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens.

Ce cours ouvre vers des études plus approfondies de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides.

Chapitre 1

Algèbre linéaire et tenseurs

Sommaire

1	Algèbre linéaire	8
1.1	Identification entre tenseurs et matrices	8
1.2	Convention d'Einstein	9
1.3	Décompositions de tenseurs	11
2	Champs de tenseurs	11
2.1	Opérateurs de dérivation	11
2.2	Différentielle d'un champ de vecteurs	13
2.3	Théorème de dérivation	14
3	Coordonnées curvilignes	15
3.1	Coordonnées cartésiennes	15
3.2	Coordonnées cylindriques	16
3.3	Coordonnées sphériques	18

Introduction

On introduit les outils mathématiques minimaux nécessaires pour une première approche de la mécanique des milieux continus. Des notions de base d'algèbre linéaire sont présentées en identifiant les vecteurs avec les matrices de leurs composantes à l'aide d'un repère orthonormé. Il en va de même pour les applications linéaires ou les formes quadratiques, appelées “tenseurs d'ordre deux”, que l'on identifie aux matrices carrées de leurs composantes. Comme la base canonique est orthonormée, les règles de changement de base sont identiques pour tous ces tenseurs. On introduit alors la notion de champs de vecteurs ou de champs de tenseurs en fonction d'une variable d'espace et on passe en revue les opérateurs de dérivations de base. On exprime alors ces opérateurs et coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

1 Algèbre linéaire

On introduit ici les notations décrivant les produits scalaire, matriciel ou tensoriel en identifiant vecteurs ou tenseurs d'ordre deux avec les matrices de leurs composantes dans une base orthonormée. La convention d'Einstein permet d'exprimer ces produits à l'aide d'une notation très compacte.

1.1 Identification entre tenseurs et matrices

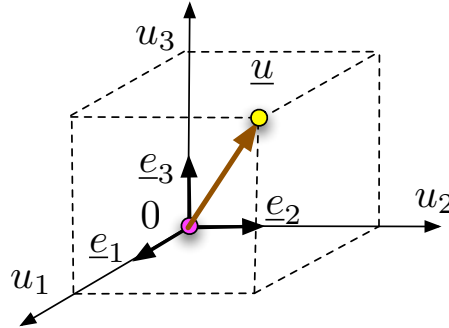


FIGURE 1.1 – Composantes du vecteur $\underline{u}$ dans le repère orthonormé.

On considère un espace vectoriel E euclidien de dimension trois muni d'une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On identifie alors les vecteurs $\underline{u}$ de cet espace aux matrices colonne 3×1 en écrivant

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = {}^t(u_1, u_2, u_3). \quad (1.1)$$

On peut ainsi considérer que le produit scalaire de deux vecteurs est le produit de deux matrices en écrivant

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = {}^t \underline{u} \underline{v} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1.2)$$

On identifie ensuite une application linéaire de E dans E avec la matrice 3×3 de ses composantes en notant $\underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{u}$ le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 \\ A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3 \\ A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

De même, on identifie une forme bilinéaire $\mathcal{C}(\underline{u}, \underline{v})$ sur E à la matrice 3×3 de ses composantes en écrivant

$$\mathcal{C}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{C} \cdot \underline{v} = {}^t \underline{u} \underline{C} \underline{v} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

On a utilisé le produit “à gauche” $\underline{u} \cdot \underline{C} = {}^t \underline{u} \underline{C}$, une matrice ligne, que l’on ne doit pas confondre avec le produit “à droite” $\underline{C} \cdot \underline{v} = \underline{C} \underline{v}$, une matrice colonne.

Étant donnée une matrice 3×3 , on peut la considérer indifféremment comme étant identifiée à une application linéaire ou à une forme bilinéaire. En effet, un changement de base $\underline{v} = \underline{P} \underline{v}'$ et $\underline{u} = \underline{P} \underline{u}'$ conduit au changement de matrice $\underline{A}' = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}$ pour une application linéaire et au changement de matrice $\underline{A}' = {}^t \underline{P} \underline{C} \underline{P}$ pour une forme bilinéaire. En se restreignant aux changements de base orthonormés, la relation $\underline{P}^{-1} = {}^t \underline{P}$ entraîne que les composantes des deux types de matrices changent de la même manière.

On dira donc qu’une application linéaire ou une forme bilinéaire sont des “tenseurs d’ordre deux” sur l’espace E que l’on identifiera à une matrice 3×3 dans le cadre de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Avec les mêmes arguments de changement de base, on peut définir le produit tensoriel de deux vecteurs par la relation

$$\underline{\underline{B}} = \underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{u} \cdot {}^t \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) \quad \Longleftrightarrow \quad B_{ij} = u_i v_j. \quad (1.5)$$

Un vecteur peut être vu comme un “tenseur d’ordre 1”. De même que les composantes d’un tenseur d’ordre 1 comportent un seul indice et celles d’un tenseur d’ordre deux en comportent deux, on peut définir des tenseurs d’ordre quelconque en considérant que leurs composantes comportent un nombre d’indice plus élevé.

1.2 Convention d’Einstein

La convention d’Einstein consiste à omettre le signe somme $\sum_{j=1}^3$ lorsque l’indice j est répété dans une expression comme par exemple

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_j v_j, \quad \underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{u} \Leftrightarrow v_i = A_{ij} u_j, \quad \underline{u} \cdot \underline{C} \cdot \underline{v} = u_i C_{ij} v_j. \quad (1.6)$$

Ces sommations traduisent les produits entre tenseurs d’ordres quelconques que l’on nomme, de manière générique, “produit contracté” comme par exemple $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{A} \cdot \underline{u}$, $\underline{v} \cdot \underline{A}$ et $\underline{u} \cdot \underline{C} \cdot \underline{v}$ de composantes d’expressions respectives $u_j v_j$, $A_{ij} u_j$, $v_j A_{ji}$ et $u_i C_{ij} v_j$. De même, le produit contracté de deux

tenseurs d'ordre deux est le produit $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ de composantes $C_{ij} = A_{il} B_{lj}$ vérifiant donc

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

On pourra aussi considérer le produit “doublement contracté” entre deux tenseurs d'ordre deux défini par la relation

$$\underline{A} : \underline{B} = A_{ij} B_{ji} = \text{tr} (\underline{A} \cdot \underline{B}) . \quad (1.8)$$

Si $\underline{D}$ est symétrique (${}^t \underline{D} = \underline{D} \Leftrightarrow D_{ij} = D_{ji}$) et $\underline{\Omega}$ est antisymétrique (${}^t \underline{\Omega} = -\underline{\Omega} \Leftrightarrow \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$), on vérifie facilement que

$$\underline{D} : \underline{\Omega} = D_{ij} \Omega_{ji} = -D_{ji} \Omega_{ij} = -\underline{D} : \underline{\Omega} = 0 . \quad (1.9)$$

Le symbole de Kroenecker δ_{ij} constitue les composantes du tenseur identité $\underline{I}$. On peut par exemple écrire

$$\underline{I} : \underline{A} = \delta_{ij} A_{ji} = A_{ii} = \text{tr} (\underline{A}) . \quad (1.10)$$

On pourra également utiliser la convention de sommation d'Einstein pour exprimer les vecteurs ou les tenseurs en fonction des vecteurs de base en écrivant

$$\underline{u} = u_j \underline{e}_j , \quad \underline{A} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j . \quad (1.11)$$

En remarquant que $(\underline{v} \otimes \underline{w}) \cdot \underline{u} = (\underline{w} \cdot \underline{u}) \underline{v}$ et $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$, on peut écrire

$$\underline{A} \cdot \underline{u} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot u_k \underline{e}_k = A_{ij} \underline{e}_i \delta_{jk} u_k = A_{ij} u_j \underline{e}_i . \quad (1.12)$$

Le pseudo-tenseur fondamental alterné ϵ_{ijk} défini par les relations $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ et $\epsilon_{ijk} = 0$ si au moins deux indices sont égaux. Ces composantes ne définissent qu'un “pseudo-tenseur” plutôt qu'un tenseur d'ordre 3 dans la mesure où cette définition n'est pas invariante par changement de l'orientation de la base orthonormée. Le pseudo-tenseur fondamental alterné permet d'écrire le produit vectoriel de deux vecteurs avec la convention d'Einstein à l'aide de la relation

$$\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v} \quad \Longleftrightarrow \quad w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k . \quad (1.13)$$

Si $\underline{\Omega}$ est une matrice antisymétrique (${}^t \underline{\Omega} = -\underline{\Omega}$), on montre qu'il existe un unique vecteur $\underline{\omega}$ tel que pour tout vecteur $\underline{u}$ on puisse écrire

$$\underline{\Omega} \cdot \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_{ij} u_j = \epsilon_{ijk} \omega_k = \epsilon_{ilj} \omega_l u_j . \quad (1.14)$$

On en déduit que $\Omega_{ij} = \epsilon_{ilj} \omega_l$ et donc que $\omega_i + \Omega_{jk} = \Omega_{ij} + \omega_k = 0$ si $\epsilon_{ijk} = 1$.

Le produit mixte de trois vecteurs est défini par les relations équivalentes

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k . \quad (1.15)$$

Comme $\underline{u} \wedge \underline{v} = S \underline{n}$ où S est l'aire du parallélogramme engendré par le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ et $\underline{n}$ un vecteur unitaire normal à leur plan, on voit que $|(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})| = A h$ où $h = |\underline{n} \cdot \underline{w}|$ est la hauteur du parallélépipède engendré par les trois vecteurs. Si $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ engendrent un repère direct, leur produit mixte est donc le volume $V = A h$ du petit parallélépipède engendré.

On déduit de ce qui précède que le déterminant d'un tenseur d'ordre deux $\underline{F}$ identifié à une matrice de composantes F_{ij} s'écrit $\det \underline{F} = \epsilon_{ijk} F_{1i} F_{2j} F_{3k}$.

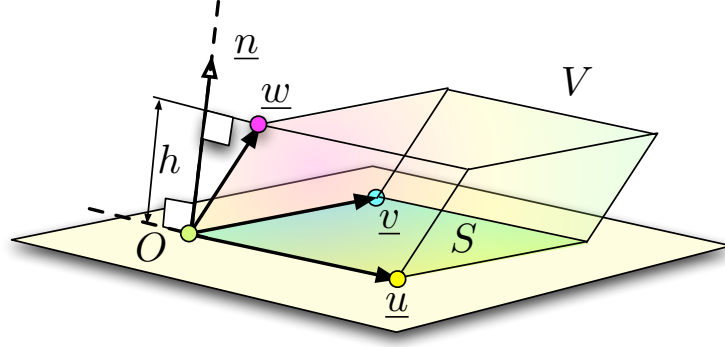


FIGURE 1.2 – Calcul du volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs.

1.3 Décompositions de tenseurs

Tout tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{K}}$ se décompose de manière unique en une partie antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ et une partie $\underline{\underline{D}}$ symétrique en écrivant

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}). \quad (1.16)$$

Cette décomposition correspond à des projections sur des sous-espaces vectoriels de l'espace des tenseurs d'ordre deux, de dimensions respectives 3 et 6.

On peut aussi décomposer, de manière unique, un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{\sigma}}$ (pour varier les notations) en une partie “sphérique” $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ proportionnelle au tenseur identité $\underline{\underline{I}}$ et une partie “déviatorique” $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}$ de trace nulle. En effet, on peut écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}. \quad (1.17)$$

On a bien $\text{tr}[\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}] = 0$. Cette décomposition correspond à des projections sur des sous-espaces vectoriels de l'espace des tenseurs d'ordre deux, de dimensions respectives 1 et 8.

2 Champs de tenseurs

Lorsqu'on associe à tout point de l'espace un vecteur ou un tenseur d'ordre deux à l'aide de fonctions différentiables, on parle de champs de tenseurs. On présente ici les principaux opérateurs de dérivation des champs de tenseurs ainsi que quelques unes de leurs principales propriétés.

2.1 Opérateurs de dérivation

On repère les points M d'un espace affine de dimension 3 muni d'une origine O par le vecteur $\underline{x} = \underline{OM}$. On considère une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et on note

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_j \underline{e}_j, \quad (1.18)$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein. On se place ici en coordonnées cartésiennes en repérant tous les vecteurs ou tenseurs à l'aide de leurs composantes dans la même base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ indépendante de $\underline{x}$.

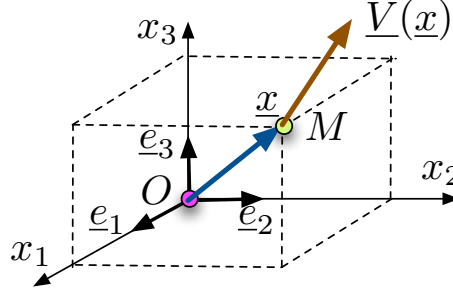


FIGURE 1.3 – Point $\underline{x}$ et vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ dans le repère orthonormé.

On souhaite différentier des champs scalaires $B(\underline{x})$, des champs de vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ ou des champs de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$. On introduit pour cela les notations équivalentes

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = B_{,i}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_{i,j}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = A_{ij,k}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j} = B_{,ij}, \quad \text{etc.} \quad (1.19)$$

On considère des champs scalaires $B(\underline{x})$ différentiables par rapport aux variables d'espace. Le gradient du champ $B(\underline{x})$ est défini par la relation

$$\underline{\text{grad}} B = \frac{\partial B}{\partial x_i} \underline{e}_i = B_{,i} \underline{e}_i. \quad (1.20)$$

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut écrire

$$B(\underline{x} + \underline{\delta x}) = B(\underline{x}) + \underline{\text{grad}} B(\underline{x}) \cdot \underline{\delta x} + O(\delta x^2) \quad (1.21)$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ et $O(\delta x^2)$ est un terme d'ordre deux en δx . On s'affranchit de ce terme d'ordre deux en considérant des variations "infinitésimales" $\underline{dx}$ pour désigner un petit vecteur $\underline{\delta x}$ "infinitement petit" et dB pour désigner une variation $\delta B = B(\underline{x} + \underline{\delta x}) - B(\underline{x})$ "infinitement petite". On peut ainsi écrire

$$dB = \underline{\text{grad}} B(\underline{x}) \cdot \underline{dx}. \quad (1.22)$$

On définit la divergence de $\underline{V}(\underline{x}) = V_j(\underline{x}) \underline{e}_j$ par la relation

$$\text{div } \underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = V_{j,j}. \quad (1.23)$$

Le Laplacien d'un champ scalaire est défini, de manière intrinsèque, par

$$\Delta B = \text{div} (\underline{\text{grad}} B). \quad (1.24)$$

Comme la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ne dépend pas de $\underline{x}$, on peut écrire

$$\Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial x_j \partial x_j} = B_{,jj}, \quad (1.25)$$

où l'utilisation de la convention d'Einstein nécessite de dupliquer la variable au dénominateur. L'opérateur rotationnel est défini par les relations

$$\text{rot } \underline{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \underline{e}_i = \epsilon_{ijk} V_{k,j} \underline{e}_i, \quad (1.26)$$

où la convention d'Einstein et le pseudo-tenseur fondamental alterné sont utilisés.

2.2 Différentielle d'un champ de vecteurs

La différentielle en $\underline{x}$ d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ est la Jacobienne en $\underline{x}$ de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $\underline{x}$ associe $\underline{V}(\underline{x})$. Cette Jacobienne s'écrit

$$\underline{\text{grad}} \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = V_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j. \quad (1.27)$$

La valeur absolue du déterminant $|\det(\underline{\text{grad}} \underline{V})|$ de cette Jacobienne est le Jacobien et sa trace vérifie $\text{tr}(\underline{\text{grad}} \underline{V}) = \text{div } \underline{V}$.

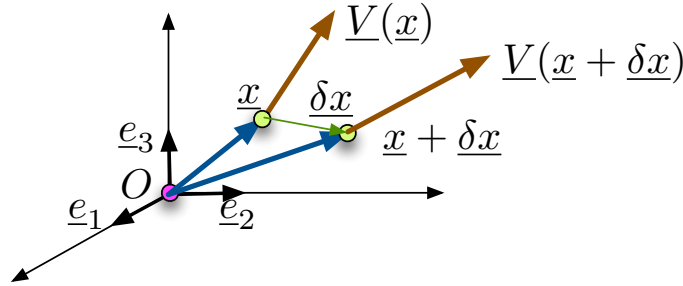


FIGURE 1.4 – Vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ et $\underline{V}(\underline{x} + \underline{\delta x})$ en deux points voisins $\underline{x}$ et $\underline{x} + \underline{\delta x}$.

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut écrire

$$\begin{aligned} V_i(\underline{x} + \underline{\delta x}) &= V_i(\underline{x}) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \delta x_j + O(\delta x^2) \\ \iff \underline{V}(\underline{x} + \underline{\delta x}) &= \underline{V}(\underline{x}) + \underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\delta x} + O(\delta x^2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ et $O(\delta x^2)$ est un terme d'ordre deux en δx . En considérant des variations infinitésimales, on peut écrire

$$d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}. \quad (1.29)$$

On définit l'opérateur de dérivation “le long de $\underline{V}$ ” par la relation

$$\underline{V} \cdot \underline{\text{grad}} = V_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (1.30)$$

On vérifie que $(\underline{V} \cdot \underline{\text{grad}}) B = \underline{V} \cdot (\underline{\text{grad}} B)$ ce que l'on écrit $\underline{V} \cdot \underline{\text{grad}} B$ sans se préoccuper du placement des parenthèses. Il en va de même pour la relation

$$\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V} = (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{V} = (\underline{\text{grad}} \underline{V}) \cdot \underline{U} = U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \underline{e}_i = U_j V_{i,j} \underline{e}_i. \quad (1.31)$$

Étant donné un champ de tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, on définit sa divergence par la relation

$$\text{div } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = A_{ij,j} \underline{e}_i . \quad (1.32)$$

Cette définition n'est valable que dans le cas où les composantes de $\underline{\underline{A}}$ sont exprimées dans une base indépendante du point $\underline{x}$. Dans le cas général des coordonnées curvilignes, pour lesquelles les tenseurs sont exprimées dans des bases variant avec $\underline{x}$, la définition intrinsèque de la divergence d'un tenseur est obtenue à l'aide du produit doublement contracté de sa différentielle avec l'identité. Mais par souci de simplicité, nous avons choisi de ne pas définir ici la différentielle d'un champ de tenseur d'ordre deux.

Le Laplacien d'un champ de vecteur est défini par la relation intrinsèque

$$\Delta \underline{V} = \text{div } (\text{grad } \underline{V}) . \quad (1.33)$$

Lorsque la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ne dépend pas de $\underline{x}$, on peut écrire

$$\Delta \underline{V} = \Delta V_i \underline{e}_i = {}^t(\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3) . \quad (1.34)$$

2.3 Théorème de dérivation

L'utilisation de la convention de sommation d'Einstein permet de retrouver facilement les règles usuelles de dérivation de produit comme par exemple

$$\begin{aligned} \text{grad } (B B') &= B \text{grad } B' + B' \text{grad } B = \left(B \frac{\partial B'}{\partial x_i} + B' \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \underline{e}_i \\ &= (B B'_{,i} + B' B_{,i}) \underline{e}_i . \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

Il en va de même pour les identités remarquables

$$\begin{aligned} \text{div } (B \underline{V}) &= \text{grad } B \cdot \underline{V} + B \text{div } \underline{V} , \\ \text{div } (\underline{U} \otimes \underline{V}) &= \text{grad } \underline{U} \cdot \underline{V} + (\text{div } \underline{V}) \underline{U} , \\ \text{rot } (\text{rot } \underline{V}) &= \text{grad } (\text{div } \underline{V}) - \Delta \underline{V} , \text{ etc.} \end{aligned} \quad (1.37)$$

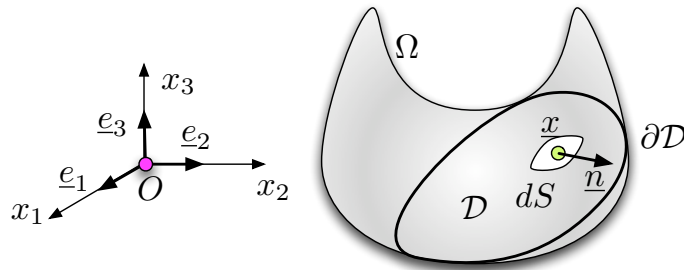


FIGURE 1.5 – Sous-domaine $\mathcal{D}$ de Ω et sa frontière $\partial\mathcal{D}$.

On considère un sous-domaine $\mathcal{D}$ d'un domaine Ω et on note $\partial\mathcal{D}$ sa frontière. Si dS est un petit élément de surface de cette frontière pris autour du point

$\underline{x}$, on note $\underline{n}$ sa normale dirigée vers l'extérieur. Étant donné un champ de vecteur $\underline{Q}(\underline{x})$, la formule de la divergence s'écrit

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q} d^3x \Leftrightarrow \iint_{\partial\mathcal{D}} Q_j n_j dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} d^3x . \quad (1.38)$$

Cette formule se généralise au cas des champs de tenseur d'ordre deux à travers la relation

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} d^3x \Leftrightarrow \iint_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d^3x . \quad (1.39)$$

3 Coordonnées curvilignes

On indique ici l'expression des principaux opérateurs différentiels des champs de tenseurs en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Seule l'expression de la divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux est admise sans démonstration, les autres formules découlant des définitions des paragraphes précédents.

3.1 Coordonnées cartésiennes

On note $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ la base orthonormée du système de coordonnées cartésiennes et on écrit

$$\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z . \quad (1.40)$$

Un vecteur infinitésimal $\underline{dx}$ s'écrit alors

$$\underline{dx} = dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z . \quad (1.41)$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz = B_{,x} dx + B_{,y} dy + B_{,z} dz . \quad (1.42)$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\operatorname{grad}} B(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\operatorname{grad}} B(\underline{x}) = B_{,x} \underline{e}_x + B_{,y} \underline{e}_y + B_{,z} \underline{e}_z \quad (1.43)$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_x \underline{e}_x + V_y \underline{e}_y + V_z \underline{e}_z . \quad (1.44)$$

Une variation infinitésimale de $\underline{V}(\underline{x})$ s'écrit

$$d\underline{V} = dV_x \underline{e}_x + dV_y \underline{e}_y + dV_z \underline{e}_z \quad (1.45)$$

La définition intrinsèque de $d\underline{V} = \underline{\operatorname{grad}} \underline{V}(\underline{x}) \underline{dx}$ du gradient de $\underline{V}$ permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions, la relation

$$\begin{aligned} \underline{\operatorname{grad}} \underline{V} &= V_{x,x} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + V_{x,y} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + V_{x,z} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z \\ &+ V_{y,x} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + V_{y,y} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + V_{y,z} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_z \\ &+ V_{z,x} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x + V_{z,y} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y + V_{z,z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z , \end{aligned} \quad (1.46)$$

ce que l'on résume par la relation matricielle $d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V} \cdot d\underline{x}$:

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{x,x} & V_{x,y} & V_{x,z} \\ V_{y,x} & V_{y,y} & V_{y,z} \\ V_{z,x} & V_{z,y} & V_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Comme $\text{div } \underline{V} = \text{tr}(\underline{\text{grad}} \underline{V})$, on obtient directement

$$\text{div } \underline{V} = V_{x,x} + V_{y,y} + V_{z,z} . \quad (1.48)$$

Comme $\Delta B = \text{div}(\underline{\text{grad}} B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{xx} + B_{yy} + B_{zz} . \quad (1.49)$$

L'expression de $\Delta \underline{V} = \text{div}(\underline{\text{grad}} \underline{V})$ s'écrit

$$\Delta \underline{V} = \Delta V_x \underline{e}_x + \Delta V_y \underline{e}_y + \Delta V_z \underline{e}_z . \quad (1.50)$$

La divergence d'un champ de tenseurs $\underline{\sigma}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} &= (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z}) \underline{e}_x \\ &+ (\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z}) \underline{e}_y \\ &+ (\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z}) \underline{e}_z . \end{aligned} \quad (1.51)$$

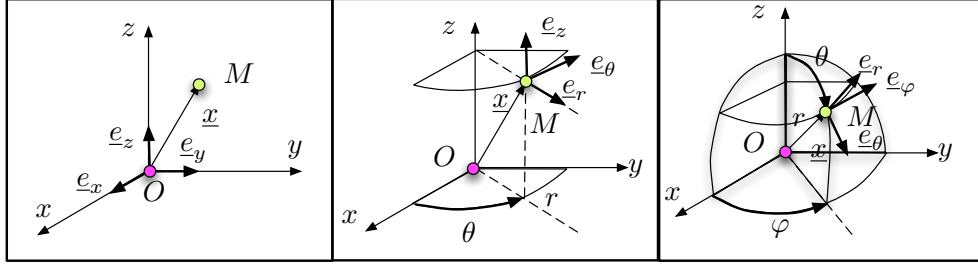


FIGURE 1.6 – Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

3.2 Coordonnées cylindriques

Le système des coordonnées cylindriques est défini par les relations

$$\underline{x} = r \cos \theta \underline{e}_x + r \sin \theta \underline{e}_y + z \underline{e}_z = r \underline{e}_r(\theta) + z \underline{e}_z . \quad (1.52)$$

On considère alors la base orthonormée $[\underline{e}_r(\theta), \underline{e}_\theta(\theta), \underline{e}_z]$ telle que

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{e}_\theta = \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_{r,\theta} = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y . \quad (1.53)$$

Un vecteur infinitésimal $d\underline{x}$ s'écrit alors, en dérivant l'équation (1.52),

$$d\underline{x} = dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z . \quad (1.54)$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial r} dr + \frac{\partial B}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial B}{\partial z} dz = B_{,r} dr + B_{,\theta} d\theta + B_{,z} dz . \quad (1.55)$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\text{grad}} B(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\text{grad}} B(\underline{x}) = B_{,r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta} \underline{e}_\theta + B_{,z} \underline{e}_z . \quad (1.56)$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta + V_z \underline{e}_z . \quad (1.57)$$

En tenant compte de $d[\underline{e}_r(\theta)] = d\theta \underline{e}_\theta$ et $d[\underline{e}_\theta(\theta)] = -d\theta \underline{e}_r$, une variation infinitésimale de $\underline{V}(\underline{x})$ s'écrit

$$d\underline{V} = (dV_r - V_\theta d\theta) \underline{e}_r + (dV_\theta + V_r d\theta) \underline{e}_\theta + dV_z \underline{e}_z . \quad (1.58)$$

La définition intrinsèque de $d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x}) d\underline{x}$ du gradient de $\underline{V}$ permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions :

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}} \underline{V} &= V_{r,r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{r,\theta} - V_\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{r,z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z \\ &+ V_{\theta,r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{\theta,\theta} + V_r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{\theta,z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z \\ &+ V_{z,r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} V_{z,\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{z,z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z , \end{aligned} \quad (1.59)$$

ce que l'on résume par la relation matricielle $d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V} \cdot d\underline{x}$:

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{r,r} & \frac{1}{r} (V_{r,\theta} - V_\theta) & V_{r,z} \\ V_{\theta,r} & \frac{1}{r} (V_{\theta,\theta} + V_r) & V_{\theta,z} \\ V_{z,r} & \frac{1}{r} V_{z,\theta} & V_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix} . \quad (1.60)$$

Comme $\text{div} \underline{V} = \text{tr} (\underline{\text{grad}} \underline{V})$, on obtient directement

$$\text{div} \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r} V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} V_r + V_{z,z} . \quad (1.61)$$

Comme $\Delta B = \text{div} (\underline{\text{grad}} B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r} B_{,r} + \frac{1}{r^2} B_{,\theta\theta} + B_{,zz} . \quad (1.62)$$

Pour calculer l'expression de $\Delta \underline{V} = \underline{\text{div}} (\underline{\text{grad}} \underline{V})$, il faut définir la divergence d'un champ de tenseur de manière intrinsèque à partir de la différentielle du champ de tenseur $\underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x})$ qui est un tenseur d'ordre trois. Sans entrer dans ces considérations, nous admettons ici l'expression

$$\Delta \underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2 V_{\theta,\theta}}{r^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2 V_{r,\theta}}{r^2} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \underline{e}_\theta + \Delta V_z \underline{e}_z . \quad (1.63)$$

On voit que les composantes de $\Delta \underline{V}$ ne sont pas les Laplaciens des composantes de $\underline{V}$ comme c'est le cas pour les coordonnées cartésiennes. On admettra de même que la divergence d'un champ de tenseurs symétriques $\underline{\sigma}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} &= \left(\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r \\ &+ \left(\sigma_{\theta r,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{2 \sigma_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left(\sigma_{zr,r} + \frac{\sigma_{z\theta,\theta}}{r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) \underline{e}_z . \end{aligned} \quad (1.64)$$

3.3 Coordonnées sphériques

Le système des coordonnées sphériques est défini par les relations

$$\underline{x} = r \sin \theta (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) + r \cos \theta \underline{e}_z . \quad (1.65)$$

On considère alors la base orthonormée $[\underline{e}_r(\varphi, \theta), \underline{e}_\theta(\varphi, \theta), \underline{e}_\varphi(\varphi, \theta)]$ telle que

$$\begin{aligned} \underline{e}_r &= \sin \theta (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) + \cos \theta \underline{e}_z \\ \underline{e}_\theta &= \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \cos \theta (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) - \sin \theta \underline{e}_z \\ \underline{e}_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y \end{aligned} \quad (1.66)$$

Un vecteur infinitésimal $d\underline{x}$ s'écrit alors

$$d\underline{x} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi . \quad (1.67)$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial r} dr + \frac{\partial B}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial B}{\partial \varphi} d\varphi = B_{,r} dr + B_{,\theta} d\theta + B_{,\varphi} d\varphi . \quad (1.68)$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\text{grad}} B(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\text{grad}} B(\underline{x}) = B_{,r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} B_{,\varphi} \underline{e}_\varphi . \quad (1.69)$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta + V_\varphi \underline{e}_\varphi . \quad (1.70)$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} d[\underline{e}_r(\varphi, \theta)] &= d\theta \underline{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi , \\ d[\underline{e}_\theta(\varphi, \theta)] &= -d\theta \underline{e}_r + \cos \theta d\varphi \underline{e}_\varphi , \\ d[\underline{e}_\varphi(\varphi, \theta)] &= -\sin \theta d\varphi \underline{e}_r - \cos \theta d\varphi \underline{e}_\theta , \end{aligned} \quad (1.71)$$

une variation infinitésimale de $\underline{V}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned} d\underline{V} &= (dV_r - V_\theta d\theta - V_\varphi d\varphi) \underline{e}_r \\ &+ (dV_\theta + V_r d\theta - V_\varphi \cos \theta d\varphi) \underline{e}_\theta \\ &+ (dV_\varphi + V_r \sin \theta d\varphi + V_\theta \cos \theta d\theta) \underline{e}_\varphi . \end{aligned} \quad (1.72)$$

La définition intrinsèque de $d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x}) d\underline{x}$ du gradient de $\underline{V}$ permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions :

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}} \underline{V} &= V_{r,r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{r,\theta} - V_\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{r,\varphi} - V_\varphi \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi \\ &+ V_{\theta,r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{\theta,\theta} + V_r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{\theta,\varphi} - \frac{1}{\tan \theta} V_\varphi \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\varphi \\ &+ V_{\varphi,r} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} V_{\varphi,\theta} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{\tan \theta} V_\theta + V_r \right) \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi . \end{aligned} \quad (1.73)$$

ce que l'on résume par la relation matricielle $d\underline{V} = \underline{\text{grad}} \underline{V} \cdot d\underline{x}$:

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{r,r} & \frac{1}{r} (V_{r,\theta} - V_\theta) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{r,\varphi} - V_\varphi \right) \\ V_{\theta,r} & \frac{1}{r} (V_{\theta,\theta} + V_r) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{\theta,\varphi} - V_\varphi \cotg \theta \right) \\ V_{\varphi,r} & \frac{1}{r} V_{\varphi,\theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} V_{\varphi,\varphi} + V_\theta \cotg \theta + V_r \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Comme $\text{div} \underline{V} = \text{tr} (\underline{\text{grad}} \underline{V})$, on obtient directement

$$\text{div} \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r} V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r \sin \theta} V_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{r} V_\theta \cotg \theta + \frac{1}{r} V_r. \quad (1.75)$$

Comme $\Delta B = \text{div} (\underline{\text{grad}} B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{,rr} + \frac{2}{r} B_{,r} + \frac{1}{r^2} B_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \cotg \theta B_{,\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_{,\varphi\varphi}. \quad (1.76)$$

Pour calculer l'expression de $\Delta \underline{V} = \underline{\text{div}} (\underline{\text{grad}} \underline{V})$, il faut définir la divergence d'un champ de tenseur de manière intrinsèque à partir de la différentielle du champ de tenseur $\underline{\text{grad}} \underline{V}(\underline{x})$ qui est un tenseur d'ordre trois. Sans entrer dans ces considérations, nous admettons ici l'expression

$$\begin{aligned} \Delta \underline{V} &= \left[\Delta V_r - \frac{2}{r^2} \left(V_r + V_{\theta,\theta} + V_\theta \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} V_{\varphi,\varphi} \right) \right] \underline{e}_r \\ &+ \left[\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \left(V_{r,\theta} - \frac{V_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cotg \theta}{\sin \theta} V_{\varphi,\varphi} \right) \right] \underline{e}_\theta \\ &+ \left[\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(V_{r,\varphi} + \cotg \theta V_{\theta,\varphi} - \frac{V_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right] \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (1.77)$$

On voit que les composantes de $\Delta \underline{V}$ ne sont pas les Laplaciens des composantes de $\underline{V}$ comme c'est le cas pour les coordonnées cartésiennes. On admettra de même que la divergence d'un champ de tenseurs symétriques $\underline{\sigma}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} &= \left[\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cotg \theta) \right] \underline{e}_r \\ &+ \left[\sigma_{\theta r,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{\theta\theta} \cotg \theta - \sigma_{\varphi\varphi} \cotg \theta + 3 \sigma_{r\theta}) \right] \underline{e}_\theta \\ &+ \left[\sigma_{\varphi r,r} + \frac{\sigma_{\varphi\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} (3 \sigma_{r\varphi} + 2 \sigma_{\theta\varphi} \cotg \theta) \right] \underline{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.78)$$

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

- 1) Écrire $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{u}$, $\underline{u} \cdot \underline{C} \cdot \underline{v}$ et $\underline{B} = \underline{u} \otimes \underline{v}$ en notations indicées en utilisant la convention de sommation d'Einstein.
 $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i$, $v_i = A_{ij} u_j$, $\underline{u} \cdot \underline{C} \cdot \underline{v} = u_i C_{ij} v_j$ et $B_{ij} = u_i v_j$.
- 2) Écrire $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$, $\underline{A} : \underline{B}$, $\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$ et $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ en notations indicées en utilisant la convention de sommation d'Einstein.
 $C_{ij} = A_{il} B_{lj}$, $\underline{A} : \underline{B} = A_{ij} B_{ji}$, $w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$ et $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$.

- 3) Calculer le produit mixte $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On considère $\underline{K} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. Calculer les parties symétrique $\underline{D}$ et antisymétrique $\underline{\Omega}$ de $\underline{K}$.
On considère $\underline{\sigma} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. Calculer les parties sphérique $\underline{\sigma}^{(s)}$ et déviatorique $\underline{\sigma}^{(d)}$.
On a $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 1$. On a $\underline{D} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ et $\underline{\Omega} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$. On a $\underline{\sigma}^{(s)} = \underline{I}$ et $\underline{\sigma}^{(d)} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$.
- 4) Calculer $\text{grad } B$, $\text{div } \underline{V}$, ΔB et $\text{rot } \underline{V}$ pour $B(\underline{x}) = \underline{x}^2$ et $\underline{V} = \text{grad } B$.
 $\text{grad } B = 2\underline{x}$, $\text{div } \underline{V} = \Delta B = 6$ et $\text{rot } \underline{V} = \underline{0}$.
- 5) Calculer $\text{grad } \underline{V}$, $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{V}$, $\text{grad } \underline{V} \cdot \underline{U}$, $\text{div } \underline{A}$ et ΔV pour $\underline{V} = 2\underline{x}$, $\underline{U} = \underline{x}$ et $\underline{A} = \text{grad } \underline{V}$.
 $\text{grad } \underline{V} = 2\underline{I}$, $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{V} = \text{grad } \underline{V} \cdot \underline{U} = 2\underline{x}$ et $\text{div } \underline{A} = \Delta V = \underline{0}$.
- 6) Calculer $\text{div } \underline{A}$ pour $\underline{A} = \underline{x} \otimes \underline{e}_1$ puis $\underline{A} = \underline{e}_1 \otimes \underline{x}$.
 $\text{div } (\underline{x} \otimes \underline{e}_1) = \underline{e}_1$ et $\text{div } (\underline{e}_1 \otimes \underline{x}) = 3\underline{e}_1$.
- 7) Calculer $\text{div } (B \underline{V})$, $\text{div } (\underline{U} \otimes \underline{V})$ et $\text{rot } (\text{rot } \underline{V})$ pour $B = \underline{x}^2$, $\underline{U} = \underline{x}$ et $\underline{V} = 2\underline{x}$.
 $\text{div } (B \underline{V}) = 10\underline{x}^2$, $\text{div } (\underline{U} \otimes \underline{V}) = 8\underline{x}$ et $\text{rot } (\text{rot } \underline{V}) = \underline{0}$.
- 8) Calculer $\int_{\partial D} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS$ et $\int_{\partial D} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS$ pour $\underline{Q}(\underline{x}) = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2 - 2z \underline{e}_3$ et $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{e}_1 \otimes \underline{Q}(\underline{x})$.
Comme $\text{div } \underline{Q} = \underline{0}$ et $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$, le théorème de la divergence entraîne que ces intégrales sont nulles.
- 9) On considère l'équation $\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad } (\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi}$ où $\underline{\xi}(a_1, a_2, a_3, t)$ est un champ de vecteurs 3D et où λ et μ sont des constantes positives. On note $d = \text{div } \underline{\xi}$ et $\underline{r} = \text{rot } \underline{\xi}$. Montrer que $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta d$ et $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \underline{r}$ où c_1 et c_2 sont des constantes que l'on déterminera.
Comme les dérivations en temps (t) et en espace ($\underline{a}$) commutent, comme $\text{div grad} = \Delta$ et comme $\text{rot grad} = \underline{0}$, les champs $d(\underline{a}, t)$ et $\underline{r}(\underline{a}, t)$ vérifient bien l'équation des ondes avec $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$.

NIVEAU II Révision sur les tenseurs (A)

- 1) Démontrer que $\underline{u} \otimes \underline{v} \cdot \underline{w} = (\underline{v} \cdot \underline{w}) \underline{u}$ et que ses composante sont $v_j w_j u_i$.
En utilisant la convention d'Einstein, on peut écrire $\underline{u} \otimes \underline{v} \cdot \underline{w} = u_i v_j w_j \underline{e}_i = (\underline{v} \cdot \underline{w}) \underline{u}$.
- 2) Relier ce résultat à la relation $\underline{A} \cdot \underline{u} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot \underline{u} = A_{ij} u_j \underline{e}_i$.
Comme $\underline{A} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ et $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot \underline{u} = (\underline{e}_j \cdot \underline{u}) \underline{e}_i = u_j \underline{e}_i$, on a $\underline{A} \cdot \underline{u} = A_{ij} u_j \underline{e}_i$.
- 3) On considère la relation linéaire $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr } (\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}$ entre deux tenseurs d'ordre deux $\underline{\sigma}$ et $\underline{\epsilon}$. Projeter cette relation sur l'espace des tenseurs sphériques et l'espace des tenseurs déviatoriques. Montrer que $\underline{\epsilon} = a \text{tr } (\underline{\sigma}) \underline{I} + 2b \underline{\sigma}$, où a et b sont des constantes que l'on déterminera.

La projection de la relation $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$ sur les espaces vectoriels des tenseurs d'ordre deux sphériques et déviatoriques conduit à $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)}$. On en déduit $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} + \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = \frac{1}{3\lambda+2\mu} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = \frac{1}{3\lambda+2\mu} \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1}{2\mu} [\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}]$. On a donc bien $\underline{\underline{\epsilon}} = a \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + 2b \underline{\underline{\sigma}}$ avec $a = \frac{1}{3} (\frac{1}{3\lambda+2\mu} - \frac{1}{2\mu})$ et $b = \frac{1}{4\mu}$. On peut aussi projeter la relation $\underline{\underline{\epsilon}} = a \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + 2b \underline{\underline{\sigma}}$ en $\underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} = (3a + 2b) \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = 2b \underline{\underline{\sigma}}^{(d)}$ pour en déduire $(3\lambda + 2\mu)(3a + 2b) = 1$ et $(2\mu)(2a) = 1$.

4) Montrer que $\iint_{\partial\mathcal{D}} p \underline{\underline{n}} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{grad} p d^3x$.

On pose $\underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{I}}$ et on applique la formule de la divergence $\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} d^3x$ en remarquant que $\operatorname{div}(p \underline{\underline{I}}) = \operatorname{grad} p$.

5) En utilisant la convention d'Einstein, développer les expressions $\operatorname{div}(B \underline{\underline{V}})$, $\operatorname{div}(\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{V}})$.

On a $\operatorname{div}(B \underline{\underline{V}}) = \frac{\partial(B V_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial B}{\partial x_j} V_j + B \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \operatorname{grad} B \cdot \underline{\underline{V}} + B \operatorname{div} \underline{\underline{V}}$. La seconde expression s'écrit $\operatorname{div}(\underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{V}}) = \frac{\partial(U_i V_j)}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} V_j \underline{\underline{e}}_i + U_i \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = \operatorname{grad} \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{V}} + \operatorname{div} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{U}}$.

NIVEAU III Révision sur les tenseurs (B)

1) On considère $\underline{\underline{K}} = \operatorname{grad} \underline{\underline{U}}$ et sa décomposition $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ en partie antisymétrique et symétrique. On pose $\underline{\underline{\tau}} = \lambda_n \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu_n \underline{\underline{D}}$. Montrer que $\operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) + \mu_n \Delta \underline{\underline{U}}$.

On a $\tau_{ij} = \lambda_n D_{ll} \delta_{ij} + 2\mu_n D_{ij} = \lambda_n \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} + \mu_n \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$. On en déduit $\operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = \left[\lambda_n \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l \partial x_j} \delta_{ij} + \mu_n \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_i} + \mu_n \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] \underline{\underline{e}}_i$. On a donc $\operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = \left[(\lambda_n + \mu_n) \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_j} + \mu_n \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_i} \right] \underline{\underline{e}}_i = (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) + \mu_n \Delta \underline{\underline{U}}$.

2) Ecrire la formule de la divergence $\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\underline{Q}} d^3x$ avec la convention d'Einstein. Exprimer les composantes du vecteur $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ avec $\underline{\underline{A}} = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{x}} \wedge \underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{\underline{n}} dS$ et $\underline{\underline{B}} = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{x}} \wedge \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(x) d^3x$. En déduire que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique lorsque $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$ pour tout domaine $\mathcal{D}$.

La formule de la divergence peut s'écrire sous la forme $\iint_{\partial\mathcal{D}} Q_l n_l dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} d^3x$. En appliquant la formule de la divergence à l'expression $A_i = \iint_{\partial\mathcal{D}} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial(x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} d^3x + \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} d^3x$ et en remarquant que $B_i = \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} d^3x$, on obtient $C_i = \epsilon_{ijk} \delta_{jl} \iiint_{\mathcal{D}} \sigma_{kl} d^3x = \epsilon_{ijk} \iiint_{\mathcal{D}} \sigma_{kj} d^3x =$. On a donc $C_1 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) d^3x$, $C_2 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{13} - \sigma_{31}) d^3x$ et $C_3 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d^3x$. On voit que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique si $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$ pour des domaines $\mathcal{D}$ de plus en plus petits.

3) On considère un champ de tenseurs d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{\sigma}}(x)$ et un champ de vecteurs $\underline{\underline{U}}(x)$. On note $\underline{\underline{K}} = \operatorname{grad} \underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ sa décomposition en partie antisymétrique et symétrique. On note $A = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS$, $B = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{U}} d^3x$ et $C = A - B$. Montrer que $C = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} d^3x$.

En appliquant la formule de la divergence, $A = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \iint_{\partial\mathcal{D}} U_i \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial(U_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d^3x + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d^3x$. Comme $B = \iiint_{\mathcal{D}} U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d^3x$, on a $C = \iiint_{\mathcal{D}} K_{ij} \sigma_{ij} d^3x$ avec $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Comme $\underline{\underline{\sigma}} : {}^t \underline{\underline{K}} = \sigma_{ij} K_{ij} = \sigma_{ij} D_{ij} + \sigma_{ij} \Omega_{ij}$ et que $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = \sigma_{ij} \Omega_{ji} = -\sigma_{ji} \Omega_{ij} = -\sigma_{ij} \Omega_{ji} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0$, on a $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : {}^t \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$.

Chapitre 2

Hypothèse du continu

Sommaire

1	Vecteur flux	24
1.1	Nombre de Knusden et hypothèse du continu	24
1.2	Bilan global d'un constituant chimique	25
1.3	Linéarité du flux	26
2	Diffusion d'un champ scalaire	27
2.1	Du bilan global au bilan local	27
2.2	Loi de Fick	28
2.3	Solutions analytiques de l'équation de diffusion . . .	28
3	Équation de la chaleur	29
3.1	Équation de bilan de l'énergie interne	30
3.2	Loi de Fourier et loi d'état	30
3.3	Conditions aux limites	31

Introduction

On définit ici les conditions qui permettent de décrire la matière de manière continue, sachant qu'elle ne l'est plus aux échelles microscopiques. Il faut pour cela que les échelles de variation macroscopiques des champs considérés soient grandes devant ces échelles microscopiques. Les phénomènes physiques résidant aux échelles microscopiques, comme par exemple la diffusion brownienne de constituants chimiques ou de la chaleur, doivent alors être modélisés par des champs continus.

1 Vecteur flux

Le nombre de Knusden mesure l'écart entre les échelles microscopiques et macroscopiques et doit être petit pour justifier l'approche continue. On montre que les champs de surface qui modélisent les phénomènes microscopiques de courte portée et qui interviennent dans les équations de bilan sont caractérisés par un vecteur flux.

1.1 Nombre de Knusden et hypothèse du continu

La modélisation de la mécanique des milieux continus repose sur l'utilisation de champs scalaires $B(\underline{x})$, de champs de vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ ou de champs de tenseurs (d'ordre deux) $\underline{A}(\underline{x})$ supposés continus et différentiables, au moins par morceaux. Cependant, cette description continue n'est physiquement pas valable lorsqu'on s'approche des échelles microscopiques (10^{-9} m par exemple) où la matière est notoirement discontinue (atomes, molécules).

Pour justifier l'utilisation de fonctions continues pour décrire les solides et les fluides à l'échelle macroscopique, on considère une suite de sous-domaines emboîtés $\mathcal{D}_h$ convergeant vers un point $\underline{x}_0$ lorsque h , une longueur caractéristique de $\mathcal{D}_h$, tend vers zéro (voir Figure 2.1). On considère alors les valeurs d'une grandeur physique extensive $\mathcal{F}(\mathcal{D}_h)$ lorsque h varie des échelles microscopiques h_{mic} aux échelles macroscopiques h_{mac} .

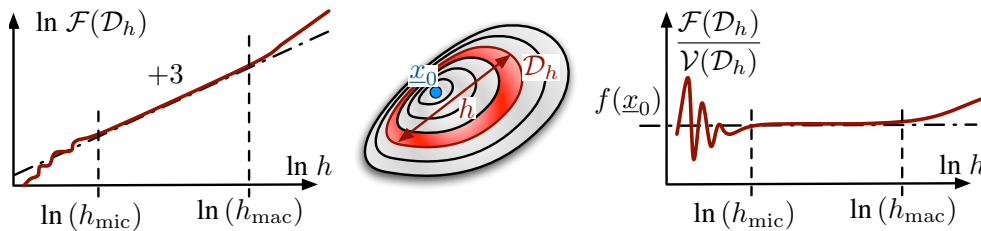


FIGURE 2.1 – Comportement $\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) \sim f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h)$ pour $h_{\text{mic}} \ll h \ll h_{\text{mac}}$ avec des domaines emboîtés $\mathcal{D}_h$ convergeant vers $\underline{x}_0$.

S'il existe une gamme d'échelles $h_{\text{mic}} \ll h \ll h_{\text{mac}}$ pour lesquelles

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) \sim f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h) \quad (2.1)$$

où $\mathcal{V}(\mathcal{D}_h)$ est le volume du domaine $\mathcal{D}_h$, on dit que la grandeur $\mathcal{F}$ vérifie “l’hypothèse du continu”. On modélise alors la grandeur $\mathcal{F}$ par un champ

continu à toutes les échelles, y compris infinitésimales, en écrivant

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) = f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h) + O(h^4) = O(h^3) \quad (2.2)$$

où $O(h^n)$ désigne un infiniment petit d'ordre n . On peut donc considérer que $f(\underline{x})$, la densité volumique de la grandeur $\mathcal{F}$, est continue et différentiable, en se souvenant que l'infiniment petit mathématique n'est qu'une modélisation et que le domaine du continu décrit des échelles supérieures à l'échelle microscopique h_{mic} . On désigne par le nom de “particule” du milieu continu un volume de taille caractéristique h_{mic} considéré comme infinitésimal pour l'échelle du continu mais suffisamment grand pour contenir un très grand nombre de molécules de matière.

Au-delà de h_{mac} , les fluctuations macroscopiques de $\mathcal{F}$ deviennent visibles. On peut alors écrire

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} f(\underline{x}) d^3x, \quad (2.3)$$

pour tout domaine $\mathcal{D}$. L'hypothèse du continu ne peut être formulée pour une grandeur $\mathcal{F}$ que si le rapport Kn entre les échelles microscopiques et macroscopiques, appelé le nombre de Knudsen, est très petit devant un, ce que l'on écrit

$$Kn = \frac{h_{\text{mic}}}{h_{\text{mac}}} \ll 1. \quad (2.4)$$

Il existe cependant des phénomènes physiques comme la diffusion moléculaire où l'action des forces de contact dont la nature se situe aux échelles microscopiques. En effet, les particules considérées comme infinitésimales à l'échelle du continu échangent constamment des molécules entre elles ce qui induit des processus de mélange. Dans le cadre d'une approche “milieu continu”, il est nécessaire de modéliser ces phénomènes par des champs surfaciques définis sur les frontières de domaines de tailles supérieures à h_{mic} . C'est par exemple le cas du flux d'un constituant chimique.

1.2 Bilan global d'un constituant chimique

On suppose que $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ est la masse d'un constituant chimique dilué dans un fluide occupant le domaine $\mathcal{D}$ à l'instant t . On suppose que le nombre de Knudsen Kn est petit devant un et que $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ ainsi que sa dérivée $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ vérifient l'hypothèse du continu. On peut alors écrire

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, t) = \iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (2.5)$$

où $c(\underline{x}, t)$ est la masse volumique du constituant chimique que l'on suppose variable avec le temps t . On dit aussi que $c(\underline{x}, t)$ est la “concentration” du constituant chimique.

On suppose que la masse du constituant qui traverse la frontière d'un domaine $\mathcal{D}$ par unité de surface et de temps peut être modélisée par le flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ où $\underline{n}$ est la normale à la frontière $\partial\mathcal{D}$. La loi de conservation de la concentration chimique $c(\underline{x}, t)$ consiste à énoncer que pour tout domaine $\mathcal{D}$ fixe, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = 0. \quad (2.6)$$

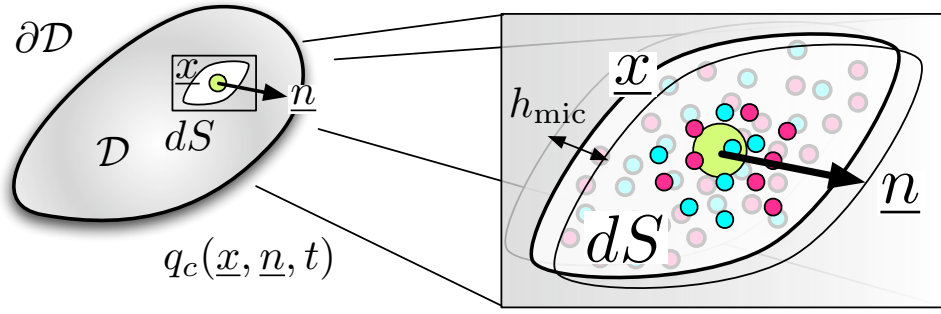


FIGURE 2.2 – Modélisation de la diffusion moléculaire d'un constituant chimique par le flux par unité de surface $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$.

Le flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ mesure la masse du constituant chimique qui sort du domaine $\mathcal{D}$ par unité de surface et de temps. Ce flux provient de l'agitation moléculaire aux échelles microscopiques dont l'effet moyen, à l'échelle du continu, peut se traduire par un bilan positif ou négatif à travers une surface. Dans cette modélisation, on a supposé que ce flux ne dépendait que de la normale à la surface infinitésimale dS prise autour du point $\underline{x}$ de la frontière de $\partial\mathcal{D}$.

1.3 Linéarité du flux

L'existence d'une loi de conservation pour la concentration $c(\underline{x}, t)$ entraîne la linéarité de son flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ par rapport au vecteur unitaire $\underline{n}$. Pour démontrer cette importante propriété, on considère une famille de tétraèdres $\mathcal{T}_h$ convergeant de manière homothétique vers un point $\underline{x}_0$ lorsque h , par exemple la longueur d'une des arêtes, tend vers zéro.

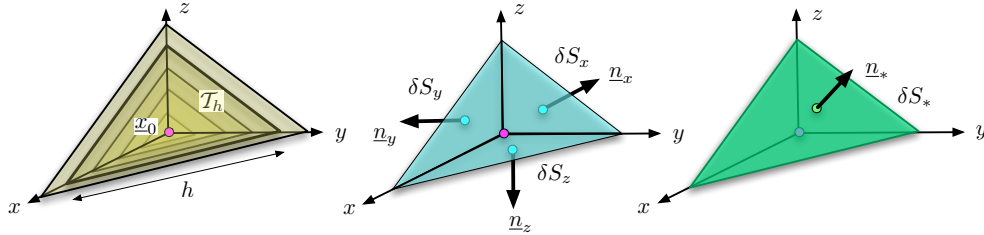


FIGURE 2.3 – Famille de tétraèdres $\mathcal{T}_h$ convergeant vers un point $\underline{x}_0$.

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ et sa dérivée $\frac{d}{dt} [\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)]$ vérifient l'hypothèse du continu, on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = -\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{T}_h} c(\underline{x}, t) d^3x \right] = O(h^3) \quad (2.7)$$

où $O(h^3)$ désigne un infiniment petit d'ordre 3. En notant $\underline{n}_x, \underline{n}_y, \underline{n}_z$ et $\underline{n}_*$ les normales sortantes aux faces d'aires respectives $\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z$ et δS_* (voir figure 2.3), on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_x, t) \delta S_x + q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_y, t) \delta S_y + q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_z, t) \delta S_z$$

$$+q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_*, t) \delta S_* + O(h^3) . \quad (2.8)$$

En remarquant que $\delta S = O(h^2)$ pour $\delta S \in \{\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z, \delta S_*\}$ et en utilisant la relation géométrique

$$\delta S_x \underline{n}_x + \delta S_y \underline{n}_y + \delta S_z \underline{n}_z + \delta S_* \underline{n}_* = \underline{0} , \quad (2.9)$$

la comparaison des équations (2.7) et (2.8) montre que, en changeant $\underline{x}_0$ en $\underline{x}$,

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}_x, t) \delta S_x + q_c(\underline{x}, \underline{n}_y, t) \delta S_y + q_c(\underline{x}, \underline{n}_z, t) \delta S_z + q_c(\underline{x}, \underline{n}_*, t) \delta S_* = 0 . \quad (2.10)$$

On en déduit que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ dépend linéairement de $\underline{n}$. On peut donc l'écrire sous la forme

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \quad (2.11)$$

où $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ est le “vecteur flux sortant” du constituant chimique $c(\underline{x}, t)$.

2 Diffusion d'un champ scalaire

L'équation de bilan d'un champ scalaire représentant la concentration d'un constituant chimique met en évidence l'existence d'un vecteur flux. La loi de Fick, qui est une loi de comportement empirique, relie ce vecteur flux au gradient de la concentration. On en déduit une équation de diffusion qui admet des solutions analytiques.

2.1 Du bilan global au bilan local

On considère le champ de concentration chimique $c(\underline{x}, t)$ obéissant à l'équation de conservation (2.6) qui admet donc un vecteur flux vérifiant (2.11). Cette loi de conservation du champ scalaire $c(\underline{x}, t)$ indique que pour tout domaine fixe $\mathcal{D}$ on peut écrire le bilan global

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = 0 . \quad (2.12)$$

On suppose ici que $c(\underline{x}, t)$ est continu et dérivable dans tout le domaine $\mathcal{D}$ et non plus seulement continu par morceau. Dans ce cas et puisque les domaines $\mathcal{D}$ ne dépendent pas du temps, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) d^3x , \quad (2.13)$$

où $\frac{\partial c}{\partial t}$ est la dérivée partielle de $c(\underline{x}, t)$ par rapport au temps. On suppose de plus que le vecteur flux $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ est un champ dérivable, ce qui permet d'appliquer le théorème de la divergence

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) d^3x . \quad (2.14)$$

En appliquant le bilan global à des domaines de plus en plus petits, on déduit le bilan local valable pour tout point $\underline{x}$ et tout temps t qui s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) + \operatorname{div} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) = 0 . \quad (2.15)$$

2.2 Loi de Fick

La loi de Fick est une loi de comportement, c'est-à-dire basée sur des observations expérimentales, qui spécifie

$$\underline{Q}_c(\underline{x}, t) = -k_c \underline{\text{grad}} c(\underline{x}, t), \quad (2.16)$$

où $k_c \geq 0$ est le “coefficient de diffusion moléculaire” du constituant c .

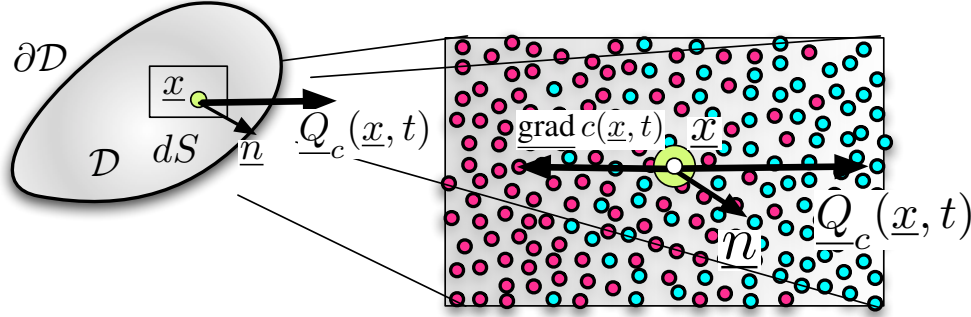


FIGURE 2.4 – Illustration de la loi de Fick avec $q_c = \underline{Q}_c \cdot \underline{n}$ et $\underline{Q}_c = -k_c \underline{\text{grad}} c$.

Si u_m est la vitesse caractéristique de l'agitation des molécules (très grande) et l_m leur libre parcours moyen (très petit), on peut écrire $k_c \sim l_m u_m$. Ce coefficient mesure donc l'efficacité avec laquelle le mouvement brownien des molécules transporte le constituant chimique des endroits où il est le plus abondant vers les endroits où il n'a pas encore complètement diffusé. Par exemple, le coefficient de diffusion moléculaire de la salinité dans l'eau de mer est $k_c \sim 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Si le milieu continu est inhomogène, on peut considérer que $k_c(\underline{x})$ dépend de l'espace et la loi de conservation du constituant chimique $c(\underline{x}, t)$ s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) = \text{div} [k_c(\underline{x}) \underline{\text{grad}} c(\underline{x}, t)] . \quad (2.17)$$

Dans le cas où le milieu continu est homogène, le coefficient k_c est constant et le champ scalaire c vérifie l'équation de diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) = k_c \Delta c(\underline{x}, t) . \quad (2.18)$$

2.3 Solutions analytiques de l'équation de diffusion

On considère l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} \quad (2.19)$$

où $c(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ est un champ scalaire dans un espace affine de dimension n entier quelconque et $k_c > 0$ un coefficient positif constant. Cette équation admet une solution analytique valable pour tout temps $t > 0$ qui s'écrit

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi} l(t)]^n} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2 l^2(t)} \right], \quad l(t) = \sqrt{2 k_c t}, \quad (2.20)$$

et dont l'intégrale sur tout l'espace vaut un. Cette solution mathématique permet de générer plusieurs solutions de l'équation de diffusion tridimensionnelle $\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \Delta c$ dans le cas où k_c est constant, que l'on résume dans le tableau 2.1.

$l(t) = \sqrt{2k_c t}$	1D	2D	3D
$t > 0, c(\underline{x}, t) =$	$\frac{C_{tot}}{\sqrt{2\pi} l(t)} e^{-\frac{x^2}{2l^2(t)}}$	$\frac{C_{tot}}{2\pi l^2(t)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2l^2(t)}}$	$\frac{C_{tot}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} l^3(t)} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2(t)}}$
$t = 0, c(\underline{x}, 0) =$	$C_{tot} \delta(x)$	$C_{tot} \delta(x) \delta(y)$	$C_{tot} \delta(x) \delta(y) \delta(z)$

TABLE 2.1 – Solution exacte de l'équation de diffusion $\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \Delta c$.

Pour toutes ces solutions, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} c(\underline{x}, t) d^n x = C_{tot} \quad \text{et} \quad l(t) = \sqrt{2k_c t}. \quad (2.21)$$

Ces solutions ont des formes de gaussiennes respectivement unidimensionnelles (1D), bidimensionnelles (2D) ou tridimensionnelles (3D). Leur écart type $l(t)$ suit la même “loi de diffusion” en $\sqrt{t}$. Lorsque t tend vers zero, les valeurs de $c(x, y, z, t)/C_{tot}$ tendent respectivement vers $\delta(x)$, $\delta(x)\delta(y)$ et $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ où $\delta(x)$, $\delta(y)$ et $\delta(z)$ sont les distributions de Dirac. On voit donc que ces solutions analytiques correspondent à des concentrations initiales localisées dans un plan (diffusion 1D), sur une ligne (diffusion 2D) ou en un point (diffusion 3D), comme l'illustre la figure 2.5.

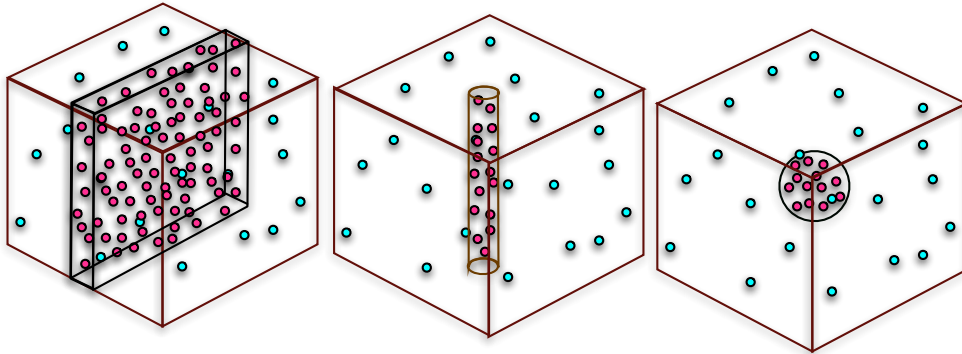


FIGURE 2.5 – Diffusion 1D, 2D ou 3D.

3 Équation de la chaleur

L'équation de bilan de l'énergie interne met en évidence l'existence d'un flux de chaleur. La loi de Fourier relie ce flux au gradient de température. On en déduit l'équation de la chaleur qui se résout en imposant des conditions aux limites aux frontières.

3.1 Équation de bilan de l'énergie interne

Une hypothèse très courante pour la modélisation des milieux continus consiste à dire que pour des domaines de taille caractéristique h tels que $h_{\text{mic}} \ll h \ll h_{\text{mac}}$, le milieu est en équilibre thermodynamique. On peut donc définir une densité volumique d'énergie interne e_{int} telle que l'énergie interne totale d'un domaine $\mathcal{D}$ s'écrivent

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}}(\underline{x}, t) d^3x . \quad (2.22)$$

En l'absence de forces et de mouvement à l'échelle macroscopique, le premier principe de la thermodynamique s'énonce à travers l'équation de bilan qui spécifie, pour tout domaine $\mathcal{D}$, la relation

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}}(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x \quad (2.23)$$

où $q(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est le flux de chaleur, par unité de surface et de temps, sortant et $r(\underline{x}, t)$ l'apport de chaleur volumique par unité de volume et de temps. Comme l'apport de chaleur vérifie l'hypothèse du continu, le champ surfacique q est une fonction linéaire du vecteur unitaire $\underline{n}$ et on peut définir le vecteur flux de chaleur par la relation

$$q(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \quad (2.24)$$

On définit alors la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}$ par la relation

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t)] = \mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x . \quad (2.25)$$

On déduit, de ce bilan global, l'équation de bilan local

$$\frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} + \text{div } \underline{Q} = r , \quad (2.26)$$

que l'on nomme “équation de bilan de l'énergie interne”.

3.2 Loi de Fourier et loi d'état

La loi de Fourier est une loi de comportement pratiquement toujours utilisée pour décrire la diffusion de la chaleur dans tout type de milieu continu. Elle s'écrit

$$\underline{Q}(\underline{x}, t) = -k \text{ grad } T(\underline{x}, t) \quad (2.27)$$

où k est la “conductivité thermique”. Par exemple, la conductivité thermique est de l'ordre de $k = 0.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ dans l'eau de mer, plus de cent fois plus petite dans l'air et dix fois plus grande dans les métaux.

L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local que nous avons faite dans le cadre de l'hypothèse du continu permet de relier entre elles les grandeurs thermodynamiques par des lois d'état. À titre d'exemple, nous supposons que cette loi d'état est de la forme simple

$$e_{\text{int}} = \rho c T , \quad (2.28)$$

où ρ est la masse volumique, $T(\underline{x}, t)$ la température et c la “chaleur spécifique” ou “capacité thermique massique”. Cette loi d’état simplifiée est utilisée en choisissant la chaleur spécifique à volume constant $c = c_v$ ou à pression constante $c = c_p$ selon les cas. Ces coefficients valent par exemple $4\,000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l’eau et quatre à cinq fois moins pour l’air ou pour certains solides. On suppose ici que ρ et c sont constant.

L’équation de bilan de l’énergie interne conduit donc à “l’équation de la chaleur” qui s’écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{r}{\rho c} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{k}{\rho c}, \quad (2.29)$$

où κ est le coefficient de “diffusivité thermique”. Ce coefficient vaut par exemple $\kappa = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour l’eau de mer.

3.3 Conditions aux limites

On s’intéresse ici à l’évolution du champ de température, obéissant à l’équation de la chaleur avec κ constant, dans un domaine Ω . Pour résoudre ce problème de thermique il faut spécifier une condition initiale $T(\underline{x}, 0)$ si le problème est instationnaire et, surtout, des conditions aux limites.

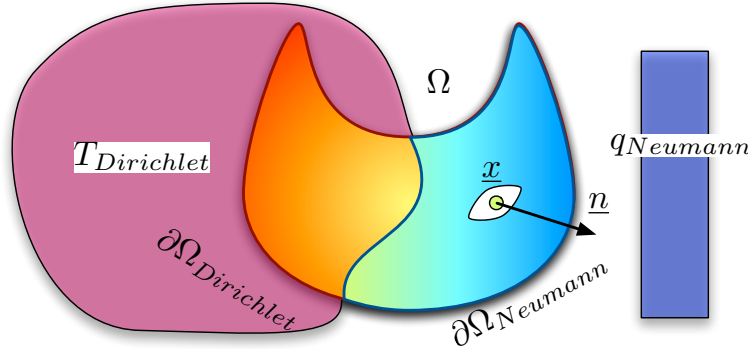


FIGURE 2.6 – Condition aux limites en température sur $\partial\Omega_{Dirichlet}$ et en flux sur $\partial\Omega_{Neumann}$.

Un premier type de conditions aux limites consiste à imposer le flux $q(\underline{x}, \underline{n}, t) = q_{Neumann}(\underline{x}, t)$ sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ que l’on notera $\partial\Omega_{Neumann}$. Comme $q = \underline{Q} \cdot \underline{n} = -k \text{ grad } T \cdot \underline{n}$, ces conditions aux limites s’écrivent

$$-k \text{ grad } T(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) = q_{Neumann}(\underline{x}, t), \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Neumann}. \quad (2.30)$$

Dans la mesure où cette condition aux limites fait intervenir la dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad } T \cdot \underline{n}$, on dit qu’il s’agit d’une condition aux limites de “Neumann”. Cette condition aux limites se rencontre en pratique s’il l’on injecte ou retire un flux de chaleur donné.

Un deuxième type de conditions aux limites consiste à imposer la température $T(\underline{x}, t) = T_{Dirichlet}(\underline{x}, t)$ sur de la frontière $\partial\Omega$ que l’on notera $\partial\Omega_{Dirichlet}$. Ces conditions aux limites s’écrivent

$$T(\underline{x}, t) = T_{Dirichlet}(\underline{x}, t), \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Dirichlet}. \quad (2.31)$$

Dans la mesure où cette condition aux limites fait intervenir la température T en non pas sa dérivée normale, on dit qu'il s'agit d'une condition aux limites de "Dirichlet". Cette condition aux limites se rencontre en pratique lorsque la frontière en question est plongée dans un bain thermostaté à forte inertie thermique ou en présence de régulation thermique.

En conclusion l'équation de la chaleur avec ses conditions aux limites s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(\underline{x}, t) &= \kappa \Delta T(\underline{x}, t) + \frac{r(\underline{x}, t)}{\rho c} && \text{pour } \underline{x} \in \Omega \\ \text{avec } -k \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) &= q_{\text{Neumann}}(\underline{x}, t) && \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{Neumann}} \\ \text{et } T(\underline{x}, t) &= T_{\text{Dirichlet}}(\underline{x}, t) && \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{Dirichlet}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

On remarque que si $\partial\Omega_{\text{Neumann}} = \partial\Omega$, c'est-à-dire si les conditions aux limites sont uniquement des conditions de flux, et si q_{Neumann} et r sont indépendant du temps, le problème n'admet de solution stationnaire que si la relation de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\iint_{\partial\Omega} q_{\text{Neumann}}(\underline{x}) dS = \iiint_{\Omega} r(\underline{x}) d^3x. \quad (2.33)$$

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

- 1) Est-ce que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D})$ vérifie l'hypothèse du continu ? Même question pour $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} dS$.
 $\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse du continu mais pas $\mathcal{S}$.
- 2) On suppose que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) + \iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = 0$ pour tout domaine $\mathcal{D}$ où $\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse du continu. En déduire que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = - \iint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{Q}_c(\underline{x}, t) d^3x$ où $\underline{Q}_c$ est un champ dont on justifiera l'existence.
 Comme $\iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS$ vérifie l'hypothèse du continu, il existe un champ $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ tel que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$. La formule de la divergence permet de conclure.
- 3) À $t = 0$, on injecte ponctuellement une quantité $C_{\text{tot}} = 1$ kg d'un colorant en $\underline{x} = \underline{0}$. On suppose qu'il diffuse dans l'espace avec un coefficient de diffusion $k_c = \frac{1}{4\pi} 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Calculer le temps t_* au bout duquel la concentration maximale $c_{\text{max}}(t_*)$ est inférieure à une tonne par mètre cube ?
 La concentration maximale est $c_{\text{max}}(t) = C_{\text{tot}} (4\pi k_c t)^{-3/2}$. Au temps $t = t_*$ on a $c_{\text{max}}(t_*) = 10^3 \text{ kg/m}^3$. On a donc $4\pi k_c t = [C_{\text{tot}}/c_{\text{max}}(t_*)]^{2/3} = 10^{-2} \text{ m}^2$ d'où $t = 10^6 \text{ s}$.
- 4) On chauffe une barre de longueur $l = 1 \text{ m}$ à un taux $r = 10^3 \text{ W/m}^3$. La diffusivité thermique est $\kappa = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\rho c = 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$. On suppose que $T = T_0 = 20^\circ \text{ C}$ en $x = 0$ et que le flux thermique est nul en $x = l$. Calculer le champ de température $T(x)$ dans le cas stationnaire (indépendant du temps). Calculer la température $T(l)$ en $x = l$.
 On $\kappa T''(x) + \frac{r}{\rho c} = 0$ avec $T(0) = T_0$ et $T'(l) = 0$, d'où $T'(x) = -\frac{r}{\rho c \kappa}(x - l)$ en utilisant la condition $T'(l) = 0$ et $T(x) = T_0 + \frac{r}{\rho c \kappa}(lx - x^2/2)$ en utilisant la condition $T(0) = T_0$. On en déduit $T(l) = T_0 + \frac{r l^2}{2 \rho c \kappa} = 22.5^\circ \text{ C}$.

NIVEAU II Fonte de la glace

Un milieu continu a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions $l_1 \times l_2 \times l_3 = 5\text{cm} \times 2\text{cm} \times 1\text{cm}$. On pose le parallélépipède couché sur une plaque chauffante du côté d'une face $l_1 \times l_2$. L'autre face est en contact avec un morceau de glace en m'arrangeant pour que l'eau de fonte soit évacuée loin du parallélépipède, et pour que les quatre autres faces soient thermiquement isolées. En maintenant la plaque à une température de 50°C , on fait fondre le morceau de glace en 1h. On tourne ensuite le parallélépipède en mettant en contact les faces $l_1 \times l_3$, et on recommence l'expérience avec la même quantité de glace. On suppose que les champs sont stationnaires (indépendant du temps) pendant les expériences.

1) Exprimer le champ de température pour les deux expériences.

En choisissant le repère de sorte que $z = 0$ soit l'équation de la plaque chaude, on a $T(z) = T_{50} - \frac{T_{50}-T_0}{l_3} z$ pour la première expérience et $T(z) = T_{50} - \frac{T_{50}-T_0}{l_2} z$ pour la seconde.

2) En combien de temps la glace a-t-elle fondu ?

Si T_{50} et T_0 sont les deux températures de plaque, le flux de chaleur de la plaque vers la glace est $Q_a = k \frac{T_{50}-T_0}{l_3}$ pour la première expérience et $Q_b = k \frac{T_{50}-T_0}{l_2}$ pour la deuxième. Comme les surfaces de contact sont respectivement $S_a = l_1 l_2$ et $S_b = l_1 l_3$, les flux de chaleur sortants allant du parallélépipède vers la glace sont $q_a = Q_a S_a$ et $q_b = Q_b S_b$. En appliquant la $\frac{d}{dt} [\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t)] = \mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t)$ où $\mathcal{D}$ est le volume occupé par la glace, on obtient $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) + q_a t$ et $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) + q_b t$ dans la mesure où les puissances thermiques respectives $\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = q_a$ et $\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = q_b$ ne dépendent pas du temps. En notant $\Delta E = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, T_a) - \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, T_b) - \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0)$ l'énergie nécessaire pour faire fondre la glace, en déduit $q_a T_a = q_b T_b$ où T_a et T_b sont les temps de fonte respectifs des deux expériences. On en déduit $q_a = k (T_{50} - T_0) \frac{l_1 l_2}{l_3}$ et $q_b = k (T_{50} - T_0) \frac{l_1 l_3}{l_2}$. Comme le rapport de ces puissances est $(l_3/l_2)^2 = 1/4$, on conclut que le temps de fonte est 4 fois plus grand lors de la seconde expérience, et donc égal à 4h.

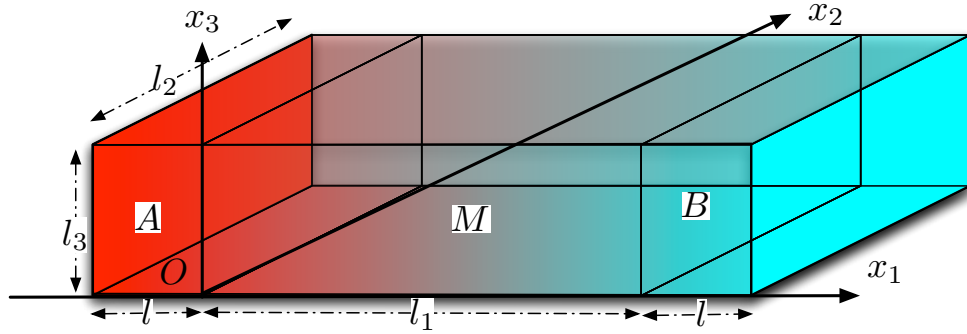
NIVEAU III Expérience thermostatée

On considère une pièce M de côtés $l_1 = 1.5\text{ m}$, $l_2 = 1\text{ m}$ et $l_3 = 0.5\text{ m}$, encastrée entre deux pièces A et B de largeur $l = 0.4\text{ m}$ (figure 2.7) constituées d'un matériau différent. On suppose que l'on peut maintenir à température constante certaines faces de ces pièces tandis que les autres faces sont thermiquement isolées.

Dans un premier temps, on considère la pièce M seule, en l'absence des pièces A et B . On maintient une des surfaces M normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25^\circ\text{C}$, l'autre à température $T_B = 15^\circ\text{C}$. En mesurant les flux de chaleur qu'il faut fournir aux bains thermostatés, on constate que le dispositif consomme 10 Watts.

1) Calculer le coefficient de conductivité thermique k_M du matériau de la pièce M .

Le gradient de température est $\Gamma_1 = (T_B - T_A)/l_1 = -6.6\text{ K.m}^{-1}$. En notant $P = 10\text{ W}$ la puissance, le flux de chaleur dans la direction $\underline{e}_1$ est $Q_1 = -P/(l_2 l_3) = 20\text{ W.m}^{-2}$, d'où $k_M = -Q_1/\Gamma_1 = 3\text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

FIGURE 2.7 – Pièces M , A et B conductrices de chaleur.

- 2) On recommence la même expérience avec la pièce A ou B seule, et on mesure une puissance de 120 W. Calculer le coefficient de conductivité thermique k du matériau des pièces A et B .

En notant $P' = 120$ W la nouvelle puissance mesurée, on a maintenant $\Gamma_1 = (T_B - T_A)/l = 25 \text{ K.m}^{-1}$ et $Q_1 = -P'/(l_2 l_3) = 240 \text{ W.m}^{-1}$, d'où $k = 9.6 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

- 3) On considère le montage encastré pour lequel on maintient la température de la face externe de A normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25^\circ\text{C}$ et celle de B à la température $T_B = 15^\circ\text{C}$. Calculer la répartition de température $T(\underline{x})$ en tout point $\underline{x}$ du montage et indiquer les températures aux interfaces des pièces.

La température ne dépend que de x_1 . Le profil est linéaire par morceaux car le flux de chaleur Q_1 est constant. Il varie de T_A à T'_A dans la pièce A avec un gradient $\Gamma = -Q_1/k$, de T'_A à T'_B dans la pièce M avec un gradient $\Gamma_M = -Q_1/k_M$ et de T'_B à T_B dans la pièce B avec le gradient Γ . En éliminant Q_1 entre les relations $\frac{T'_A - T_A}{l} = -\frac{Q_1}{k}$, $\frac{T'_B - T'_A}{l_1} = -\frac{Q_1}{k_M}$ et $\frac{T_B - T'_B}{l} = -\frac{Q_1}{k}$, on obtient $T'_A = T_A + (T_B + T_A) \left(\frac{k_M l}{k l_1} \right) \left(1 + 2 \frac{k_M l}{k l_1} \right)^{-1} = 24.3^\circ\text{C}$ et $T'_B = 15.7^\circ\text{C}$.

- 4) En déduire le vecteur flux de chaleur $\underline{Q}(\underline{x})$. Calculer la puissance P que consomme ce dispositif.

On en déduit $Q_1 = -(T_B - T_A) \frac{k_M}{l_1} \left(1 + 2 \frac{k_M l}{k l_1} \right)^{-1} = -17 \text{ W.m}^{-2}$. La puissance consommée est donc $P'' = -Q_1 l_2 l_3 = 8.5 \text{ W}$. Malgré la largeur des pièces A et B , le montage conduit à peine plus de chaleur.

- 5) Calculer le coefficient de conductivité thermique équivalent pour le montage multi-pièces et comparer le avec ceux de chacune des pièces. Commenter à l'aide d'une analogie électrique.

On peut écrire $Q_1 = -k_{\text{eq}} \frac{T_A - T_B}{l_1 + 2l}$ avec $k_{\text{eq}} = (l_1 + 2l) / \left(\frac{l_1}{k_M} + \frac{2l}{k} \right) = 3.9 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. On obtient une analogie électrique en comparant l'inverse des coefficients de conductivité thermique à des résistances linéiques, le flux de chaleur au courant et la différence de température à la différence de potentiel.

Chapitre 3

Petites déformations

Sommaire

1	Déformations quelconques	36
1.1	Transport d'un petit vecteur	36
1.2	Tenseur des dilatations	37
1.3	Représentations lagrangienne et eulérienne	38
2	Longueurs, angles et volumes	38
2.1	Dilatations relative des longueurs	38
2.2	Glissement des angles	39
2.3	Transport des volumes	39
3	Hypothèse des petites perturbations	40
3.1	Tenseur des petites déformations	40
3.2	Allongements et autres petites variations	41
3.3	Hypothèse des champs peu déformés	42

Introduction

Avant d'aborder les lois de comportement de la mécanique des milieux continus qui relient les efforts aux déformations, il faut se doter des outils mathématiques permettant de décrire ces dernières. Dans la mesure où les lois de comportement font intervenir les déformations locales des petits domaines, on s'intéresse au transport de petits vecteurs par ces déformations. On étudie donc ici la variation des longueurs et des angles de ces petits vecteurs ainsi que celle des petits volumes. Pour préparer l'élasticité linéaire, on s'intéresse au cas des petites perturbations combinant l'hypothèse des petites déformations et des champs peu déformés.

1 Déformations quelconques

Une déformation est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Sa jacobienne transporte les petits vecteurs dont le produit scalaire dans l'espace déformé est décrit par le “tenseur des dilatations”. On définit ici les notions de représentations eulérienne et lagrangienne des champs.

1.1 Transport d'un petit vecteur

On considère un espace affine d'origine O muni d'une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et on note $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$ et $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ deux vecteurs quelconques. On identifie ainsi l'espace affine avec $\mathbb{R}^3$ en confondant ses points avec les vecteurs ou les composantes permettant de les repérer. On appelle “configuration de référence” un domaine Ω_0 de $\mathbb{R}^3$. Une déformation $\underline{X}$ est une application différentiable de Ω_0 dans $\mathbb{R}^3$ que l'on note

$$\begin{aligned} \underline{X} : \quad \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{a} &\longmapsto \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

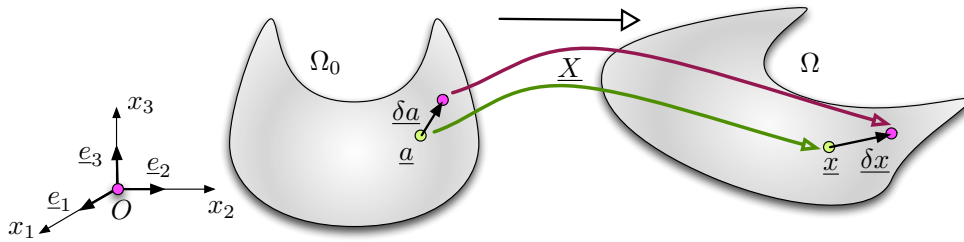


FIGURE 3.1 – Déformation quelconque $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$.

On appelle “configuration déformée” que l'on note $\Omega = \underline{X}(\Omega_0)$ l'image de Ω_0 par $\underline{X}$. On note $\underline{F}(\underline{a})$ la jacobienne de $\underline{X}$ en $\underline{a}$ dont les composantes sont

$$F_{ij}(\underline{a}) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}) . \quad (3.2)$$

Étant donné un petit vecteur $\underline{\delta a}$, on peut effectuer le développement limité

$$\underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}) = \underline{X}(\underline{a}) + \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a} + O(\delta a^2) , \quad (3.3)$$

où $\delta a = \|\underline{\delta a}\|$ est la norme de $\underline{\delta a}$. Si on note $\underline{\delta x} = \underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}) - \underline{X}(\underline{a})$ l'image du petit vecteur $\underline{\delta a}$ et si l'on considère que $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}$ sont des vecteurs "infinitésimaux", on peut écrire

$$\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta x_i = F_{ij}(\underline{a}) \delta a_j , \quad (3.4)$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein.

1.2 Tenseur des dilatations

On considère deux petits vecteurs $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a'}$ pris autour de $\underline{a}$ et on note $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x'}$ leurs images autour de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ vérifiant donc

$$\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a} \quad \text{et} \quad \underline{\delta x'} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a'} . \quad (3.5)$$

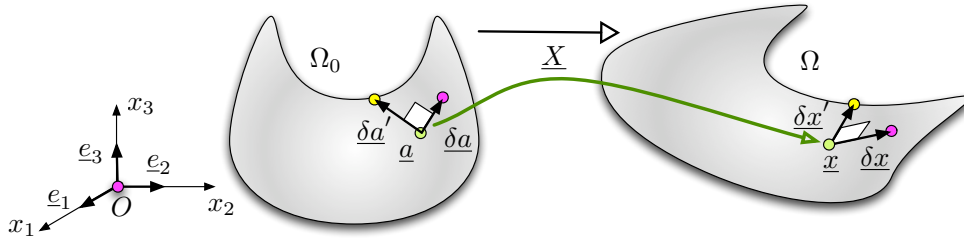


FIGURE 3.2 – Transport des petits vecteurs $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a'}$ par $\underline{F}(\underline{a})$.

On considère la fonction $\mathcal{C}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'})$ qui associe aux petits vecteurs $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a'}$ pris autour de $\underline{a}$ le produit scalaire de leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x'}$, ce qui s'écrit

$$\mathcal{C}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'}) = \underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x'} = {}^t \underline{\delta x} \underline{\delta x'} = \delta x_i \delta x'_i . \quad (3.6)$$

En remplaçant $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x'}$ en fonction de $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a'}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'}) &= [\underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}] \cdot [\underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a'}] = {}^t [\underline{F}(\underline{a}) \underline{\delta a}] [\underline{F}(\underline{a}) \underline{\delta a'}] \\ &= {}^t \underline{\delta a} {}^t \underline{F}(\underline{a}) \underline{F}(\underline{a}) \underline{\delta a'} = \underline{\delta a} \cdot {}^t \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a'} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

On définit alors le tenseur des dilatations par la relation

$$\underline{\underline{C}}(\underline{a}) = {}^t \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{F}(\underline{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad C_{ij}(\underline{a}) = C_{ji}(\underline{a}) = F_{in}(\underline{a}) F_{jn}(\underline{a}) . \quad (3.8)$$

Le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ est symétrique et permet d'écrire

$$\mathcal{C}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'}) = \underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x'} = \underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a'} . \quad (3.9)$$

1.3 Représentations lagrangienne et eulérienne

On suppose que l'application $\underline{X}$ est inversible et on note $\underline{A}$ son inverse :

$$\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}) . \quad (3.10)$$

On appelle “représentation eulérienne” du champ B la fonction $B^{(E)}(\underline{x})$ qui associe à tout point $\underline{x}$ de la configuration déformée Ω la valeur du champ. On appelle “représentation lagrangienne” de B la fonction $B^{(L)}(\underline{a})$ qui associe à tout point $\underline{a}$ de la configuration de référence Ω_0 la valeur du champ dans la configuration déformée, vérifiant donc les relations

$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] \quad \Longleftrightarrow \quad B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x})] = B^{(E)}(\underline{x}) . \quad (3.11)$$

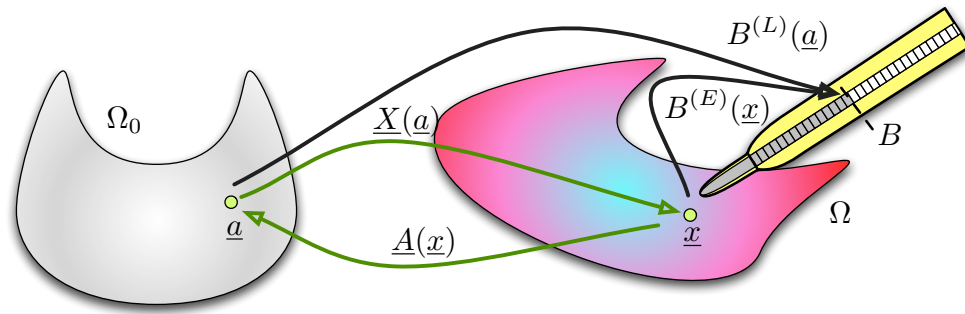


FIGURE 3.3 – Représentations lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a})$ et eulérienne $B^{(E)}(\underline{x})$ du champ B pour la déformation $\underline{X}$.

En notant Id l'identité, $^{-1}$ l'inversion et $\circ$ la composition entre fonctions, on peut écrire $\underline{A} \circ \underline{X} = Id$, $\underline{X} \circ \underline{A} = Id$, $\underline{A} = \underline{X}^{-1}$, $\underline{X} = \underline{A}^{-1}$, $B^{(L)} = B^{(E)} \circ \underline{X}$ et $B^{(E)} = B^{(L)} \circ \underline{A}$. On peut aussi résumer le passage entre les représentations eulérienne et lagrangienne par la relation

$$B^{(E)}(\underline{x}) = B^{(L)}(\underline{a}) \quad \text{ssi} \quad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) \Longleftrightarrow \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}) . \quad (3.12)$$

2 Longueurs, angles et volumes

Le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ permet de calculer la dilatation des longueurs, le glissement des angles et la variation des volumes par la déformation $\underline{X}$ pour les petits vecteurs pris dans le voisinage d'un point $\underline{a}$.

2.1 Dilatations relative des longueurs

Étant donné un petit vecteur $\underline{\delta a}$ dans le voisinage de $\underline{a}$ (voir figure 3.4) d'image $\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}$ dans le voisinage de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$, la dilatation relative des longueurs Λ est définie par

$$\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \frac{\|\underline{\delta x}\|}{\|\underline{\delta a}\|} = \sqrt{\frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}{\underline{\delta a} \cdot \underline{\delta a}}} = \sqrt{\frac{\delta a_i C_{ij}(\underline{a}) \delta a_j}{\delta a_n \delta a_n}} . \quad (3.13)$$

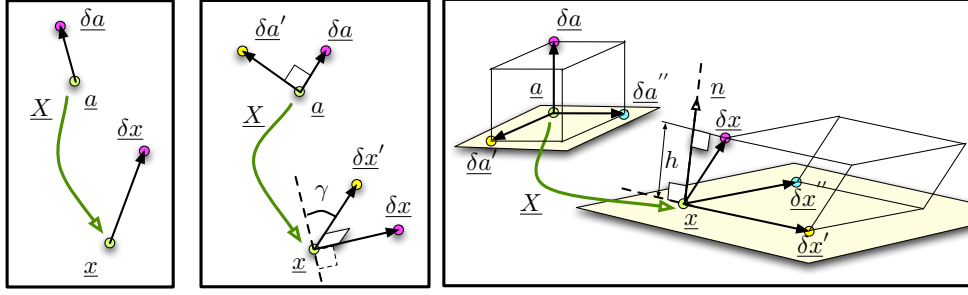


FIGURE 3.4 – Transport de petits vecteurs et variations des longueurs, des angles et des volumes.

On remarque que la fonction $\Lambda(\underline{a}; \delta \underline{a})$ ne dépend pas de la norme du petit vecteur $\delta \underline{a}$ mais uniquement de sa direction. Dans le cas particulier $\delta \underline{a} = \delta a \underline{e}_1$, on a

$$\Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1) = \sqrt{\underline{e}_1 \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{e}_1} = \sqrt{C_{11}}. \quad (3.14)$$

Les dilatations $\Lambda_1 = \Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1)$, $\Lambda_2 = \Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}_2)$ et $\Lambda_3 = \Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}_3)$ dans les directions de la base canonique sont reliées aux coefficients diagonaux de $\underline{C}(\underline{a})$ par $\Lambda_1 = \sqrt{C_{11}}$, $\Lambda_2 = \sqrt{C_{22}}$ et $\Lambda_3 = \sqrt{C_{33}}$.

2.2 Glissement des angles

On considère deux petits vecteurs *orthogonaux* $\delta \underline{a}$ et $\delta \underline{a}'$ (voir figure 3.4), vérifiant donc $\delta \underline{a} \cdot \delta \underline{a}' = 0$, dans le voisinage $\underline{a}$. On note $\theta(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}')$ l'angle orienté de leurs images $\delta \underline{x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}$ et $\delta \underline{x}' = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}'$. On appelle “angle de glissement” du couple $(\delta \underline{a}, \delta \underline{a}')$ le complémentaire $\gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}') = \pi/2 - \theta(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}')$. En utilisant la relation $\delta \underline{x} \cdot \delta \underline{x}' = \delta \underline{a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}'$, on peut écrire

$$\sin \gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}') = \frac{\delta \underline{x} \cdot \delta \underline{x}'}{\|\delta \underline{x}\| \|\delta \underline{x}'\|} = \frac{\delta \underline{a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}'}{\sqrt{\delta \underline{a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}} \sqrt{\delta \underline{a}' \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}'}}. \quad (3.15)$$

On remarque que l'angle de glissement ne dépend pas du module des deux petits vecteurs orthogonaux $\delta \underline{a}$ et $\delta \underline{a}'$. Dans le cas particulier $\delta \underline{a} = \delta a \underline{e}_1$ et $\delta \underline{a}' = \delta a' \underline{e}_2$, l'angle de glissement $\gamma_{12} = \gamma(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1, \delta a' \underline{e}_2)$ vérifie donc

$$\sin \gamma_{12} = \frac{\underline{e}_1 \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{e}_2}{\sqrt{\underline{e}_1 \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{e}_1} \sqrt{\underline{e}_2 \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{e}_2}} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}}. \quad (3.16)$$

Les coefficients non diagonaux du tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ renseignent donc sur les angles de glissement des couples de directions de la base canonique. Par exemple, si $\underline{C}(\underline{a})$ est une matrice diagonale, l'image de la base canonique orthonormée est orthogonale.

2.3 Transport des volumes

Si $\delta \underline{x}$, $\delta \underline{x}'$ et $\delta \underline{x}''$ sont trois petits vecteurs engendrant un repère direct, le volume $\delta \mathcal{V}$ du petit parallélépipède qu'ils engendrent (voir figure 3.4) est égal à leur produit mixte

$$\delta \mathcal{V} = (\delta \underline{x}, \delta \underline{x}', \delta \underline{x}'') = \delta \underline{x} \cdot (\delta \underline{x}' \wedge \delta \underline{x}'') = \epsilon_{ijk} \delta x_i \delta x'_j \delta x''_k, \quad (3.17)$$

où ϵ_{ijk} est le pseudo-tenseur fondamental alterné. En effet, le produit vectoriel $\delta \mathcal{A} \underline{n} = \delta \underline{x}' \wedge \delta \underline{x}''$ de composantes $\delta \mathcal{A} n_i = \epsilon_{ijk} \delta x'_j \delta x''_k$ a pour module l'aire δA du parallélogramme engendré par $\delta \underline{x}'$ et $\delta \underline{x}''$ et pour direction la normale orientée $\underline{n}$ au plan qu'ils engendrent. Le produit scalaire $\delta \mathcal{V} = \delta \mathcal{A} \underline{n} \cdot \delta \underline{x} = \delta \mathcal{A} h$, où h est la hauteur du parallélépipède, est bien égal à son volume.

Si $\delta \underline{x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a} \underline{e}_1$, $\delta \underline{x}' = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a} \underline{e}_2$ et $\delta \underline{x}'' = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a} \underline{e}_3$ sont maintenant les images des trois petits vecteurs $\delta \underline{a} = \delta \underline{a} \underline{e}_1$, $\delta \underline{a}' = \delta \underline{a} \underline{e}_2$ et $\delta \underline{a}'' = \delta \underline{a} \underline{e}_3$ qui engendrent le cube de volume $\delta \mathcal{V}_0 = (\delta \underline{a}, \delta \underline{a}', \delta \underline{a}'') = \delta^3 a$, on peut écrire

$$\delta \mathcal{V} = (\delta \underline{x}, \delta \underline{x}', \delta \underline{x}'') = \delta a^3 (\underline{F} \cdot \underline{e}_1, \underline{F} \cdot \underline{e}_2, \underline{F} \cdot \underline{e}_3) = \delta \mathcal{V}_0 \det \underline{F}. \quad (3.18)$$

Cette relation se généralise à un petit volume quelconque $\delta \mathcal{V}_0$ du voisinage de $\underline{a}$ dont l'image est $\delta \mathcal{V}$ dans le voisinage de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$. En effet, il suffit de recouvrir le volume $\delta \mathcal{V}_0$ par des cubes infiniment petits et de confondre la valeur de $\underline{F}$ en leurs centres avec la valeur de $\underline{F}(\underline{a})$ en $\underline{a}$. En notant $J(\underline{a}) = |\det \underline{F}(\underline{a})| = \det \underline{F}(\underline{a})$ (repère direct) le Jacobien de $\underline{X}$ en $\underline{a}$, on peut écrire

$$\delta \mathcal{V} = J(\underline{a}) \delta \mathcal{V}_0 = \sqrt{\det \underline{C}(\underline{a})} \delta \mathcal{V}_0. \quad (3.19)$$

Le Jacobien de $\underline{X}$, qui est le déterminant de la Jacobienne $\underline{F}$ mais aussi la racine carrée du déterminant du tenseur des dilatations $\underline{C}$, exprime la dilatation des petits volumes. Par exemple, si $\underline{C}(\underline{a})$ est une matrice diagonale, la dilatation relative des volumes est égale à $J(\underline{a}) = \sqrt{C_{11} C_{22} C_{33}}$.

3 Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites déformations est formulée en supposant que le tenseur des dilatations reste proche de l'identité. Le tenseur des petites déformations, qui en mesure l'écart, permet de décrire les variations de longueurs, d'angles et de volume. L'hypothèse des petites perturbations s'obtient en ajoutant l'hypothèse des champs peu déformés.

3.1 Tenseur des petites déformations

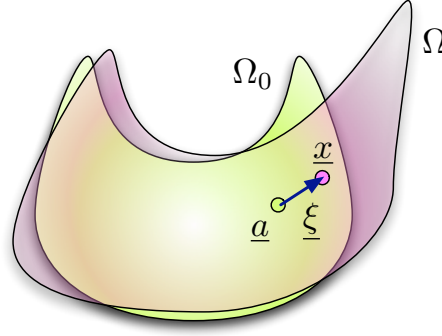
Pour pouvoir dire que la déformation $\underline{X}$ est petite, on commence par effectuer le changement de variable

$$\underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a}) \implies \underline{F}(\underline{a}) = \underline{I} + \underline{H}(\underline{a}) \quad \text{avec} \quad H_{ij}(\underline{a}) = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}). \quad (3.20)$$

Le champ $\underline{\xi}(\underline{a})$ est appelé le “champ de déplacement” dans la mesure où il relie le point $\underline{a}$ à son image $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$.

L'hypothèse des “petites déformations” consiste à dire que les composantes de la jacobienne $\underline{H}$ du champ de déplacement $\underline{\xi}$ sont d'ordre η avec $\eta \ll 1$. On va donc pouvoir effectuer des développements limités à l'aide du petit paramètre η . On pourra par exemple effectuer le développement limité à l'ordre un du tenseur des dilatations sous la forme

$$\underline{C} = {}^t \underline{F} \cdot \underline{F} = \underline{I} + \underline{H} + {}^t \underline{H} + {}^t \underline{H} \cdot \underline{H} = \underline{I} + 2 \underline{\epsilon} + O(\eta^2), \quad (3.21)$$

FIGURE 3.5 – Déformation $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a})$ et champ de déplacement $\underline{\xi}$.

où $\underline{\epsilon}$ est le “tenseur des petites déformations” défini par

$$\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \frac{1}{2} [\underline{H}(\underline{a}) + {}^t \underline{H}(\underline{a})] \iff \epsilon_{ij}(\underline{a}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}) + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i}(\underline{a}) \right]. \quad (3.22)$$

3.2 Allongements et autres petites variations

On considère trois petits vecteurs $\underline{\delta a}$, $\underline{\delta a}'$ et $\underline{\delta a}''$ pris autour de $\underline{a}$ et on note $\underline{\delta x}$, $\underline{\delta x}'$ et $\underline{\delta x}''$ leurs images respectives, autour de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$, par la déformation $\underline{X}$ supposée vérifier l’hypothèse des petites déformations. On souhaite exprimer la variation des longueurs, des angles et des volumes en utilisant le développement limité $\underline{C} = \underline{I} + 2 \underline{\epsilon} + O(\eta^2)$.

On définit l’allongement relatif $\Delta(\underline{a}; \underline{\delta a})$, que l’on relie à la dilatation relative $\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a})$ par la relation

$$\Delta(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) - 1 = \sqrt{\frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}{\underline{\delta a} \cdot \underline{\delta a}}} - 1. \quad (3.23)$$

Le développement limité $\underline{\delta a} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\delta a} = \underline{\delta a}^2 + 2 \underline{\delta a} \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{\delta a} + O(\eta^2)$ conduit à

$$\Delta(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\epsilon}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}{\underline{\delta a}^2} + O(\eta^2). \quad (3.24)$$

Comme pour la dilatation, l’allongement ne dépend pas de la norme de $\underline{\delta a}$. Les composantes diagonales de $\underline{\epsilon}$ représentent respectivement, à l’ordre dominant en η , les allongements $\Delta_1 = \epsilon_{11}$, $\Delta_2 = \epsilon_{22}$ et $\Delta_3 = \epsilon_{33}$, dans les directions de la base canonique.

L’expression (3.15) de l’angle de glissement $\gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}')$ des petits vecteurs orthogonaux $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a}'$ montre qu’il est d’ordre un en η . On peut donc approximer l’angle par son sinus et écrire, en utilisant le développement limité de $\underline{C}$ dans l’expression

$$\begin{aligned} \gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') &= \arcsin \left[\frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}'}{\sqrt{\underline{\delta a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}} \sqrt{\underline{\delta a}' \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}'}} \right] \\ &= 2 \frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{\delta a}'}{\|\underline{\delta a}\| \|\underline{\delta a}'\|} + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les angles de glissement dans les directions de la base canonique sont donc égaux au double des composante non diagonales de $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$, comme par exemple $\gamma_{23} = 2 \epsilon_{23}$.

Si $\delta \underline{a} = \delta a \underline{e}_1$, $\delta \underline{a}' = \delta a \underline{e}_2$ et $\delta \underline{a}'' = \delta a \underline{e}_3$ le volume du parallélépipède engendré par leurs images vérifie

$$\delta \mathcal{V} = \delta a^3 (\underline{e}_1 + \underline{H} \underline{e}_1, \underline{e}_2 + \underline{H} \underline{e}_2, \underline{e}_3 + \underline{H} \underline{e}_3) = \delta a^3 (1 + \text{tr } \underline{H}) + O(\eta^2) . \quad (3.26)$$

Comme $\text{tr } \underline{H} = \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$, on peut donc exprimer, grâce à la méthode du recouvrement par des petits cubes, la dilatation relative d'un volume quelconque $\delta \mathcal{V}_0$ autour de $\underline{a}$ transformé en un volume $\delta \mathcal{V}$ par la relation

$$\frac{\delta \mathcal{V} - \delta \mathcal{V}_0}{\delta \mathcal{V}_0} = \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) + O(\eta^2) . \quad (3.27)$$

On a incidemment démontré $\sqrt{\det(\underline{I} + 2 \underline{\underline{\epsilon}})} = 1 + \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} + O(\eta^2)$.

3.3 Hypothèse des champs peu déformés

L'hypothèse des petites déformations entraîne une petite déformation des champs scalaires, de vecteurs ou de tenseurs si l'échelle de variation de ces champs est grande devant la taille des déplacements. Il faut pour cela être capable de définir cette échelle de variation.

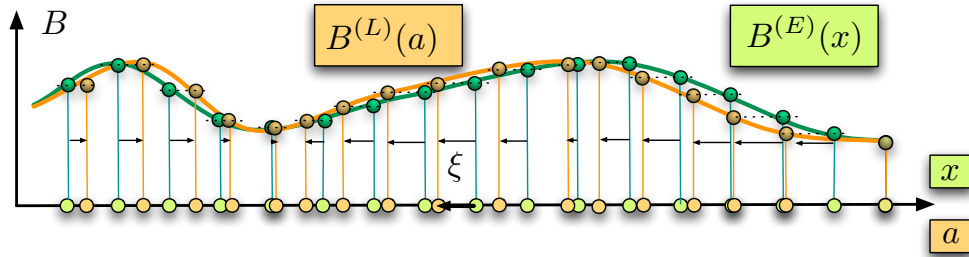


FIGURE 3.6 – Champ B peu déformé et approximation $B^{(E)} \sim B^{(L)}$.

On formule ici l'hypothèse des champs peu déformés sur un champ scalaire, sa généralisation au cas des champs de vecteurs ou de tenseurs étant immédiate.

Étant donné un champ scalaire B dont la représentation eulérienne est $B^{(E)}(\underline{x})$, on suppose que l'on sait mesurer l'ordre de grandeur B_0 de sa valeur absolue $|B^{(E)}(\underline{x})|$. On dira que le champ B est peu déformé par le champ de déplacement $\underline{\xi}$ si l'on peut écrire

$$\underline{\xi}(\underline{a}) \cdot \underline{\text{grad}} B^{(E)}(\underline{a}) / B_0 = O(\eta) . \quad (3.28)$$

Sous cette hypothèse de champ peu déformé, on peut écrire

$$\begin{aligned} B^{(L)}(\underline{a}) &= B^{(E)}[\underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a})] = B^{(E)}(\underline{a}) + \underline{\xi} \cdot \underline{\text{grad}} B^{(E)}(\underline{a}) + O(\eta^2) \\ &= B^{(E)}(\underline{a}) + O(\eta) . \end{aligned} \quad (3.29)$$

On voit alors que l'on peut confondre les représentations eulérienne et lagrangienne du champ B sous cette hypothèse. Il en va de même pour les champs de vecteurs ou de tenseurs peu déformés.

Lorsque l'on combine les hypothèses de petites déformations et de champs peu déformés pour les grandeurs mécaniques d'intérêts, on parle d'hypothèse des "petites perturbations".

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

On considère la déformation définie par $\underline{X} = k a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + (a_3 + \beta a_1^2) \underline{e}_3$.

- 1) Calculer $\underline{F}(\underline{a})$. En déduire l'image du petit vecteur $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}_1$ autour du point $\underline{a} = \frac{1}{2} l (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$.

On a $\underline{F}(\underline{a}) = \underline{I} + (k-1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 2\beta a_1 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1$. L'image de $\underline{\delta a}$ est $\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a} = \delta a (k \underline{e}_1 + 2\beta a_1 \underline{e}_3)$.

- 2) Calculer $\underline{C}(\underline{a})$. Interpréter les composantes de ce tenseur. En déduire le produit scalaire $\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x'}$ où $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x'}$ sont les images respectives de $\underline{\delta a}$ = $\delta a \underline{e}_1$ et $\underline{\delta a'} = \delta a \underline{e}_3$ autour de $\underline{a} = \frac{1}{2} l (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$.

On a $C_{11} = k^2 + 4\beta^2 a_1^2 = k^2 + \beta^2 l^2$, $C_{22} = C_{33} = 1$, $C_{13} = C_{31} = 2\beta a_1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. Les dilations dans les directions de la base canonique sont $\Lambda_1 = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{k^2 + \beta^2 l^2}$, $\Lambda_2 = \sqrt{C_{22}} = 1$ et $\Lambda_3 = \sqrt{C_{33}} = 1$. Les angles de glissement des directions de la base canonique vérifient $\sin \gamma_{23} = C_{23}/\sqrt{C_{11} C_{22}} = 0$, $\sin \gamma_{31} = C_{13}/\sqrt{C_{11} C_{33}} = 2\beta a_1/\sqrt{k^2 + \beta^2 l^2}$ et $\sin \gamma_{12} = C_{12}/\sqrt{C_{11} C_{33}} = 0$. On a $\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x'} = \underline{\delta a} \cdot \underline{C}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a'} = \delta a^2 C_{13} = \delta a^2 (2\beta a_1) = \beta l \delta a^2$.

- 3) Calculer $\underline{A}$, la déformation inverse de $\underline{X}$. Calculer $\underline{B}^{(E)}(\underline{x})$ pour $\underline{B}^{(L)}(\underline{a}) = \gamma a_1 a_3$.

On a $\underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{k} x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + (x_3 - \beta x_1^2/k^2) \underline{e}_3$ et $\underline{B}^{(E)}(\underline{x}) = \gamma (x_1/k) (x_3 - \beta x_1^2/k^2)$.

- 4) Calculer la dilatation relative $\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a})$ et l'angle de glissement $\gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'})$ pour $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}_1$ et $\underline{\delta a'} = \delta a \underline{e}_3$ autour du point $\underline{a} = \frac{1}{2} l (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ dans le cas d'une grande déformation telle que $k = 2$ et $\beta = 2/l$. Calculer la dilatation relative $\delta\mathcal{V}/\delta\mathcal{V}_0$ d'un petit volume pris autour de $\underline{a}$. Comparer avec $J(\underline{a})$.

On a $\Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{k^2 + 4\beta a_1^2} = 2\sqrt{2}$. Comme $\sin \gamma(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1, \delta a' \underline{e}_3) = C_{13}/\sqrt{C_{11} C_{33}} = 1/\sqrt{2}$, on a $\gamma_{13} = \pi/4$. On a $\delta\mathcal{V}/\delta\mathcal{V}_0 = \sqrt{\det[\underline{C}(\underline{a})]} = k = 2$. On a bien $J(\underline{a}) = \det \underline{F}(\underline{a}) = k = 2$.

- 5) On suppose maintenant que $\Delta_1 = k - 1$ et βl sont des petits paramètres d'ordre $\eta \ll 1$. Calculer $\underline{\epsilon}(\underline{a})$. Interpréter les composantes de ce tenseur. Calculer, à l'ordre dominant en η , l'allongement relatif $\Delta(\underline{a}; \underline{\delta a})$ et l'angle de glissement $\gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a'})$ pour $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}_1$ et $\underline{\delta a'} = \delta a \underline{e}_3$ autour du point $\underline{a} = \frac{1}{2} l (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ avec $k = 1.01$ et $\beta = 0.02/l$. Calculer la dilatation relative $(\delta\mathcal{V} - \delta\mathcal{V}_0)/\delta\mathcal{V}_0$ d'un petit volume pris autour de $\underline{a}$. Comparer avec $J(\underline{a})$.

On a $\epsilon_{11} = \Delta_1$, $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \beta a_1$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. Les allongements dans les directions de la base canonique sont $\Delta_1 = \epsilon_{11}$, $\Delta_2 = \epsilon_{22} = 0$ et $\Delta_3 = \epsilon_{33} = 0$. Les angles de glissements des directions de la base canonique sont $\gamma_{23} = 2\epsilon_{23} = 0$, $\gamma_{31} = 2\epsilon_{31} = 2\beta a_1$ et $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = 0$. On a $\Delta(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1) = \epsilon_{11} = \Delta_1$, $\Delta(\underline{a}; \delta a \underline{e}_3) = \epsilon_{33} = 0$, $\gamma(\underline{a}; \delta a \underline{e}_1, \delta a \underline{e}_3) = 2\epsilon_{13} = 2\beta a_1$ et $(\delta\mathcal{V} - \delta\mathcal{V}_0)/\delta\mathcal{V}_0 = \text{tr } \underline{\epsilon} = \Delta_1 = k - 1$.

NIVEAU II Étirement uniaxial

On considère un parallélépipède rectangle dont les côtés sont de longueurs l_1 , l_2 et l_3 . On suppose sa densité est ρ_0 . On choisit les axes orthonormés Oa_1 , Oa_2 et Oa_3 parallèles aux arêtes. On effectue une expérience de traction sur le solide en appliquant des forces de contact à sa surface. On suppose que la déformation $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ s'écrit $x_1 = a_1 + \Delta_1 a_1$, $x_2 = a_2 - \nu \Delta_1 a_2$ et $x_3 = a_3 - \nu \Delta_1 a_3$.

- 1) Lors de cette expérience, on mesure le champ de température dont la représentation eulérienne est $T^{(E)}(\underline{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Calculer sa représentation lagrangienne $T^{(L)}(\underline{a})$.

Il suffit de remplacer les coordonnées x_1 , x_2 et x_3 de $\underline{x}$ par leurs expressions en fonction des coordonnées de a_1 , a_2 et a_3 de $\underline{a}$. On a $T^{(L)}(\underline{a}) = \alpha_1 (1 + \Delta_1) a_1 + \alpha_2 (1 - \nu \Delta_1) a_2 + \alpha_3 (1 - \nu \Delta_1) a_3$.

- 2) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ et interpréter ses composantes.

$C_{11} = (1 + \Delta_1)^2$, $C_{22} = (1 - \nu \Delta_1)^2$, $C_{33} = (1 - \nu \Delta_1)^2$ et $C_{ij} = 0$ sinon. Les dilatations relatives pour les fibres orientées dans la directions des axes de la base canonique sont respectivement égales à $1 + \Delta_1$, $1 - \nu \Delta_1$ et $1 - \nu \Delta_1$. Tous les angles de glissement sont nuls.

- 3) Effectuer le développement limité de $\underline{C}$ dans le cas $\Delta_1 \ll 1$. Comparer avec l'expression du tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}$.

On remarque que $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + \underline{O}(\Delta_1^2)$ avec $\underline{\epsilon}$ de composantes $\epsilon_{11} = \Delta_1$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \Delta_1$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon.

- 4) On suppose maintenant que l'on connaît la représentation lagrangienne $T^{(L)}(\underline{a}) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$. En déduire sa représentation eulérienne $T^{(E)}(\underline{x})$. Montrer que l'on peut confondre les deux représentations sous l'hypothèse des petites déformations $\Delta_1 \ll 1$.

$T^{(E)}(\underline{x}) = \frac{\beta_1}{1+\Delta_1} x_1 + \frac{\beta_2}{1-\nu\Delta_1} x_2 + \frac{\beta_3}{1-\nu\Delta_1} x_3$. Sous l'hypothèse des petites déformations $\Delta_1 \ll 1$ on a $T^{(E)}(\underline{x}) = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)[1 + O(\Delta_1)] = T^{(L)}(\underline{x})[1 + O(\Delta_1)]$.

- 5) Même question avec la déformation $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ telle que $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 + k a_3$ et $x_3 = a_3 + k a_2$ où $k \ll 1$ est le petit paramètre.

On a $T^{(L)}(\underline{a}) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 (a_2 + k a_3) + \alpha_3 (a_3 + k a_2)$. On a $C_{11} = 1$, $C_{22} = C_{33} = 1 + \Delta^2$ et $C_{23} = C_{32} = 2\Delta$. Les dilatations relatives pour les fibres orientées dans la directions des axes de la base canonique sont respectivement égales à 1 , $\sqrt{1 + \Delta^2}$ et $\sqrt{1 + \Delta^2}$. Le seul angle de glissement non nul est $\gamma_{23} = \arcsin \frac{2k}{1 + \Delta^2}$. Dans le cas $k \ll 1$, on a $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + \underline{O}(k^2)$ avec $\underline{\epsilon}$ de composantes $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = k$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. On a $T^{(E)}(\underline{x}) = T^{(L)}(\underline{x})[1 + O(k)]$ comme pour la déformation précédente.

NIVEAU III Thermoélasticité

On considère un milieu continu contenu dans le domaine Ω_0 défini par l'ensemble des points $\underline{a}$ tels que $0 \leq a_1 \leq d$ et $a_2^2 + a_3^2 \leq d^2$ où d est une longueur (figure 3.7). On suppose que sa température T est régie par l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$ avec κ constant. On considère le champ de déplacement

$$\xi_1 = \beta(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)/2, \quad \xi_2 = \beta a_1 a_2, \quad \text{et} \quad \xi_3 = \beta a_1 a_3. \quad (3.30)$$

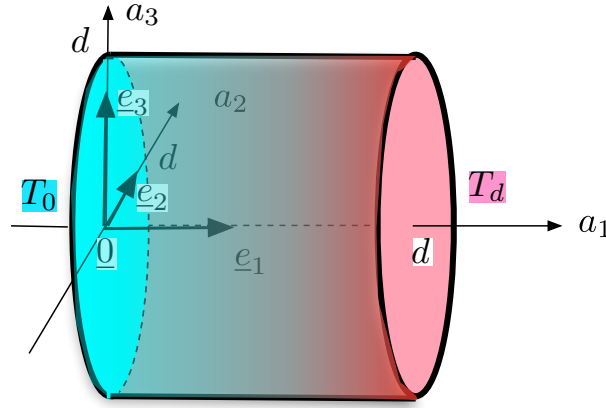


FIGURE 3.7 – Déformation thermoélastique avec diffusion de la chaleur.

- 1) Calculer la jacobienne $\underline{\underline{H}}(\underline{a})$ du champ de déplacement. Quelle condition sur β et d doit on vérifier pour que l'hypothèse des petites perturbations soit valide. Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$.

On a $H_{11} = \beta a_1$, $H_{12} = -\beta a_2$, $H_{13} = -\beta a_3$, $H_{21} = \beta a_2$, $H_{22} = \beta a_1$, $H_{23} = 0$, $H_{31} = \beta a_3$, $H_{32} = 0$ et $H_{33} = \beta a_1$. Si $\beta d \ll 1$, l'hypothèse des petites déformations est vérifiée. On a $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}} + {}^t\underline{\underline{H}}) = \beta a_1 \underline{\underline{I}}$.

- 2) On suppose loi de comportement thermoélastique $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha(T - T_0) \underline{\underline{I}}$ où $\alpha > 0$ est un coefficient de dilatation thermique constant. On impose les conditions aux limites $T = T_0$ pour $a_1 = 0$, $T = T_d$ pour $a_1 = d$ et $\text{grad } T \cdot \underline{n} = 0$ sur les autres frontières de Ω_0 . Montrer que le champ de déplacement $\underline{\xi}$ vérifie les équations de l'équilibre thermique ainsi que ces conditions aux limites pour une valeur de β que l'on exprimera en fonction de α , T_0 , T_d et d .

On a $\underline{\underline{\epsilon}} = \beta a_1 \underline{\underline{I}} = \alpha[T(\underline{a}) - T_0] \underline{\underline{I}}$ et donc $T(\underline{a}) = T_0 + \beta a_1/\alpha$. Ce champ vérifie bien l'équilibre thermique $\Delta T = 0$. Les conditions aux limites en $a_1 = 0$ et $a_1 = d$ imposent $\beta/\alpha = (T_d - T_0)/d$ et donc $\beta = \alpha(T_d - T_0)/d$. Les autres conditions aux limites thermiques sont bien vérifiées.

- 3) On impose maintenant une température $T_d > T_0$ constante sur toutes les faces du domaine Ω_0 . En utilisant la même loi de comportement thermoélastique $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha(T - T_0) \underline{\underline{I}}$, montrer que le champ de déplacement $\underline{\xi} = k \underline{a}$ est une solution d'équilibre du problème thermoélastique où k est une constante que l'on déterminera. En déduire le coefficient de dilatation thermique du matériau $\frac{1}{T_d - T_0} \frac{\delta \mathcal{V}_d - \delta \mathcal{V}_0}{\delta \mathcal{V}_0}$ où $\mathcal{V}_d$ est $\mathcal{V}_0$ sont les volumes respectifs du matériau porté aux températures T_d et T_0 .

On calcule $\underline{\underline{\epsilon}} = k \underline{\underline{I}}$, ce qui conduit à $k = \alpha(T_d - T_0)$ en appliquant la loi de comportement thermoélastique. Le coefficient de dilatation thermique est $\frac{1}{T_d - T_0} \frac{\delta \mathcal{V}_d - \delta \mathcal{V}_0}{\delta \mathcal{V}_0} = \frac{1}{T_d - T_0} \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = 3\alpha$.

Chapitre 4

Tenseur des contraintes

Sommaire

1	Loi de conservation de la masse	48
1.1	Intégrales triples	48
1.2	Formulation lagrangienne du mouvement	49
1.3	Mouvements de petites perturbations	50
2	Modélisation des efforts	51
2.1	Forces extérieures de volumes	51
2.2	Forces de contact extérieures	52
2.3	Autres forces	52
3	Principe fondamental de la dynamique	53
3.1	Quantité de mouvement et moment cinétique	53
3.2	Symétrie du tenseur des contraintes	54
3.3	Tricercle de Mohr	56

Introduction

Les changements de variables dans les intégrales triples sont interprétés à l'aide de la notion de déformation. On peut alors formuler la loi de conservation de la masse dans le cadre de la représentation lagrangienne d'un mouvement. On se place ensuite dans le cadre des petites perturbations pour aborder une première modélisation des forces de volume et de contact ainsi qu'une première approche du principe fondamental de la dynamique. La loi de conservation de la quantité de mouvement permet alors de modéliser les forces de contact à l'aide d'un tenseur d'ordre deux appelé "tenseur des contraintes". Contrairement à la mécanique du point ou à la mécanique des solides indéformables, la conservation du moment cinétique n'est pas une conséquence de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Elle joue donc un rôle important dans l'énonciation du principe fondamental de la dynamique en apportant une information importante : la symétrie du tenseur des contraintes. Ce tenseur permet d'interpréter géométriquement les forces de contact, par exemple à l'aide de la construction du tricerle de Mohr.

1 Loi de conservation de la masse

Le passage de la représentation lagrangienne à la représentation eulérienne d'une déformation permet d'interpréter la formule de changement de variable d'une intégrale triple. On introduit ensuite la notion de mouvement à l'aide des représentations lagrangiennes des déformations successives. Dans le cas des petites perturbations, la définition de grandeur attachée à des domaines de particules sont approximées par des intégrales sur des domaines fixes.

1.1 Intégrales triples

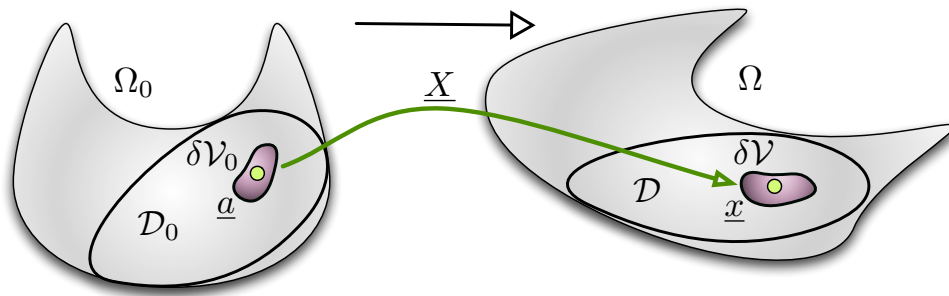


FIGURE 4.1 – Domaine $\mathcal{D}$ image de $\mathcal{D}_0$ par la déformation $\underline{X}$.

On considère une déformation $\underline{X}$ de la configuration de référence Ω_0 vers la configuration déformée Ω qui associe à un domaine $\mathcal{D}_0$ le domaine $\mathcal{D}$. Les représentations eulérienne $c^{(E)}$ et lagrangienne $c^{(L)}$ d'un champ c vérifient la relation $c^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] = c^{(L)}(\underline{a})$. D'autre part, l'image d'un petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ du

voisinage de $\underline{a}$ est un petit volume $\delta\mathcal{V}$ du voisinage de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ qui vérifie $\delta\mathcal{V} = J(\underline{a}) \delta\mathcal{V}_0$ où $J(\underline{a})$ est le Jacobien de la déformation $\underline{X}$.

On peut ainsi énoncer la formule du changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ dans l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathcal{D}} c^{(E)}(\underline{x}) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3a . \quad (4.1)$$

1.2 Formulation lagrangienne du mouvement

On considère maintenant un mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ qui associe, à tout point $\underline{a}$ de la configuration de référence Ω_0 et à tout temps t le point $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ de la configuration déformée $\Omega(t)$ image de Ω_0 au temps t . On suppose que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$ et on note $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ la trajectoire issue du point $\underline{a}$.

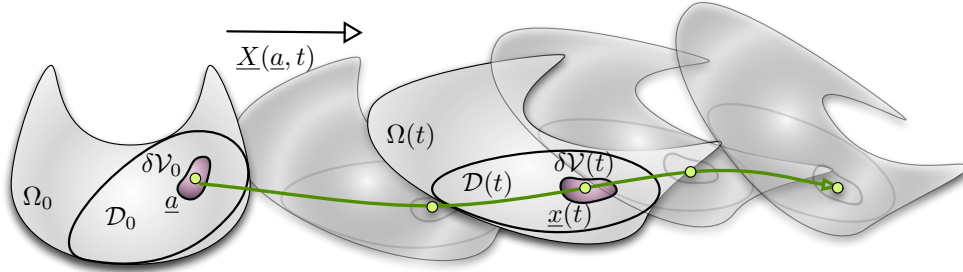


FIGURE 4.2 – Mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ et trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$.

Les représentations eulérienne et lagrangienne d'un champ B variable dans le temps vérifient

$$B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) . \quad (4.2)$$

La jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t)$, le Jacobien $J(\underline{a}, t)$ ou encore le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a}, t)$ dépendent maintenant du temps. Un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement et issu du petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ du voisinage de $\underline{a}$ à l'instant $t = 0$ vérifie

$$\delta\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \delta\mathcal{V}_0 . \quad (4.3)$$

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement et issue du domaine $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(0)$ à $t = 0$. On note $m[\mathcal{D}(t)]$ la masse de ce domaine et $\rho^{(E)}(\underline{x}, t)$ la masse volumique en tout point de la configuration déformée $\Omega(t)$ au temps t . En effectuant le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$, cette masse s'exprime en fonction des intégrales triples

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho^{(E)}(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a . \quad (4.4)$$

La loi de conservation de la masse énonce que la masse $m[\mathcal{D}(t)]$ de tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement est indépendante du temps. En appliquant

la relation (4.4) à des domaines de plus en plus petits, on montre que cette loi est équivalente à

$$\forall \underline{a} \in \Omega_0, \quad \forall t : \quad \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) . \quad (4.5)$$

Si $\rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$, c'est-à-dire si la répartition de masse de la configuration de référence Ω_0 est homogène, la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\forall \underline{a} \in \Omega_0, \quad \forall t : \quad \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 . \quad (4.6)$$

Une autre démonstration de cette relation est obtenue en notant $\delta m_0 = \rho_0 \delta \mathcal{V}_0$ la masse du volume $\delta \mathcal{V}_0$ dans la configuration de référence et $\delta m = \rho \delta \mathcal{V}$ la masse de son image $\delta \mathcal{V}$ dans la configuration déformée. La relation $\delta \mathcal{V} = J \delta \mathcal{V}_0$ permet d'écrire

$$\delta m = \delta m_0 \iff \rho J \delta \mathcal{V}_0 = \rho_0 \delta \mathcal{V}_0 \iff \rho J = \rho_0 . \quad (4.7)$$

1.3 Mouvements de petites perturbations

On suppose maintenant que le mouvement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ vérifie l'hypothèse des petites perturbations, c'est-à-dire l'hypothèse des petites déformations ainsi que l'hypothèse des champs peu déformés. On suppose donc que le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$ est de l'ordre η avec $\eta \ll 1$ et que l'on peut confondre à l'ordre dominant en η les représentations eulériennes $B^{(E)}(\underline{x}, t)$ et lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de tout champ B d'intérêt pour la description mécanique du milieu continu considéré.

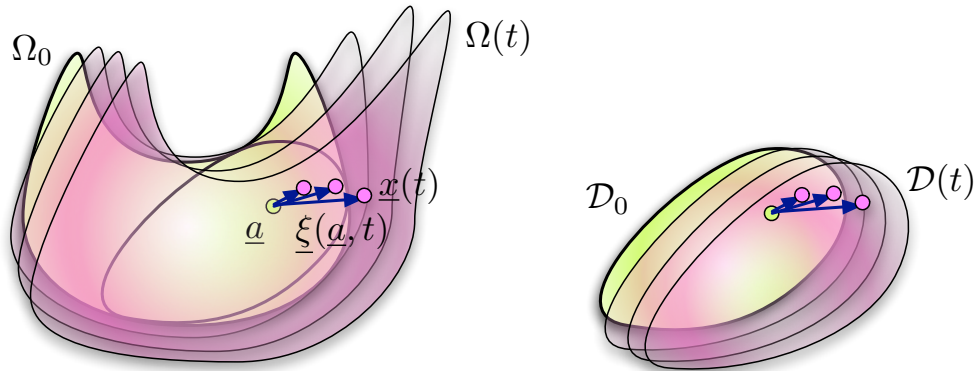


FIGURE 4.3 – Mouvement de petites déformations $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$.

L'hypothèse des petites déformations permet de développer le Jacobien du mouvement sous la forme

$$J(\underline{a}, t) = 1 + \text{tr } \underline{\epsilon}(\underline{a}, t) + O(\eta^2) . \quad (4.8)$$

On suppose que la masse volumique de la configuration de référence Ω_0 est homogène et vaut ρ_0 . La loi de conservation de la masse s'écrit alors

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 - \rho_0 \text{tr } \underline{\epsilon}(\underline{a}, t) + O(\eta^2) = \rho_0 [1 + O(\eta)] . \quad (4.9)$$

Le développement $J(\underline{a}, t) = 1 + O(\eta)$ permet d'approximer toute intégrale triple sous la forme

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} c^{(E)}(\underline{x}) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3a = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) d^3a [1 + O(\eta)] . \quad (4.10)$$

On voit donc que l'on peut non seulement confondre les représentations eulérienne et lagrangienne des champs, mais aussi les domaines $\mathcal{D}(t)$ avec leur position $\mathcal{D}_0$ à l'instant $t = 0$.

Grâce à ces considérations, on peut définir, à l'ordre dominant en η , la quantité de mouvement $\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \underline{p}(\mathcal{D}_0) + O(\eta)$ du domaine $\mathcal{D}(t)$ par la relation

$$\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)] . \quad (4.11)$$

On définit de même le moment cinétique $\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)]$ en O , origine du repère, par la relation

$$\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)] . \quad (4.12)$$

2 Modélisation des efforts

On passe ici en revue la modélisation des efforts exercées sur un milieu continu en se plaçant dans le cadre des petites perturbations. Les forces à longue portée, supérieure à l'échelle microscopique du continu, sont modélisées par des densités volumiques. Les forces à courte portée sont modélisées par des densités surfaciques. On confond ici représentations eulérienne et lagrangienne ainsi que configuration déformée et configuration de référence.

2.1 Forces extérieures de volumes

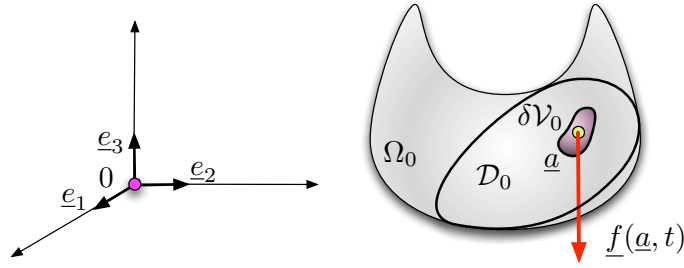
On modélise par $\underline{f}(\underline{a}, t)$ la densité volumique des forces à longue distance exercées par des objets extérieurs à la configuration déformée Ω que l'on approxime par Ω_0 dans le cadre des petites perturbations. Dans ce cadre, on ne distingue pas les représentations eulérienne $\underline{f}^{(E)}$ et lagrangienne $\underline{f}^{(L)}$ de $\underline{f}$. La résultante des forces extérieures de volume exercées sur un domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{F}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)] . \quad (4.13)$$

Le moment des forces extérieures de volume en O , origine du repère, est défini par la relation

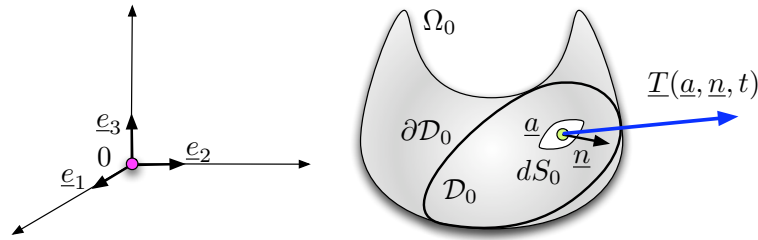
$$\mathcal{M}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)] . \quad (4.14)$$

Très souvent, la densité volumique des forces à longue distance se résume aux forces de gravité qui s'écrivent $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$ où g est l'intensité de la gravité et $\underline{e}_z$ le vecteur unitaire vertical.

FIGURE 4.4 – Forces extérieures de volume $f(\underline{a}, t)$.

2.2 Forces de contact extérieures

On modélise par $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ la densité surfacique des forces à courte portée exercées par son extérieur sur le sous-domaine $\mathcal{D}(t)$, que l'on approxime par $\mathcal{D}_0$. Ces “forces de contact” modélisent les interactions entre particules à des échelles inférieures à l'échelle microscopique de l'approximation de milieu continu. On a supposé que cette densité de forces ne dépendait que de la normale $\underline{n}$ à $\mathcal{D}_0$ au point $\underline{a}$.

FIGURE 4.5 – Forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ extérieures au domaine $\mathcal{D}_0$.

La résultante des forces de contact extérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{F}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 [1 + O(\eta)] . \quad (4.15)$$

Le moment en O des forces de contact extérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{M}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 [1 + O(\eta)] . \quad (4.16)$$

À titre d'exemple, on peut considérer les forces de pression $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = -p(\underline{a}, t) \underline{n}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 = - \iint_{\partial \mathcal{D}_0} p(\underline{a}, t) \underline{n} dS_0 = - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{\text{grad}} p d^3 a . \quad (4.17)$$

L'équilibre entre les forces extérieures de volume dues à la gravité et ces forces de pression conduit alors à la relation hydrostatique $\underline{0} = -\underline{\text{grad}} p + \rho_0 g \underline{e}_z$.

2.3 Autres forces

Les forces intérieures de volume rassemblent les forces d'interaction à longue portée, supérieure à l'échelle microscopique du continu, entre les particules

de matière de la configuration de référence Ω_0 . Il peut s'agir, par exemple de forces électromagnétiques. On supposera ici qu'elles sont négligeables, ce qui entraîne la nullité de leur résultante et de leur moment en O pour tout domaine, c'est-à-dire

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} . \quad (4.18)$$

Les forces intérieures de contact rassemblent les forces d'interaction à courte portée entre les particules de matière d'un même domaine $\mathcal{D}_0$. Ces forces ne sont pas négligeables, mais le principe de l'action et de la réaction implique que leur résultante et leur moment en O , sommés sur un domaine quelconque $\mathcal{D}_0$ sont nuls, ce qui s'écrit

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} . \quad (4.19)$$

Même si la résultante et le moment de ces forces sont nulles, elles se manifestent, par exemple, par le travail qu'elles fournissent lors d'une déformation d'une configuration à une autre. La détermination de ce travail n'est pas abordée dans ce chapitre.

3 Principe fondamental de la dynamique

L'énoncé du principe fondamental de la dynamique entraîne la linéarité des forces de contact par rapport à la normale. On déduit l'existence du tenseur des contraintes symétrique qui permet une représentation géométrique intéressante de ces forces. La divergence de ce tenseur intervient dans la loi de conservation de la quantité de mouvement.

3.1 Quantité de mouvement et moment cinétique

Le principe fondamental de la dynamique est la réunion de la loi de conservation de la quantité de mouvement et de la loi de conservation du moment cinétique. Ces lois énoncent que pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] , \\ \frac{d}{dt} \sigma[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] , \end{aligned} \quad (4.20)$$

ce qui s'écrit, à l'ordre dominant en η ,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) d^3 a &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 , \\ \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d^3 a &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f} d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{T} dS_0 . \end{aligned} \quad (4.21)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement montre que $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ est une densité surfacique dont l'intégrale sur la frontière de tout domaine vérifie l'hypothèse du continu (chapitre 2, paragraphe 1.1). Par conséquent, cette

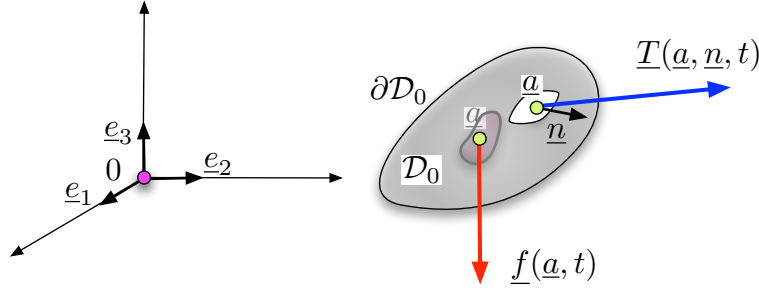


FIGURE 4.6 – Forces extérieures de volumes $\underline{f}(\underline{a}, t)$ et forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ extérieures à $\mathcal{D}_0$.

densité dépend linéairement des composantes de la normale $\underline{n}$ et l'on peut écrire

$$\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n} \quad (4.22)$$

où $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est un tenseur d'ordre deux que l'on nomme “tenseur des contraintes”. En appliquant le théorème de la divergence, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) d^3 a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3 a + \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t) d^3 a. \quad (4.23)$$

En appliquant cette relation à des domaines de plus en plus petits, cette relation entraîne

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t). \quad (4.24)$$

On peut remarquer que la résultante des forces de contact $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ extérieures à un petit volume $\delta \mathcal{V}_0$ est égale à $\underline{f}_{\text{cont}} \delta \mathcal{V}_0$ où

$$\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}, t) = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \quad (4.25)$$

est la densité volumique “équivalente” aux forces de contact (figure 4.7).

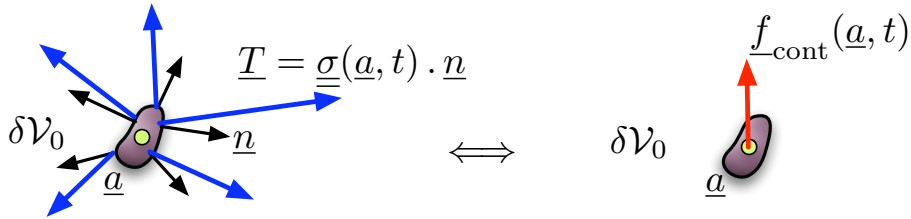


FIGURE 4.7 – Densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}, t)$ “équivalente” aux forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n}$.

3.2 Symétrie du tenseur des contraintes

Nous allons maintenant démontrer que la loi de conservation du moment cinétique entraîne la symétrie du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$. Cette loi s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d^3 a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f} d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS_0. \quad (4.26)$$

En reportant dans cette équation la loi de conservation de la quantité de mouvement écrite sous la forme $\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$, on montre que l'on a

$$\underline{C} = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d^3a = \underline{0} . \quad (4.27)$$

On peut donc écrire, pour tout indice $i = 1, \dots, 3$ du vecteur $\underline{C}$, la relation

$$C_i = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} a_j \sigma_{kl} n_l dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} a_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial a_l} d^3a = 0 . \quad (4.28)$$

En appliquant la formule de la divergence

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS_0 &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \text{div } \underline{Q} d^3a \\ \iff \iint_{\partial \mathcal{D}_0} Q_l n_l dS_0 &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial Q_l}{\partial a_l} d^3a , \end{aligned} \quad (4.29)$$

au cas où $Q_l = \epsilon_{ijk} a_j \sigma_{kl}$, pour i fixé, on obtient finalement

$$C_i = \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial (a_j \sigma_{kl})}{\partial a_l} - a_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial a_l} \right] d^3a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} d^3a = 0 . \quad (4.30)$$

En écrivant $\epsilon_{1jk} \sigma_{kj} = \sigma_{23} - \sigma_{32}$, ainsi que les deux autres relations obtenues par permutations circulaires, et en prenant des domaines $\mathcal{D}_0$ de plus en plus petits, on démontre que $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est donc symétrique.

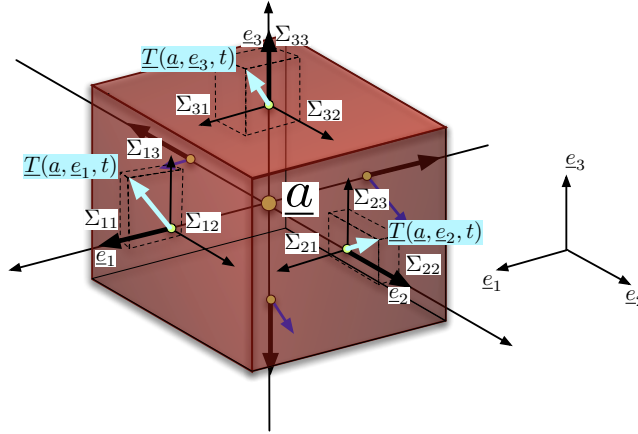


FIGURE 4.8 – Forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_i, t)$ exercées par l'extérieur d'un petit cube de centre $\underline{a}$ dont les axes sont ceux du repère canonique.

On peut alors représenter graphiquement les forces de contact exercées sur un petit cube de centre $\underline{a}$ par son extérieur (figure 4.8). La symétrie du tenseur des contraintes impose des liens entre les composantes des vecteurs $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_i, t) = \pm \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{e}_i$ s'exerçant sur les faces du cubes.

Dans la mesure où $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est symétrique, il existe, pour chaque $(\underline{a}, t)$, une base orthonormée $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ de diagonalisation telle que

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_2 + \sigma_3 \underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3 , \quad (4.31)$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les valeurs propres réelles du tenseur des contraintes. On peut alors représenter, sur la figure 4.9, les forces exercées sur un petit cube de centre $\underline{a}$ et de normales $\underline{n}_i$ par son extérieur.

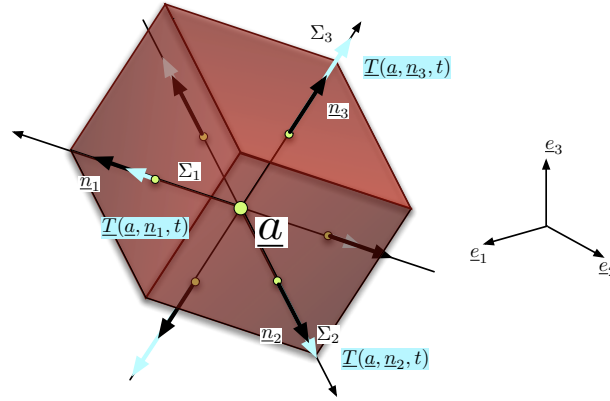


FIGURE 4.9 – Forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}_i, t)$ exercées par l'extérieur d'un petit cube de centre $\underline{a}$ dont les axes sont les directions propres $\underline{n}_i$ de $\underline{\sigma}$.

3.3 Tricerle de Mohr

La symétrie du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et donc l'existence de valeurs propres réelles ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) et d'une base orthonormée de diagonalisation ($\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$) permet de visualiser l'ensemble des forces de surface $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n}$ lorsque $\underline{n}$ parcourt toutes les directions à l'aide de "tricerle de Mohr".

Étant donné un vecteur unitaire $\underline{n}$, que l'on considère comme la normale à une surface dS_0 prise dans la frontière $\partial\Omega_0$ d'un domaine Ω_0 (voir figure 4.10a), on appelle, respectivement, σ et τ les composantes normale et tangentielle du vecteur $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ définies par les relations

$$\sigma = \underline{T} \cdot \underline{n}, \quad \text{et} \quad \tau = \|\underline{T} - \sigma \underline{n}\|. \quad (4.32)$$

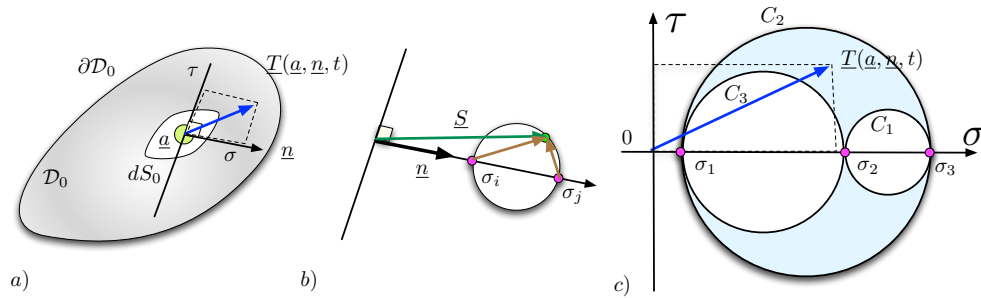


FIGURE 4.10 – Construction du tricerle de Mohr.

On cherche à représenter dans un plan l'ensemble des couples (σ, τ) décrits lorsque $\underline{n}$ prend toutes les directions, connaissant les trois valeurs $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Pour cela, on exprime $\underline{n}$ dans la base propre de $\underline{\sigma}$ sous la forme

$$\underline{n} = Y_1 \underline{n}_1 + Y_2 \underline{n}_2 + Y_3 \underline{n}_3. \quad (4.33)$$

On en déduit alors

$$\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_1 Y_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 Y_2 \underline{n}_2 + \sigma_3 Y_3 \underline{n}_3 . \quad (4.34)$$

Étant donné deux indices i et j distincts, on déduit, des deux expressions précédentes et de la relation $\underline{n}_i \cdot \underline{n}_j = \delta_{ij}$, l'égalité

$$(\underline{T} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{T} - \sigma_j \underline{n}) = (\sigma_k - \sigma_i) (\sigma_k - \sigma_j) Y_k^2 , \quad (4.35)$$

où k est le troisième indice, différent de i et j . Le signe de ce produit scalaire dépend de la position de la valeur propre σ_k par rapport aux deux autres valeurs propres σ_i et σ_j . On remarque de plus que Y_k^2 peut prendre toutes les valeurs de 0 à 1 lorsque $\underline{n}$ prend toutes les directions possibles.

On remarque alors que lieu S_k des vecteurs $\underline{S}$ tels que

$$S_k = \{ \underline{S} \quad : \quad (\underline{S} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{S} - \sigma_j \underline{n}) = 0 \} \quad (4.36)$$

est une sphère de centre $\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \underline{n}$ et de rayon $\frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2}$ (figure 4.10b). Le vecteur $\underline{T}$ se situe à l'intérieur de cette sphère lorsque le signe de $(\underline{T} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{T} - \sigma_j \underline{n})$ est négatif et à l'extérieur sinon.

On en déduit que l'ensemble des couples (σ, τ) est compris entre les trois cercles C_k , pour $k = 1, \dots, 3$ de la figure 4.10c.

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

On considère le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \eta l \sin(k a_2 - \omega t) \underline{e}_3$ pour une configuration de référence Ω_0 qui contient le sous-domaine $\mathcal{D}_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$. On suppose $k L_2 = \pi/2$.

1) On suppose que $B^{(E)}(\underline{x}, t) = C \underline{x}^2$. En déduire $B^{(L)}(\underline{a}, t)$.

Comme $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ et $x_3 = a_3 + \eta l \sin(k a_2 - \omega t)$, on a

$$B^{(L)}(\underline{a}, t) = C \{ a_1^2 + a_2^2 + [a_3 + \eta l \sin(k a_2 - \omega t)]^2 \} .$$

2) On suppose maintenant que $C^{(L)}(\underline{a}, t) = D \underline{a}^2$. En déduire $C^{(E)}(\underline{x}, t)$.

La déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ s'écrit $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$ et $a_3 = x_3 - \eta l \sin(k x_2 - \omega t)$. Comme $C^{(L)}(\underline{a}, t) = D (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, on a donc

$$C^{(E)}(\underline{x}, t) = D \{ x_1^2 + x_2^2 + [x_3 - \eta l \sin(k x_2 - \omega t)]^2 \} .$$

3) Calculer $\underline{F}(\underline{a}, t)$ et $J(\underline{a}, t)$. On note $\mathcal{D}(t)$ l'image de $\mathcal{D}_0$ par la déformation $\underline{X}$ au temps t . Calculer l'intégrale $\iiint_{\mathcal{D}(t)} x_2 d^3 x$.

On calcule $\underline{F}(\underline{a}, t) = \underline{I} + k \eta l \cos(k a_2 - \omega t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2$, c'est-à-dire $F_{11} = 1$, $F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{32} = k \eta l \cos(k a_2 - \omega t)$ et $F_{ij} = 0$ sinon. On en déduit $J(\underline{a}, t) = 1$. On a donc

$$\iiint_{\mathcal{D}} x_2 d^3 x = \iiint_{\mathcal{D}_0} a_2 d^3 a = \frac{1}{2} L_1 L_2^2 L_3 . \quad (4.37)$$

- 4) Calculer le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$. Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$.

On a $\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \eta l \sin(k a_2 - \omega t) \underline{e}_3$ et

$$\underline{\epsilon}(\underline{a}, t) = \frac{1}{2} \eta k l \cos(k a_2 - \omega t) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) .$$

c'est-à-dire $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \frac{1}{2} \eta k l \cos(k a_2 - \omega t)$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon.

- 5) En présence de force de gravité $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_3$ calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ en $\underline{0}$ à l'ordre dominant en η .

Le poids est $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = -m_0 g \underline{e}_3$. Le moment en $\underline{0}$ est

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)] \\ &= \rho_0 g \iiint_{\mathcal{D}_0} (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2) d^3a [1 + O(\eta)] \\ &= \frac{1}{2} m_0 g (-L_2 \underline{e}_1 + L_1 \underline{e}_2) [1 + O(\eta)] . \end{aligned}$$

- 6) On suppose que $\eta \ll 1$ et que la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ de $\mathcal{D}(t)$ est soumise aux forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{n}$ avec $p(\underline{x}, t) = p_a - \rho_{\text{eau}} g x_3$. Calculer $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ à l'ordre dominant du petit paramètre η .

On considère le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}, t) = -p(\underline{a}, t) \underline{I}$ avec $p(\underline{a}, t) = p_a - \rho_{\text{eau}} g a_3$ ce qui conduit à $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}, t) = \underline{\text{div}} \underline{\sigma} = -\underline{\text{grad}} p = \rho_{\text{eau}} g \underline{e}_3$. Les forces de contacts associées sont celles de l'énoncé. On a donc $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \rho_{\text{eau}} g L_1 L_2 L_3 \underline{e}_3$. C'est la poussée d'Archimède si ρ_{eau} est la masse volumique de l'eau. On a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \frac{1}{2} \rho_{\text{eau}} g L_1 L_2 L_3 (L_2 \underline{e}_1 - L_1 \underline{e}_2)$. C'est le moment en $\underline{0}$ du poids appliqué au centre de gravité $\underline{x}_G = \frac{1}{2} (L_1 \underline{e}_1 + L_2 \underline{e}_2 + L_3 \underline{e}_3)$.

- 7) Montrer que le principe fondamental, dans le cas des petites déformations, se traduit par la loi de conservation de la quantité de mouvement et la symétrie du tenseur des contraintes. Écrire cette loi.

Le principe fondamentale de la dynamique se traduit par la loi de conservation de mouvement $\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t)$, déduite du bilan global de quantité de mouvement ainsi que par la nullité du vecteur $\underline{C} = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d^3a$ en utilisant cette loi dans le bilan global de moment cinétique. On en déduit, en calculant les composantes de $\underline{C}$, que $\underline{\sigma}$ est symétrique.

NIVEAU II Calculs sans efforts

En tout point $\underline{a}$ d'un domaine $\underline{\Omega}_0$ on suppose que les forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ exercées sur un élément de surface de normale $\underline{n}$ vérifient les relations

$$\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \frac{\beta}{2} a_3^2 \underline{e}_3, \quad \underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 = \frac{\beta}{2} a_3^2 \quad \text{et} \quad \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}_*) = \frac{\beta}{2} a^2 \underline{n}_* , \quad (4.38)$$

où $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, est un repère orthonormé, a_3 la troisième composante de $\underline{a}$ dans ce repère et $\underline{n}_* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ un vecteur unitaire. On suppose que la densité des forces extérieures de volume est $\underline{f}(\underline{a}) = -\beta \underline{a}$.

- 1) Quelle est la dimension du paramètre constant β ?

La constante β est en N m^{-4} ou encore en Pa m^{-2} .

- 2) Exprimer toutes les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{a}$.
- Les composantes du tenseur des contraintes sont $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\beta}{2} (a_1^2 + a_2^2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{33} = \frac{\beta}{2} a_3^2$ et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

On considère un sous-domaine $\mathcal{D}_0$ qui a la forme d'un parallélépipède centré en $\underline{0}$ de cotés l_1 , l_2 et l_3 qui est donc défini par

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 : |a_1| \leq \frac{l_1}{2}, |a_2| \leq \frac{l_2}{2} \text{ et } |a_3| \leq \frac{l_3}{2} \right\}. \quad (4.39)$$

- 3) Calculer l'expression de $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}) = \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$.
- On obtient $\underline{f}_{\text{cont}} = \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \beta \underline{a}$.
- 4) Calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_0) = \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_0) + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0)$ des forces extérieures de volume et des forces de contact extérieures à $\mathcal{D}_0$.
- Comme $\underline{f}_{\text{cont}} + \underline{f} = \underline{0}$, on a $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$.
- 5) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_0)$ en $\underline{0}$ des forces extérieures de volume.
- On a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{a}) d^3a = \underline{0}$ car $\underline{f} = -\beta \underline{a}$.
- 6) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0)$ en $\underline{0}$ des forces de contact extérieures à $\mathcal{D}_0$.
- Comme $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, on a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{a} \wedge \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}) d^3a = \underline{0}$ car $\underline{f}_{\text{cont}} = \beta \underline{a}$.

NIVEAU III Utilisation d'un tricerclle de Mohr

On donne le tenseur des contraintes en un point $\underline{a}$ d'un matériau continu :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) = \sigma_0 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \sigma_0 = 10^7 \text{ Pa}. \quad (4.40)$$

- 1) Donner la valeur propre évidente que l'on notera σ_1 et la direction propre associée que l'on notera $\underline{n}_1$.
- La valeur propre $\sigma_1 = -\sigma_0$ associée au vecteur propre $\underline{n}_1 = \underline{e}_3$ est évidente.
- 2) Calculer les trois valeurs propres $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ de $\underline{\underline{\sigma}}$ et tracer le tricerclle de Mohr. Il n'est pas demandé de calculer les vecteurs propres unitaires $\underline{n}_2$ et $\underline{n}_3$ correspondants à σ_2 et σ_3 .
- Les deux autres valeurs propres sont $\sigma_2 = (2 - \sqrt{5})\sigma_0 \sim -.24\sigma_0$ et $\sigma_3 = (2 + \sqrt{5})\sigma_0 \sim 4.24\sigma_0$. Elles sont respectivement associées aux vecteurs unitaires $\underline{n}_2$ et $\underline{n}_3$ situé dans le plan perpendiculaire à $\underline{e}_3$ et qu'il n'est pas nécessaire de calculer. On en déduit le tracé du tricerclle de Mohr (figure 4.11).
- 3) Calculer les composantes normale et tangentielle σ et τ des vecteurs contraintes qui s'exercent sur les facettes de normales respectives $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. Représenter les points M_1 et M_2 correspondants sur le diagramme de Mohr.

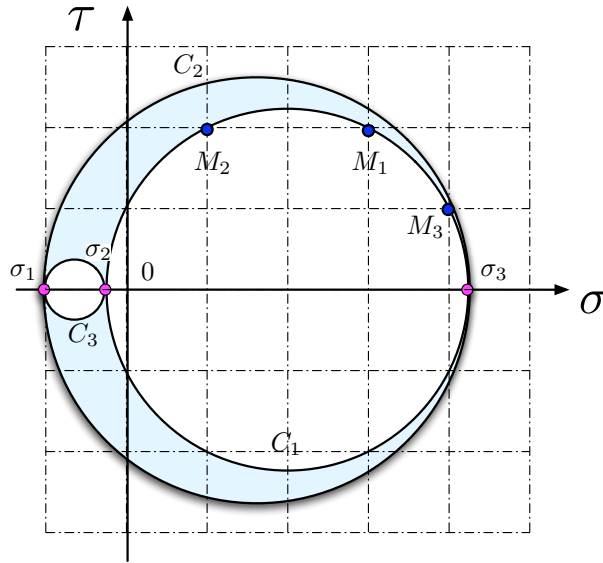


FIGURE 4.11 – Tracé du tricerclé de Mohr et points particuliers.

Comme $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_1 = 3\sigma_0 \underline{e}_1 + 2\sigma_0 \underline{e}_2$, on peut tracer le point M_1 de coordonnées $(\sigma, \tau) = (3\sigma_0, 2\sigma_0)$ sur diagramme (figure 4.11). Comme $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_2 = 2\sigma_0 \underline{e}_1 + \sigma_0 \underline{e}_2$, on peut tracer le point M_2 de coordonnées $(\sigma, \tau) = (\sigma_0, 2\sigma_0)$ sur diagramme (figure 4.11).

- 4) Calculer les composantes normales et tangentielles σ et τ du vecteur contrainte qui s'exerce sur la facette normale à la direction engendrée par le vecteur ${}^t(1, 1, 0)$. Représenter ce point M_3 sur le diagramme de Mohr.

Pour $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$, on a $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0(5\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2)$ et donc $\sigma = \underline{T} \cdot \underline{n} = 4\sigma_0$. On a $\underline{T} - 4\sigma_0 \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ et donc $\tau = \|\underline{T} - 4\sigma_0 \underline{n}\| = \sigma_0$. Le point M_3 est sur le cercle C_1 dans la mesure où $Y_1 = 0$ (figure 4.11).

Limites de rupture et tricerclé de Mohr

On appelle domaine d'élasticité d'un matériau le lieu des points dans le plan (σ, τ) pour lesquels l'hypothèse des petites perturbations est valide. La frontière de ce domaine indique les limites d'élasticité du matériau. On supposera ici que cette frontière est proche des limites de rupture qui définissent en général un domaine légèrement plus grand que le domaine d'élasticité.

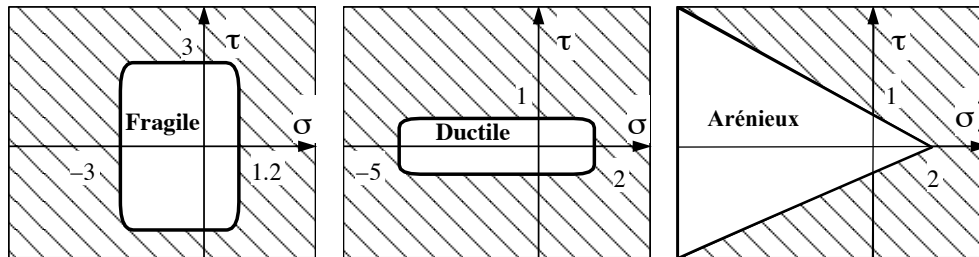


FIGURE 4.12 – Domaine d'élasticité et de rupture de trois matériaux.

On considère trois types de matériaux (ductile, fragile et arénieux) dont les domaines d'élasticité, et donc les frontières de rupture, sont représentées sur

la figure 5.7. L'unité des axes σ et τ est égale à 10^7 Pa.

- 5) On suppose que le tenseur des contraintes est donné par $\sigma_{11} = -2\sigma_0$, $\sigma_{33} = \sigma_0$, $\sigma_{ij} = 0$ sinon, avec σ_0 variable. Pour les trois courbes de limite de rupture, déterminer graphiquement la valeur maximale σ_m du paramètre σ_0 au-delà de laquelle le matériau est endommagé. Montrer que ces valeurs maximale sont respectivement $\sigma_m = 1.2 \cdot 10^7$ Pa, $\sigma_m \sim \frac{1}{3} \cdot 10^7$ Pa et $\sigma_m = \frac{5}{3\sqrt{29}} \cdot 10^7$ Pa $\sim 0.71 \cdot 10^7$ Pa

On inscrivant le tricerclé de Mohr dans les domaines de rupture, on calcule les valeurs de rupture indiquées a (figure 4.13).

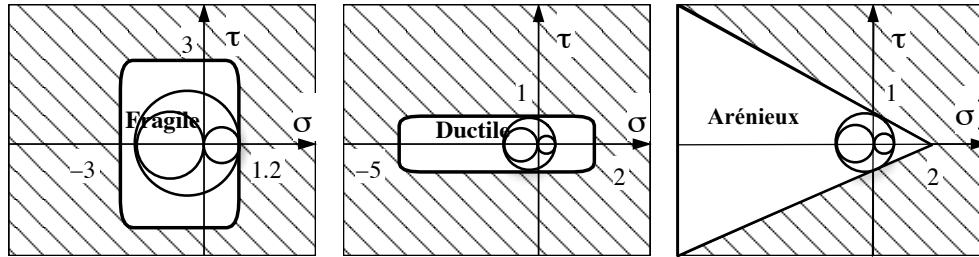


FIGURE 4.13 – Rupture de trois matériaux pour $\sigma_1 = -2\sigma_0$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \sigma_0$.

- 6) Interpréter physiquement les notions de matériau fragile (acier, fonte, béton, verre), ductile (acier doux, aluminium, cuivre, plomb) et arénieux (sable, sol) à partir de la forme des courbes de limite d'élasticité.

Un matériau fragile se cassera pour des contraintes normales faibles et positives tandis qu'un matériau ductile se cassera pour des contraintes tangentielles faibles. Un matériau arénieux résiste bien à la compression.

Chapitre 5

Équations de Lamé

Sommaire

1	Loi de Hooke	64
1.1	Loi de Hooke généralisée	64
1.2	Cas homogène et isotrope	65
1.3	Équations de Lamé	66
2	Module de Young et coefficient de Poisson	67
2.1	Inversion de la loi de Hooke	67
2.2	Expérience de traction uniaxiale	68
2.3	Expérience de compression uniforme	69
3	Ondes élastiques	70
3.1	Projection des équations de Lamé	70
3.2	Ondes longitudinales	71
3.3	Ondes transversales	72

Introduction

La loi de comportement rhéologique d'un milieu continu relie les contraintes aux déformations ou aux vitesses de déformation. On dit que le milieu est élastique si les contraintes ne dépendent que des déformations. Lorsque ces déformations sont petites et que les champs considérés sont peu déformés, la loi de comportement des solides élastiques est linéaire. On détaille cette loi de comportement, appelée loi de Hooke, dans le cas où le milieu est homogène et isotrope. En reportant l'expression du tenseur des contraintes en fonction du déplacement dans la loi de conservation de la quantité de mouvement, on obtient les équations de Lamé qui décrivent, en particulier, des mouvements ondulatoires.

1 Loi de Hooke

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, la loi de Hooke généralisée décrit le comportement rhéologique d'un solide élastique quelconque. Dans le cas homogène et isotrope, la loi de Hooke ne dépend que de deux paramètres. On obtient alors les équations de Lamé à partir du principe fondamental de la dynamique.

1.1 Loi de Hooke généralisée

Un milieu continu est élastique si ses forces de contact, modélisées par le tenseur des contraintes, ne dépendent que de la déformation qu'il subit et pas de la vitesse à laquelle il se déforme. On suppose ici que la configuration de référence Ω_0 est libre de toute contrainte.

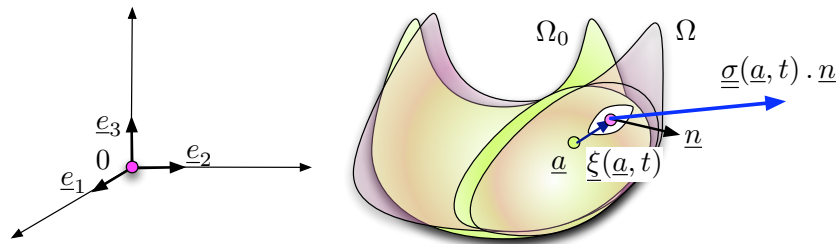


FIGURE 5.1 – Champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ et forces de contact $\underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n}$.

On se place dans le cadre des petites perturbations et on note η le petit paramètre qui mesure l'amplitude de la déformation. Puisque le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ est nul en l'absence de déformation, on peut affirmer qu'il dépend linéairement du déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ à l'ordre dominant du petit paramètre η .

On suppose alors que le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ ne dépend que des dérivées premières $H_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t)$ au même point $\underline{a}$ (principe de localisation spatiale) et au même temps t .

Des considérations sur l'universalité des lois de comportement dans un changement de repère (principe de l'indifférence matérielle), permettent d'en déduire

que les composantes de $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ ne dépendent que des composantes du tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$ qui est la partie symétrique de $\underline{H}(\underline{a}, t)$.

On aboutit finalement à la loi de Hooke généralisée qui est la relation linéaire la plus générale entre ces composantes et qui s'écrit

$$\sigma_{ij}(\underline{a}, t) = C_{ijkl}(\underline{a}) \epsilon_{kl}(\underline{a}, t) \quad (5.1)$$

pour tout couple (i, j) , où la convention d'Einstein est utilisée pour la sommation sur les indices k et l . Cette loi, qui relie le tenseur des contraintes et les paramètres de la déformation est une “loi de comportement rhéologique”.

Si les tenseurs $\underline{\sigma}$ et $\underline{\epsilon}$ étaient quelconques, il y aurait $9 \times 9 = 81$ coefficients $C_{ijkl}(\underline{a})$ en chaque point $\underline{a}$ pour décrire le comportement élastique du solide. Comme ces tenseurs sont symétriques, il n'y en a en fait que $6 \times 6 = 36$. On peut alors noter par les indices $I \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les couples d'indices $(i, j) \in \{11, 22, 33, 23, 31, 12\}$ et noter la loi de Hooke généralisée sous la forme

$$\sigma_I(\underline{a}, t) = C_{IK}(\underline{a}) \epsilon_K(\underline{a}, t) \quad (5.2)$$

pour $I = 1, \dots, 6$, où la convention d'Einstein est utilisée pour la sommation des indices $K = 1, \dots, 6$.

Si le comportement rhéologique du solide est homogène, les coefficients $C_{ijkl} = C_{IK}$ ne dépendent pas de l'espace. Si le comportement rhéologique du solide est invariant vis-à-vis de symétries, comme par exemple le groupe des rotations autour d'un axe, le nombre de coefficients $C_{ijkl} = C_{IK}$ diminue encore. Nous allons voir qu'il est réduit à deux dans le cas où le comportement rhéologique est isotrope.

1.2 Cas homogène et isotrope

On suppose ici que le comportement rhéologique du solide est homogène et invariant par rotation. Cette dernière hypothèse signifie qu'à une rotation des contraintes correspond une même rotation des déformations alors que la configuration de référence est fixe (figure 5.2).

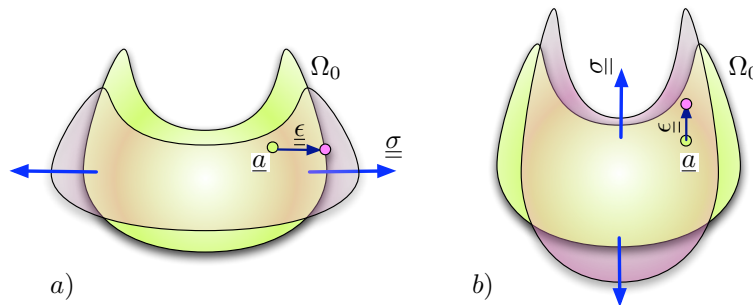


FIGURE 5.2 – Invariance du comportement rhéologique par rotation.

Pour trouver la forme de la loi de Hooke dans le cas isotrope, on considère la fonction scalaire

$$\Phi(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}, \quad (5.3)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est lié à $\underline{\underline{\epsilon}}$ par la loi de comportement. Il se trouve que Φ peut être interprété comme une énergie élastique. L'isotropie entraîne que Φ est une fonction des invariants scalaires de $\underline{\underline{\epsilon}}$ qui sont toutes les fonctions des trois invariants scalaires de base que sont $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$ et $\det \underline{\underline{\epsilon}}$. Ces derniers s'écrivent

$$\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{I}} = \epsilon_{jj} , \quad \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \text{tr } (\underline{\underline{\epsilon}}^2) = \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} , \quad \det \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{1i} \epsilon_{2j} \epsilon_{3k} . \quad (5.4)$$

Comme $\underline{\underline{\sigma}}$ est une fonction linéaire de $\underline{\underline{\epsilon}}$, l'invariant scalaire $\Phi(\underline{\underline{\epsilon}})$ est donc un polynôme d'ordre deux en $\underline{\underline{\epsilon}}$ et donc une combinaison linéaire de $(\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}})^2$ et $\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$ que l'on choisit d'écrire sous la forme

$$\Phi(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}}] : \underline{\underline{\epsilon}} , \quad (5.5)$$

où λ et μ sont les "coefficients de Lamé". On en déduit la loi de Hooke qui s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) = \lambda [\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}, t)] \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}, t) . \quad (5.6)$$

1.3 Équations de Lamé

L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) \quad (5.7)$$

fait intervenir la divergence du tenseur des contraintes. On écrit alors la loi de Hooke sous la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i} \right) , \quad (5.8)$$

où la convention d'Einstein est utilisée pour la sommation sur l'indice l . Les composantes du vecteur $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_j} &= \lambda \frac{\partial \epsilon_{ll}}{\partial a_j} \delta_{ij} + 2 \mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a_j} \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \xi_l}{\partial a_l} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial a_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_j \partial a_j} + \mu \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial a_i \partial a_j} \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial a_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_j \partial a_j} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

On reconnaît les composantes de $\underline{\text{grad}} (\underline{\text{div}} \underline{\underline{\xi}})$ et de $\Delta \underline{\underline{\xi}}$ dans cette expression, ce qui permet d'écrire

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu) \underline{\text{grad}} (\underline{\text{div}} \underline{\underline{\xi}}) + \mu \Delta \underline{\underline{\xi}} . \quad (5.10)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui prend alors le nom "d'équations de Lamé", s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + (\lambda + \mu) \underline{\text{grad}} [\underline{\text{div}} \underline{\underline{\xi}}(\underline{a}, t)] + \mu \Delta \underline{\underline{\xi}}(\underline{a}, t) . \quad (5.11)$$

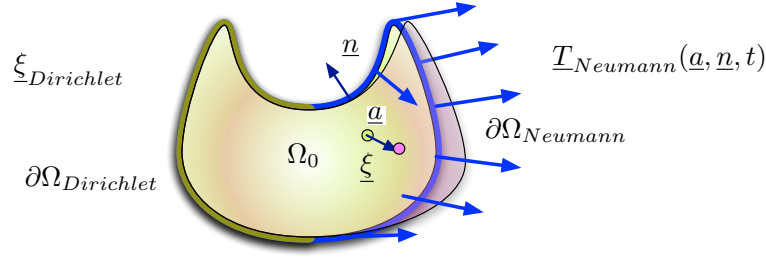


FIGURE 5.3 – Conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

Lorsque la configuration de référence Ω_0 est bornée, la résolution des équations de Lamé nécessite d'imposer des conditions aux limites sur toute la frontière déformée $\partial\Omega(t)$ que l'on approxime par $\partial\Omega_0$ à l'ordre dominant du paramètre de déformation η .

On considère ici deux types de conditions aux limites : déplacement imposé ou contraintes imposées. On suppose que le déplacement est imposée sur la partie $\partial\Omega_{Dirichlet} \subset \partial\Omega_0$ ce qui s'écrit

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \underline{\xi}_{Dirichlet}(\underline{a}, t) \quad \text{pour} \quad \underline{a} \in \partial\Omega_{Dirichlet} . \quad (5.12)$$

Ces conditions aux limites sont dites de type “Dirichlet” dans la terminologie de la théorie des équations aux dérivées partielles. On suppose d'autre part que les contraintes sont imposées sur la partie $\partial\Omega_{Neumann} \subset \partial\Omega_0$ ce qui s'écrit

$$\underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n} = \underline{T}_{Neumann}(\underline{a}, t) \quad \text{pour} \quad \underline{a} \in \partial\Omega_{Neumann} . \quad (5.13)$$

Ces conditions aux limites sont dites de type “Neumann” dans la mesure où $\underline{\sigma}$ est une combinaison linéaire de dérivées partielles des composantes de $\underline{\xi}$ par rapport à l'espace et qu'on le multiplie par la normale $\underline{n}$.

2 Module de Young et coefficient de Poisson

La loi de Hooke inverse, qui exprime le tenseur des petites déformations en fonction du tenseur des contraintes, est écrite à l'aide des deux nouveaux coefficients, le module de Young et le coefficient de Poisson, que l'on relie aux deux coefficients de Lamé. La raison d'être de ces coefficients est justifiée par l'exemple de la traction uniaxiale. Le module de compression est défini à travers l'exemple de la compression uniforme.

2.1 Inversion de la loi de Hooke

La loi de Hooke exprime le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en fonction du tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}$ à travers la relation linéaire

$$\underline{\sigma} = \lambda (\text{tr } \underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} . \quad (5.14)$$

Pour inverser cette relation et exprimer $\underline{\epsilon}$ en fonction de $\underline{\sigma}$, on utilise la décomposition unique en tenseurs sphérique (proportionnel au tenseur identité) et déviatorique (de trace nulle) qui s'écrit

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{(s)} + \underline{\sigma}^{(d)} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}^{(s)} = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^{(d)} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} + \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}}. \quad (5.15)$$

La projection de la loi de Hooke (5.14) sur les espaces vectoriels des tenseurs sphériques et déviatoriques conduit à

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)}. \quad (5.16)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} + \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{1}{2\mu} \right) (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

On voit que l'expression de $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ est de la même forme que la loi de Hooke, ce qui s'explique par le fait que c'est la seule forme de relation linéaire qui respecte l'isotropie. On choisit alors d'introduire les nouveaux paramètres E et ν de manière à écrire la loi de Hooke inverse (5.17) sous la forme

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}. \quad (5.18)$$

Il suffit pour cela de définir E , appelé “module de Young”, et ν , appelé “coefficient de Poisson”, à l'aide des relations

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{(\lambda + \mu)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (5.19)$$

Les “coefficients de Lamé” λ et μ s'expriment alors à l'aide des relations

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.20)$$

La justification du choix des coefficients E et ν pour l'expression de la loi de Hooke inverse (5.17) apparait dans l'expérience de traction uniaxiale.

À titre d'exemple, on mesure $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.30$ pour l'acier $E = 60 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.27$ pour le granite et $E = 0.02 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.50$ pour le caoutchouc. On doit toujours avoir $\mu > 0$ et $3\lambda + 2\mu > 0$.

2.2 Expérience de traction uniaxiale

On considère un solide élastique dont la configuration de référence Ω_0 est un parallélépipède rectangle de côtés l_1 , l_2 et l_3 (voir figure 5.4).

On suppose que l'on applique sur les faces de normales respectives $\underline{e}_1$ et $-\underline{e}_1$ les forces (surfaiques) de contact extérieures à Ω_0 égales à $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) = F \underline{e}_1$ et $\underline{T}(\underline{a}, -\underline{e}_1) = -F \underline{e}_1$. On suppose que les quatres autres faces sont libres de contraintes, c'est-à-dire $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = \underline{0}$. On cherche alors la réponse du solide en supposant que sa rhéologie est homogène et isotrope et que l'on reste dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et donc de l'élasticité linéaire. On néglige les forces extérieures de volume $\underline{f}$.

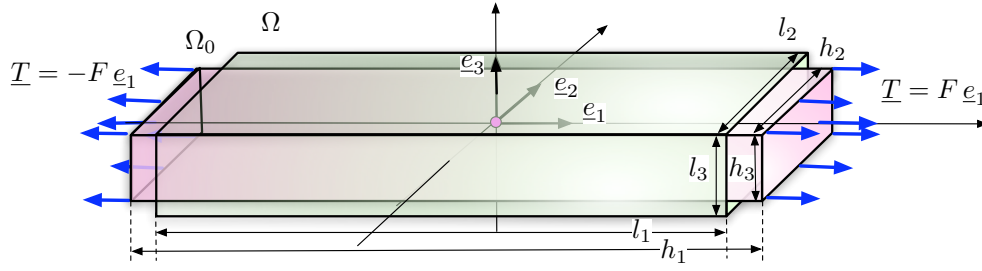


FIGURE 5.4 – Expérience de traction uniaxiale.

En supposant que l'origine du repère est au centre du parallélépipède rectangle, on cherche si un champ de déplacement de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = \Delta_1 a_1 \underline{e}_1 + \Delta_2 a_2 \underline{e}_2 + \Delta_3 a_3 \underline{e}_3 \quad (5.21)$$

est une solution d'équilibre. On remarque tout d'abord que $\underline{\xi}$ est bien solution des équations de Lamé (5.11) dans la mesure où tous les termes de cette équations sont nuls. On peut interpréter les Δ_i comme étant les allongements relatifs dans les trois directions en vérifiant les relations

$$\Delta_i = \frac{h_i - l_i}{l_i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 3, \quad (5.22)$$

où h_1 , h_2 et h_3 sont les longueurs des côtés du parallélépipède rectangle déformé.

Il reste à exprimer Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 en fonction de F pour que les conditions aux limites soient vérifiées. À partir du champ de déplacement $\underline{\xi}$ on déduit le tenseur des petites déformations qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \Delta_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Delta_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Delta_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3. \quad (5.23)$$

Ce tenseur est constant. Le tenseur des contraintes constant

$$\underline{\underline{\sigma}} = F \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad (5.24)$$

vérifie les conditions aux limites. Il vérifie la loi de Hooke si les relations suivantes sont satisfaites :

$$F = E \Delta_1 \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \Delta_3 = -\nu \Delta_1. \quad (5.25)$$

Ces relations simples expliquent le choix du module de Young E et du coefficient de Poisson ν pour caractériser le comportement élastique d'un solide homogène et isotrope.

2.3 Expérience de compression uniforme

On suppose maintenant que le parallélépipède rectangle est soumis à des forces de pression sur toutes ses faces où les forces de contact exercées par son extérieur sont

$$\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = -p \underline{n} \quad (5.26)$$

où p est une pression constante (figure 5.5).

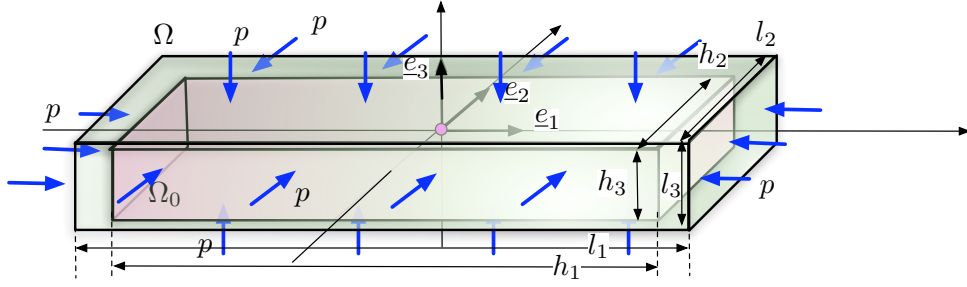


FIGURE 5.5 – Expérience de compression uniforme.

On cherche si un champ de déplacement de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = \Delta_p (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3) \quad (5.27)$$

est une solution d'équilibre. On voit alors que les tenseurs

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \Delta_p \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} \quad (5.28)$$

forment une solution si la relation suivante est vérifiée :

$$-p = (3\lambda + 2\mu) \Delta_p \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_p = -p \frac{1 - 2\nu}{E}. \quad (5.29)$$

On peut interpréter Δ_p à l'aide des volumes $\mathcal{V}_0$ de Ω_0 et $\mathcal{V}$ de Ω en remarquant que

$$\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} = \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} + O(\eta^2) = 3 \Delta_p + O(\eta^2). \quad (5.30)$$

On définit alors le “module de compression” κ_e à l'aide des relations

$$-p = \kappa_e \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} \quad \text{avec} \quad \kappa_e = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}. \quad (5.31)$$

Le bon sens, ou plutôt le second principe de la thermodynamique, requiert l'inégalité $\kappa_e \geq 0$. En effet, une compression $p > 0$ ne peut pas conduire à une augmentation de volume, sauf si le corps est explosif, donc instable. Une conséquence de cette inégalité est que $\nu \leq 1/2$. Pour $\nu = 1/2$, comme c'est le cas pour le caoutchouc, le solide élastique est incompressible.

3 Ondes élastiques

En projetant les équations de Lamé sur les espaces vectoriels respectifs des champs de déplacements à divergence nulle ou bien à rotationnel nul, on décrit deux types d'ondes élastiques, longitudinales et transversales. Toute solution des équations de Lamé se décompose comme une superposition de ces ondes planes élémentaires.

3.1 Projection des équations de Lamé

On considère ici les équations de Lamé (5.11) dans un milieu infini en supposant que $\underline{f} = \underline{0}$, ce qui s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad } (\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi}. \quad (5.32)$$

On note respectivement d et r la divergence et le rotationnel du champ de déplacement $\underline{\xi}$ définis par

$$d(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{\xi}(\underline{a}, t) \quad \text{et} \quad r(\underline{a}, t) = \text{rot } \underline{\xi}(\underline{a}, t). \quad (5.33)$$

En prenant la divergence et le rotationnel des équations de Lamé (5.11) et en utilisant les identités $\text{div grad} = \Delta$ et $\text{rot grad} = \underline{0}$, on obtient respectivement les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} &= c_1^2 \Delta d & \text{et} & \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta r \\ \text{avec} \quad c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} & \text{et} & \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

La divergence d et le rotationnel r du champ $\underline{\xi}$ vérifient donc l'équation des ondes avec des vitesses de propagation respectivement égales à c_1 et c_2 avec $c_2 < c_1$. Comme ces vitesses ne sont pas égales, on doit avoir $r = \underline{0}$ pour les ondes se propageant à la vitesse c_1 et $d = 0$ pour les ondes se propageant à la vitesse c_2 . Ces ondes sont explicitées ci-dessous.

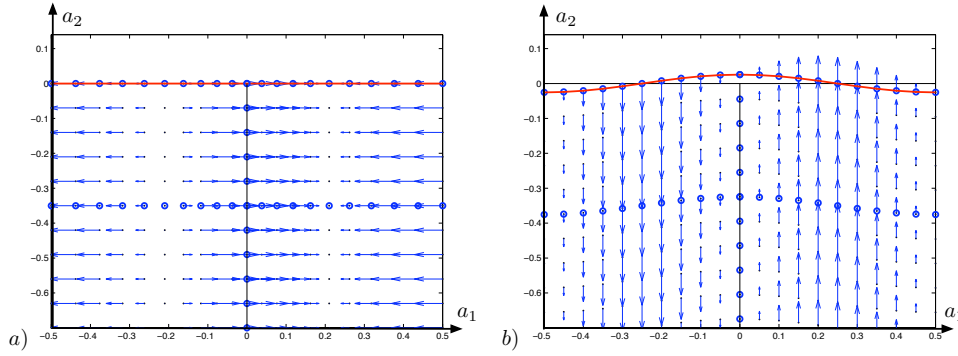


FIGURE 5.6 – Particules et vecteurs vitesses. Onde élastique a) longitudinale ou b) transversale.

3.2 Ondes longitudinales

Les solutions de l'équation $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta d$ sont des combinaisons élémentaires des solutions

$$d(\underline{a}, t) = D e^{i(\underline{k} \cdot \underline{a} - \omega t)} + D^* e^{-i(\underline{k} \cdot \underline{a} - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \omega = c_1 \|\underline{k}\| \quad (5.35)$$

où D est une amplitude complexe et $\|\underline{k}\|$ le module du vecteur d'onde $\underline{k}$. En posant $D = D_m \exp(i\varphi)$ où D_m et φ sont respectivement le module et l'argument de D_m , on peut écrire

$$d(\underline{a}, t) = 2 D_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{a} - \omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = c_1 \|\underline{k}\|. \quad (5.36)$$

En tournant les axes on peut toujours se ramener au cas particulier $\underline{k} = k \underline{e}_1$ avec $k > 0$, on peut écrire

$$d(\underline{a}, t) = 2 D_m \cos[k(a_1 - c_1 t) + \varphi]. \quad (5.37)$$

Ce champ peut être considéré comme la divergence du champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \frac{2 D_m}{k} \sin[k(a_1 - c_1 t) + \varphi] \underline{e}_1 . \quad (5.38)$$

Il s'agit donc d'une onde longitudinale, c'est-à-dire telle que le déplacement s'effectue dans le sens de la propagation de l'onde.

En tournant les axes, on obtient la famille d'ondes longitudinales de la forme

$$\underline{\xi}_L(\underline{a}, t) = L_m \sin(\underline{k} \cdot \underline{a} - c_1 \|\underline{k}\| t + \varphi) , \quad (5.39)$$

où L_m est une amplitude quelconque et $\underline{k}$ un vecteur d'onde quelconque.

3.3 Ondes transversales

On considère le champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \left[T e^{i(k a_1 - \omega t)} + T^* e^{-i(k a_1 - \omega t)} \right] \underline{e}_2 \quad (5.40)$$

où T est une amplitude complexe et $k > 0$ un nombre d'onde réel positif. En posant $T = T_m \exp(i\varphi)$ où T_m et φ sont respectivement le module et l'argument de T_m , on peut écrire

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = 2 T_m \cos(k a_1 - \omega t + \varphi) \underline{e}_2 . \quad (5.41)$$

On en déduit que le rotationnel de $\underline{\xi}$ s'écrit

$$\underline{r}(\underline{a}, t) = -2 k T_m \sin(k a_1 - \omega t + \varphi) \underline{e}_3 . \quad (5.42)$$

En reportant dans l'équation $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \underline{r}$ on voit que $\underline{\xi}$ est solution à condition de satisfaire la relation de dispersion

$$\omega = c_2 k . \quad (5.43)$$

Il s'agit d'une onde transversale, c'est-à-dire telle que le déplacement s'effectue dans un plan perpendiculaire au sens de propagation de l'onde.

En tournant les axes, on obtient la famille générale d'ondes transversales de la forme

$$\underline{\xi}_T(\underline{a}, t) = 2 \underline{T}_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{a} - c_2 \|\underline{k}\| t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \underline{T}_m \cdot \underline{k} = 0 , \quad (5.44)$$

où $\underline{T}_m$ est un vecteur réel quelconque dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde $\underline{k}$.

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

- 1) Expliciter les composantes C_{IK} pour $I = 1, \dots, 6$ et $K = 1, \dots, 6$ de la matrice 6×6 correspondant à la loi de Hooke dans le cas homogène et isotrope, en notant λ et μ les coefficients de Lamé.
- On a $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$, $C_{23} = C_{31} = C_{12} = \lambda$, $C_{32} = C_{13} = C_{21} = \lambda$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2\mu$ et $C_{ij} = 0$ sinon.

- 2) On considère le champ de déplacement $\underline{\xi} = k(a_2^2 \underline{e}_1 + a_3^2 \underline{e}_2 + a_1^2 \underline{e}_3)$ où k est un paramètre constant. On se place sous l'hypothèse des petites perturbations. Calculer $\underline{\sigma}$ en supposant la loi de Hooke vérifiée. En déduire la densité volumique des forces de contact $\underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$. Comparer avec les expressions de $\underline{\text{grad}}(\underline{\text{div}} \underline{\xi})$ et $\Delta \underline{\xi}$.
- | On a $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = k a_2$, $\epsilon_{31} = \epsilon_{13} = k a_3$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = k a_1$ et $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$. Comme $\text{tr} \underline{\epsilon} = 0$, on a $\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon}$. On a $\underline{f} = -\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = -2\mu k(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$. Comme $\underline{\text{div}} \underline{\xi} = 0$ et $\Delta \underline{\xi} = 2k(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$, on a bien $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\underline{\text{div}} \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi}$.
- 3) Expliciter les composantes ϵ_{ij} de $\underline{\epsilon}$ en fonction des composantes σ_{ij} de $\underline{\sigma}$ à l'aide de la loi de Hooke inverse.
- | On a $\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{ii} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$.

NIVEAU II Traction uniaxiale

On considère un parallélépipède rectangle Ω_0 de longueur l_1 , l_2 et l_3 , composé d'un matériau élastique homogène et isotrope. On suppose qu'il est non contraint et que sa densité est ρ_0 . On connaît son module de Young E et son coefficient de Poisson ν . On choisit les axes orthonormés Oa_1 , Oa_2 et Oa_3 parallèles aux arêtes.

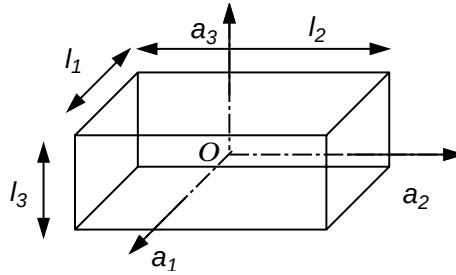


FIGURE 5.7 – Parallélépipède rectangle élastique.

Petite traction

On effectue une expérience de traction sur le solide en appliquant des forces de contact à sa surface. On s'intéresse ici à l'état d'équilibre (pas de dépendance en temps). On mesure alors le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ qui est égal à

$$\xi_1 = \Delta_1 a_1, \quad \xi_2 = -\nu \Delta_1 a_2, \quad \xi_3 = -\nu \Delta_1 a_3. \quad (5.45)$$

On suppose que Δ_1 est très petit devant un : $\Delta_1 \ll 1$. On rappelle que la loi de Hooke permet d'exprimer $\underline{\sigma}$ en fonction de $\underline{\epsilon}$ à l'aide des coefficients de Lamé, ou $\underline{\epsilon}$ en fonction de $\underline{\sigma}$ à l'aide du module de Young et du coefficient de Poisson.

- 1) Calculer le tenseur des petites déformation $\underline{\epsilon}(\underline{a})$. Montrer que l'on est dans le cadre des petites déformations.
- | Le tenseur des petites déformation $\underline{\epsilon}$ est tel que $\epsilon_{11} = \Delta_1$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \Delta_1$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. On est bien dans le cadre des petites déformation puisque ses composantes sont donc toutes d'ordre $\Delta_1 \ll 1$.

- 2) Appliquer la loi de Hooke pour calculer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en tout point, en fonction de E et Δ_1 uniquement. On pourra utiliser les expressions de λ et μ en fonction de E et ν .

On a $\underline{\sigma} = \lambda (\text{tr } \underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} = \lambda (1 - 2\nu) \Delta_1 \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}$. On a donc $\sigma_{11} = \lambda (1 - 2\nu) \Delta_1 + 2\mu \Delta_1 = \Delta_1 E$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda (1 - 2\nu) \Delta_1 - 2\mu \Delta_1 = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ sinon. Donc $\underline{\sigma} = E \Delta_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$.

- 3) En déduire l'expression des forces extérieures de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ pour cette expérience. Calculer les forces volumiques extérieures $\underline{f}(\underline{a})$ en supposant que le solide est à l'équilibre.

Sur les faces de normales $\pm \underline{e}_1$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_1) = \pm F \underline{e}_1$ avec $F = E \Delta_1 = E \Delta_1$. Sur les autres faces, $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = \underline{0}$. Comme l'accélération $\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}$ est nulle, on a $\underline{f} + \text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$. Comme $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$ (coefficients constants), on a $\underline{f} = \underline{0}$.

- 4) Interpréter physiquement cette expérience de petite traction en termes d'allongement de la pièce élastique.

La force surfacique $\pm F \underline{e}_1$ est appliquée sur les faces de normales $\pm \underline{e}_1$. La pièce subit alors un allongement $\Delta_1 = F/E$ dans la direction $\underline{e}_1$ et les compressions $\Delta_2 = \Delta_3 = -\nu \Delta_1$ dans les deux autres directions.

Cisaillement

On suppose maintenant que $l_2 = l_3 = l$. On effectue une expérience de cisaillement sur le solide en appliquant des forces de contact à sa surface. On mesure alors le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ qui est égal à

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = k a_3, \quad \xi_3 = k a_2. \quad (5.46)$$

On suppose que k est très petit devant un : $k \ll 1$.

- 5) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}$. Justifier que l'on est dans le cadre des petites déformations.

On a $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = k$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. On est bien dans le cadre des petites déformations puisque ses composantes sont donc toutes d'ordre $k \ll 1$.

- 6) Appliquer la loi de Hooke pour calculer le tenseur des contraintes en tout point, en fonction de μ et k uniquement. En déduire l'expression de $\underline{\sigma}$ en fonction de μ et de l'angle de glissement γ_{23} uniquement.

Comme $\text{tr } \underline{\epsilon} = 0$, on a $\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon} = \mu \gamma_{23} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$.

- 7) En déduire les forces extérieures de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ exercées lors de l'expérience et dessiner un schéma pour les représenter. Calculer les forces volumiques extérieures $\underline{f}(\underline{a})$ en supposant que le solide est à l'équilibre.

Sur les faces de normales $\pm \underline{e}_2$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_2) = F \underline{e}_3$ avec $F = \mu \gamma_{23}$. Sur les faces de normales $\pm \underline{e}_3$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_3) = F \underline{e}_2$. Sur les autres faces, les forces de contact sont nulles. Comme l'accélération $\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}$ est nulle, on a $\underline{f} + \text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$. Comme $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$ (coefficients constants), on a $\underline{f} = \underline{0}$.

- 8) Interpréter physiquement cette expérience de petit cisaillement sur le solide. À quoi correspondent les directions principales du tenseur des déformations ? Comparer ces directions principales à celles du tenseur de contraintes. Interpréter.

Il s'agit d'une expérience de cisaillement où l'applique des forces tangentielles $\pm F \underline{e}_3$ sur les faces de normales $\pm \underline{e}_2$ et $\pm F \underline{e}_2$ sur les faces de normales $\pm \underline{e}_3$. La réponse du solide est un glissement d'angle $\gamma_{23} = F/\mu$. Les directions principales de $\underline{\epsilon}$ sont $\underline{n}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ et $\underline{n}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 - \underline{e}_3)$ avec des allongements relatifs associés $\Delta^+ = \gamma_{23}/2$ et $\Delta^- = -\gamma_{23}/2$. Dans la base $(\underline{e}_1, \underline{n}^+, \underline{n}^-)$, le tenseur des petites déformations est diagonal et s'écrit $\underline{\epsilon} = \Delta^+ (\underline{n}^+ \otimes \underline{n}^+ + \underline{n}^- \otimes \underline{n}^-)$. La tenseur de contraintes admet les mêmes directions principales. On peut voir l'expérience de cisaillement comme une expérience de traction dans la direction $\underline{n}^+$ superposée à une expérience de compression dans la direction $\underline{n}^-$.

NIVEAU III Torsion d'un arbre métallique

On considère une pièce métallique homogène contenue dans le domaine

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1^2 + a_2^2) \leq R^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq L\}. \quad (5.47)$$

On note ρ_0 sa masse volumique. On note λ et μ ses coefficients de Lamé. Dans tout ce qui suit, on suppose que la section circulaire S_0 d'équation $a_3 = 0$ est immobile (déplacement nul), car encastrée dans un matériau indéformable. On néglige les forces de volume (gravité). On se place dans le cadre des petites perturbations.

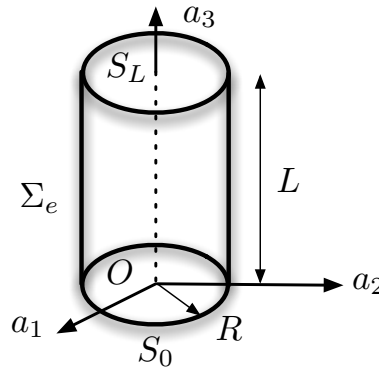


FIGURE 5.8 – Arbre métallique de forme cylindrique.

Équilibre en torsion

On suppose que le système est à l'équilibre et que le déplacement s'écrit

$$\xi_1 = -\alpha a_2 a_3, \quad \xi_2 = \alpha a_1 a_3, \quad \xi_3 = 0. \quad (5.48)$$

avec $\alpha > 0$ et $\eta = \alpha \max(R, L) \ll 1$.

- 1) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a})$ et justifier l'hypothèse des petites déformations.

On a $H_{12} = -\alpha a_3$, $H_{13} = -\alpha a_2$, $H_{21} = \alpha a_3$, $H_{23} = \alpha a_1$ et $H_{ij} = 0$ sinon. On en déduit $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\alpha a_2/2$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \alpha a_1/2$ et $\epsilon_{ij} = 0$. Comme $|\alpha a_1| \leq \eta$, $|\alpha a_2| \leq \eta$ et $|\alpha a_3| \leq \eta$, les composantes de $\underline{\epsilon}$ sont d'ordre η et l'on est bien dans le cadre des petites déformations.

- 2) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ et le comparer à $\underline{\epsilon}(\underline{a})$ au premier ordre du petit paramètre η .

Comme $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \alpha a_3 (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$, on a $C_{11} = C_{22} = 1 + \alpha^2 a_3^2$, $C_{33} = 1 + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)$, $C_{13} = C_{31} = -\alpha a_2 + \alpha^2 a_1 a_3$, $C_{23} = C_{32} = \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 a_3$ et $C_{ij} = 0$ sinon. On a bien $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + O(\eta^2)$.

- 3) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$. En déduire la résultante des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_L d'équation $a_3 = L$.

Comme $\text{tr } \underline{\epsilon} = 0$, l'application de la loi de Hooke conduit à $\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon}$. Les forces de contact exercées sur S_L sont $\underline{T} = \underline{\sigma}(a_1, a_2, L) \cdot \underline{e}_3 = \mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$. Par symétrie, leur résultante, issue de l'intégration de $\underline{T}$ sur S_L , est nulle.

- 4) Montrer que la surface latérale Σ_e , d'équation $(a_1^2 + a_2^2) = R^2$, est libre de contraintes.

Les forces de contact exercées sur Σ_e sont :
 $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \underline{0}$. La surface Σ_e est donc libre de contraintes.

- 5) Calculer le moment résultant en $\underline{0}$ des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_0 .

Les forces de contact exercées sur S_0 sont :
 $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, 0) \cdot (-\underline{e}_3) = -\mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$. Leur moment en $\underline{0}$ est $\underline{\Gamma}_0 = \iint_{S_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}) dS_0 = -\mu \alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = -\mu \alpha \frac{\pi R^4}{2} \underline{e}_3$.

- 6) On suppose que le seuil de rupture du solide est atteint lorsque

$$\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} \geq k_e^2 \quad \text{où} \quad \underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} \quad (5.49)$$

est la partie déviatorique de $\underline{\sigma}$ et $k_e > 0$ une constante (critère de résistance de Von Mises). Au-delà de quelle valeur critique α_c de α , fonction de R , k_e et μ la pièce casse-t-elle ?

On a $\underline{s} = \underline{\sigma}$ et $\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} = \mu^2 \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)$. Son maximum est atteint sur la frontière Σ_e et vaut $\mu^2 \alpha^2 R^2$. La rupture est obtenue pour $\alpha \geq \alpha_c = k_e / (\mu R)$.

Mouvement de torsion

On suppose maintenant que l'arbre est animé du mouvement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \xi_m \sin(k a_3) \sin(\omega t) (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\pi}{2L}. \quad (5.50)$$

- 7) Quelle condition vérifier la pulsation ω pour que $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ soit une solution des équations de Lamé ?

Puisque $\text{div } \underline{\xi} = 0$, les équations de Lamé s'écrivent $\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \mu \Delta \underline{\xi}$. En reportant la forme du déplacement dans ces équations, on obtient $\omega^2 = c_2 k^2$ avec $c_2 = \sqrt{\mu / \rho_0}$.

- 8) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$.

On a $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t) a_2$, $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t) a_1$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon.

- 9) Calculer les forces de surface exercées sur S_L lors de ce mouvement.

Les forces de surfaces sont de la forme :
 $\underline{T}(a_1, a_2, L, t) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = \mu k \xi_m \cos(k L) \sin(\omega t) (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$. On a $\underline{T} = \underline{0}$ puisque $k L = \pi/2$.

- 10) Montrer que le moment des forces de contact exercées par la partie $a_3 \geq l$ du cylindre sur un disque intérieur S_l de centre $l \underline{e}_3$ avec $0 \leq l \leq L$, de rayon R et de normale $\underline{e}_3$ est de la forme $\underline{\Gamma} = \Gamma(l, t) \underline{e}_3$ où Γ est une fonction que l'on déterminera.

Comme $\underline{T}(a_1, a_2, a_3, t) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3$, on a $\Gamma(a_3, t) = \frac{\pi R^4}{2} \mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t)$.

11) Dessiner l'allure de la fonction $\Gamma(0, t)$ en fonction de t .

| La fonction $\Gamma(0, t)$ est une sinusoïde.

12) Dessiner l'allure du profil $\Gamma(a_3, t)$ pour $a_3 \in [0, L]$ pour plusieurs valeurs de t .

| L'oscillation $\Gamma(a_3, t)$ pour $a_3 \in [0, L]$ correspond à un quart d'onde stationnaire avec un ventre en $a_3 = 0$ et un noeud en $a_3 = L$.

13) Interpréter les déformations ou les mouvements de l'ensemble du problème à l'aide de schémas et de quelques commentaires.

| Ce problème étudie des déplacements ou des mouvements de torsions autour de l'axe Oa_3 . L'équilibre stationnaire résulte d'un mouvement de rotation solide imposé sur S_L . L'oscillation est le mouvement que l'on obtient s'il l'on relâche le forçage sur S_L . L'arbre oscille alors à une fréquence $\omega = c_2 \pi / (2 L)$.

Chapitre 6

Cinématique du continu

Sommaire

1	Description eulérienne du mouvement	80
1.1	Détermination des trajectoires	80
1.2	Lignes de courant	81
1.3	Gradient du champ de vitesse	82
2	Transport par les trajectoires	83
2.1	Dérivée particulaire	83
2.2	Champ d'accélération	84
2.3	Transport d'un petit vecteur	85
3	Tenseur des taux de déformations	85
3.1	Variation des longueurs	86
3.2	Variation des angles	86
3.3	Variation des volumes	87

Introduction

Si la représentation lagrangienne des champs est adaptée à la modélisation des solides élastiques, dont les configurations déformées restent proches d'une configuration de référence, la représentation eulérienne est plus appropriée pour la modélisation des fluides qui perdent rapidement la mémoire de la condition initiale. Le point de départ de la description du mouvement est donc la donnée ou la mesure d'un champ de vitesse à partir duquel il convient de reconstituer des trajectoires ou encore la dérivée d'un champ en suivant ces trajectoires. Le gradient de ce champ de vitesse permet de décrire l'évolution de petits vecteurs transportés par le mouvement le long de trajectoires. Sa partie antisymétrique, appelée tenseur des taux de rotations, décrit la rotation solide subie par le voisinage d'une particule. Sa partie symétrique, appelée tenseur des taux de déformations, décrit le taux de variation des longueurs, des angles et des volumes.

1 Description eulérienne du mouvement

À partir de la donnée d'un champ de vitesse en représentation eulérienne, on détermine les trajectoires du mouvement en résolvant un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas général, ces trajectoires sont différentes des lignes de courant instantanées.

1.1 Détermination des trajectoires

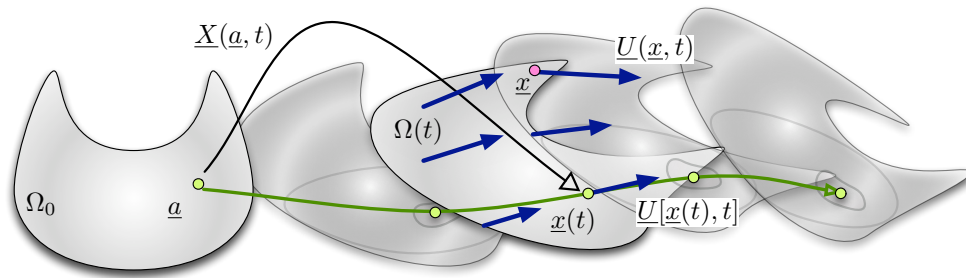


FIGURE 6.1 – Détermination du mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ et des trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ à partir du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$.

On considère un champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ et l'on omet l'exposant (E) pour désigner la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t)$. La trajectoire $\underline{x}(t)$ issue du point $\underline{a}$ à l'instant initial $t = 0$ est solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t] \quad \text{avec} \quad \underline{x}(0) = \underline{a}. \quad (6.1)$$

L'ensemble des solutions de ce système permet de construire le mouvement

$\underline{X}(a, t)$ défini par

$$\underline{X}(a, t) = \underline{x}(t) \quad \text{avec } \underline{x}(t) \text{ trajectoire telle que } \underline{x}(0) = a. \quad (6.2)$$

La représentation lagrangienne de la vitesse est alors définie par la relation

$$\underline{U}^{(L)}(a, t) = \underline{U}[\underline{X}(a, t), t]. \quad (6.3)$$

On peut alors écrire

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(a, t) = \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{U}[\underline{x}(t), t] = \underline{U}[\underline{X}(a, t), t] = \underline{U}^{(L)}(a, t). \quad (6.4)$$

1.2 Lignes de courant

Les trajectoires du mouvement ne doivent pas être confondues avec les lignes de champs de $\underline{U}(\underline{x}, t)$ à l'instant t appelée “lignes de courant”. Ces lignes de champs sont des courbes que l'on peut paramétrer par des fonctions $s \mapsto \underline{y}(s)$ où s est un paramètre réel. Ces fonctions doivent être telles que leur vecteur tangent $\frac{d\underline{y}}{ds}$ soit partout parallèle au vecteur $\underline{U}$ ce que l'on écrit

$$\frac{d\underline{y}}{ds}(s) \wedge \underline{U}[\underline{y}(s), t] = \underline{0}. \quad (6.5)$$

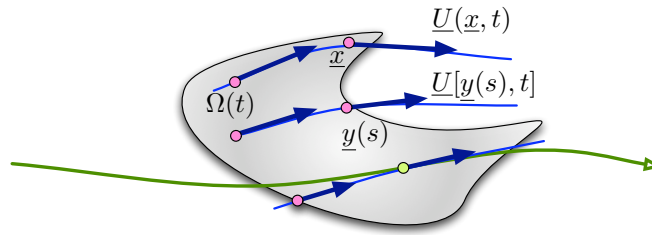


FIGURE 6.2 – Lignes de champ $\underline{y}(s)$ à l'instant t .

On en déduit qu'il existe une fonction $\phi(s)$ telle que

$$\frac{d\underline{y}}{ds}(s) = \phi(s) \underline{U}[\underline{y}(s), t]. \quad (6.6)$$

Cette fonction doit être strictement positive pour que la courbe paramétrée $\underline{y}(s)$ décrive tout sa ligne de champ lorsque s décrit la droite réelle. On peut ainsi choisir $\phi(s)$ par simplicité ou $\phi(s) = \|\underline{U}[\underline{y}(s), t]\|^{-1}$ pour que s soit la coordonnée curviligne de la ligne de courant.

Une formulation courante, mais peu explicite, consiste à écrire

$$\frac{dy_1}{U_1} = \frac{dy_2}{U_2} = \frac{dy_3}{U_3}. \quad (6.7)$$

Cette écriture conduit souvent au choix de l'une des coordonnées y_1 , y_2 ou y_3 comme paramètre s , au moins localement.

Dans le cas général, les trajectoires et les lignes de champs ne décrivent pas les mêmes courbes dans la mesure où elles ne vérifient pas les mêmes équations :

$$\begin{array}{ll} \text{Trajectoires :} & \dot{\underline{x}}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t] \quad \text{pour tout } t. \\ \text{Lignes de courant :} & \dot{\underline{y}}(s) = \phi(s) \underline{U}[\underline{y}(s), t] \quad \text{pour } t \text{ fixé.} \end{array} \quad (6.8)$$

Dans le cas particulier d'un champ de vitesse "stationnaire", c'est-à-dire tel que $\underline{U}(\underline{x})$ ne dépend pas du temps, les courbes parcourues par les trajectoires et les lignes de courant sont confondues. En effet, le choix de $\phi(s) = 1$ permet de confondre l'équation $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ des trajectoires et l'équation $\dot{\underline{y}}(s) = \underline{U}[\underline{y}(s), t]$ des lignes de courant.

1.3 Gradient du champ de vitesse

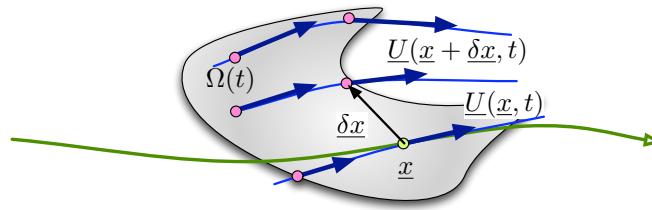


FIGURE 6.3 – Variation de $\underline{U}(\underline{x}, t)$ en fonction de l'espace.

Étant donné le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$, on définit son gradient $\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t)$ dont les composantes sont

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad K_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t). \quad (6.9)$$

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut alors écrire

$$\underline{U}(\underline{x} + \underline{\delta x}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} + O(\delta x^2), \quad (6.10)$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ est la norme de $\underline{\delta x}$. On peut alors décomposer $\underline{\underline{K}}$ en la somme de deux tenseurs d'ordre deux respectivement symétrique et antisymétrique à l'aide de la relation

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}). \quad (6.11)$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ sont respectivement appelés "tenseur des taux de rotation" et "tenseur des taux de déformation". Les composantes de ces tenseurs s'écrivent respectivement

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{et} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]. \quad (6.12)$$

Le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ est tel que pour tout vecteur $\underline{\delta x}$ on puisse écrire

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} = \underline{\omega} \wedge \underline{\delta x}. \quad (6.13)$$

Ses composantes sont telles que $\omega_i + \Omega_{jk} = 0$ si $\epsilon_{ijk} = 1$. On en déduit qu'il est relié au rotationnel de la vitesse $\underline{U}$ par la relation

$$\omega(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{U}(\underline{x}, t) . \quad (6.14)$$

2 Transport par les trajectoires

La dérivée d'une grandeur le long d'une trajectoire, appelée dérivée particulière, s'exprime en représentation eulérienne en fonction de toutes ses dérivées partielles et du champ de vitesse. Le champ d'accélération est alors la dérivée particulière du champ de vitesse. Un petit vecteur transporté par le mouvement, c'est-à-dire reliant deux trajectoires voisines, obéit à une équation d'évolution faisant intervenir le gradient du champ de vitesse.

2.1 Dérivée particulière

On considère un champ B dont la représentation eulérienne $B(\underline{x}, t)$ est liée à la représentation lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ à travers le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ et la relation

$$B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) . \quad (6.15)$$

Étant donnée la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ issue de la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{a}$, on considère la dépendance temporelle $b(t)$ du champ B obtenue en suivant cette trajectoire et définie par la relation

$$b(t) = B[\underline{x}(t), t] = B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) . \quad (6.16)$$

On peut alors calculer la dérivée de $b(t)$ qui s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= \frac{\partial B}{\partial t}[\underline{x}(t), t] + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{\partial B}{\partial x_j}[\underline{x}(t), t] \\ &= \frac{\partial B}{\partial t}[\underline{x}(t), t] + U_j[\underline{x}(t), t] \frac{\partial B}{\partial x_j}[\underline{x}(t), t] \\ &= \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B \right) [\underline{x}(t), t] . \end{aligned} \quad (6.17)$$

On définit alors le champ $\frac{dB}{dt}$ dont la représentation eulérienne s'écrit

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} B(\underline{x}, t) . \quad (6.18)$$

Ce champ est appelé “dérivée particulière” du champ B dans la mesure où il représente la dérivée de B le long d'une trajectoire. D'autre part, l'égalité $b(t) = B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de l'équation (6.16) permet d'écrire

$$\dot{b}(t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) . \quad (6.19)$$

La comparaison de cette relation avec l'équation (6.17) et la notation $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ permettent d'écrire

$$\frac{dB}{dt}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) . \quad (6.20)$$

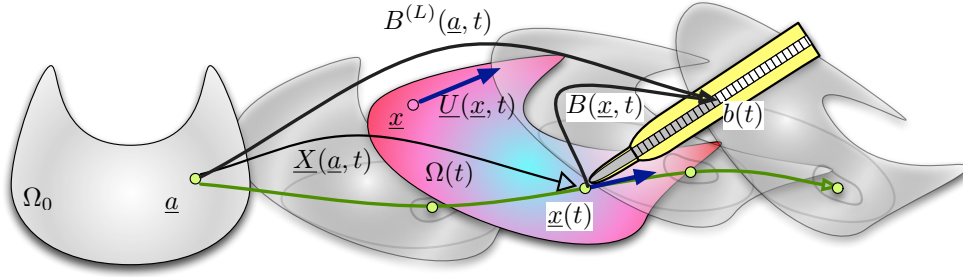


FIGURE 6.4 – Relation entre les représentations eulérienne $B(\underline{x}, t)$ et lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ B .

On en déduit que la représentation lagrangienne de la dérivée particulaire $\frac{dB}{dt}$ s'écrit

$$\frac{dB^{(L)}}{dt}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) \cdot c \quad (6.21)$$

2.2 Champ d'accélération

La dérivée particulaire d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}, t) = V_i(\underline{x}, t) \underline{e}_i$ s'écrit

$$\frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{dV_i}{dt}(\underline{x}, t) \underline{e}_i = \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] (\underline{x}, t) \underline{e}_i \quad (6.22)$$

dans la mesure où les vecteurs de base $\underline{e}_i$ sont indépendants de l'espace et du temps. En utilisant le gradient $\underline{\text{grad}} \underline{V}$ du champ $\underline{V}$, de composantes $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$, et en définissant l'opérateur $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, on peut alors écrire

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{V} \cdot \underline{U} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V}, \quad (6.23)$$

la parenthèse de l'expression $(\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{V}$ étant inutile dans la mesure où la notation $\underline{\text{grad}} \underline{V}$ (un seul trait sous le gradient) n'est pas définie.

Le champ d'accélération est défini par sa représentation lagrangienne

$$\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial \underline{U}^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(\underline{a}, t). \quad (6.24)$$

Par définition de la dérivée particulaire, sa représentation eulérienne s'écrit

$$\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{K}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) \quad (6.25)$$

où $\underline{K} = \underline{\text{grad}} \underline{U}$ est le gradient de $\underline{U}$. Ses composantes vérifient

$$\Gamma_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_j + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} \quad (6.26)$$

Comme $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{U} = \underline{\omega} \wedge \underline{U}$ et que $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{U}$, on voit que l'on peut écrire

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2. \quad (6.27)$$

2.3 Transport d'un petit vecteur

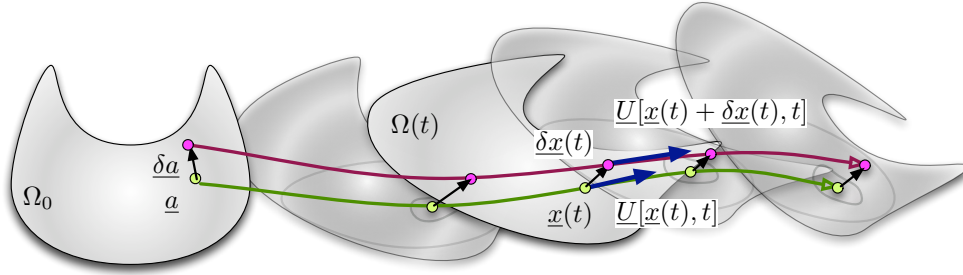


FIGURE 6.5 – Transport d'un petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ par la trajectoire $\underline{x}(t)$.

On considère un petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ issue du point $\underline{a}$ à l'instant $t = 0$. Un tel vecteur est la différence de deux trajectoires $\underline{x}(t)$ et $\underline{x}(t) + \underline{\delta x}(t)$ tel que

$$\underline{\delta x}(t) = \underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}, t) - \underline{X}(\underline{a}, t) \quad (6.28)$$

où $\underline{\delta a} = \underline{\delta x}(0)$ est la valeur du petit vecteur à l'instant $t = 0$. Comme $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ pour toute trajectoire, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t) + \underline{\delta x}(t), t] - \underline{U}[\underline{x}(t), t] = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) + O[\delta x^2(t)] \quad (6.29)$$

où $\delta x(t) = \|\underline{\delta x}(t)\|$ est la norme du petit vecteur. En supposant $\underline{\delta x}(t)$ infinitésimal, on pourra donc écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) \quad (6.30)$$

En utilisant la décomposition de $\underline{K}$ en partie antisymétrique et symétrique, on peut alors écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{\omega}[\underline{x}(t), t] \wedge \underline{\delta x}(t) + \underline{D}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) \quad (6.31)$$

Le terme $\underline{\omega} \wedge \underline{\delta x}$ de cette équation traduit un mouvement de rotation solide de vecteur rotation $\underline{\omega}$ pour les particules situées dans le voisinage de la trajectoire $\underline{x}(t)$ (théorie des torseurs et des distributeurs). Le terme $\underline{D} \cdot \underline{\delta x}$ traduit un mouvement de déformation qui sera étudié plus loin par l'intermédiaire des taux de variation des longueurs, des angles et des volumes.

3 Tenseur des taux de déformations

Le tenseur des taux de déformation, partie symétrique du gradient du champ de vitesse, permet de décrire la variation des longueurs, des angles et des volumes associés à des petits vecteurs transportés par le mouvement.

3.1 Variation des longueurs

On considère deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ transportés par la trajectoire $\underline{x}(t)$. Il vérifient donc

$$\frac{d}{dt} \underline{\delta x}(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \underline{\delta x}'(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) . \quad (6.32)$$

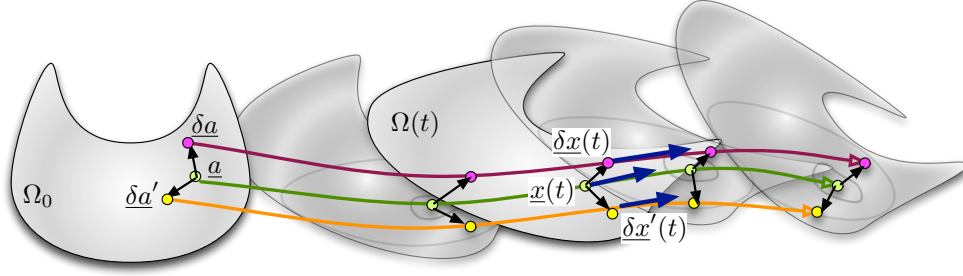


FIGURE 6.6 – Transport de deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ par la trajectoire $\underline{x}(t)$.

La dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire vérifie donc

$$\frac{d}{dt} (\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}') = {}^t(\underline{K} \underline{\delta x}) \underline{\delta x}' + {}^t \underline{\delta x} \underline{K} \underline{\delta x}' = {}^t \underline{\delta x} (\underline{K} + {}^t \underline{K}) \underline{\delta x}' . \quad (6.33)$$

On peut donc faire apparaître le tenseur des taux de déformation $\underline{D}$ et écrire

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 \underline{\delta x}(t) \cdot \underline{D}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) . \quad (6.34)$$

où $\underline{D}$ est le tenseur des taux de déformation.

En choisissant $\underline{\delta x}' = \underline{\delta x}$, on peut écrire

$$\frac{1}{\|\underline{\delta x}(t)\|} \frac{d\|\underline{\delta x}(t)\|}{dt} = \frac{\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{D}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|^2} , \quad (6.35)$$

où $\frac{1}{\|\underline{\delta x}\|} \frac{d\|\underline{\delta x}\|}{dt}$ est le taux de variation relatif des longueurs pour un petit vecteur ayant la direction de $\underline{\delta x}$ à l'instant t dans le voisinage de $\underline{x}(t)$. On remarque en effet que ce taux ne dépend pas de la norme du petit vecteur $\underline{\delta x}$. Si $\underline{\delta x}(t) = \delta x \underline{e}_1$ à l'instant t , ce taux de variation est égal à D_{11} . Les composantes diagonales de $\underline{D}$ sont donc les taux de variation relatifs des longueurs dans les directions des vecteurs de base.

3.2 Variation des angles

On suppose maintenant qu'à l'instant $t = t_*$, les deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ transportés par le mouvement sont orthogonaux ce que l'on écrit

$$\underline{\delta x}(t_*) \cdot \underline{\delta x}'(t_*) = 0 . \quad (6.36)$$

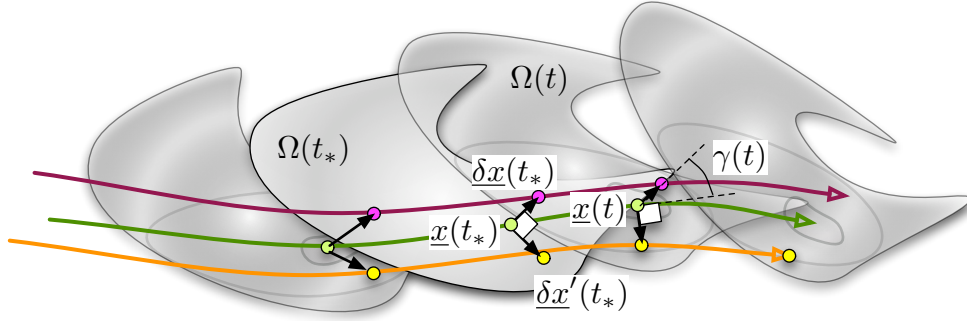


FIGURE 6.7 – Transport de deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ orthogonaux à $t = t_*$ et angle de glissement $\gamma(t)$.

On définit l'angle de glissement $\gamma(t)$ comme étant complémentaire de l'angle que forment ces petits vecteurs et l'on écrit

$$\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t) = \|\underline{\delta x}(t)\| \|\underline{\delta x}'(t)\| \sin \gamma(t) \quad \text{avec } \gamma(t_*) = 0. \quad (6.37)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}') = \frac{d}{dt}(\|\underline{\delta x}\| \|\underline{\delta x}'\|) \sin \gamma + \|\underline{\delta x}\| \|\underline{\delta x}'\| \frac{d\gamma}{dt} \cos \gamma. \quad (6.38)$$

Comme $\gamma(t_*) = 0$, on en déduit

$$\left. \frac{d}{dt}(\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}') \right|_{t_*} = \left(\|\underline{\delta x}\| \|\underline{\delta x}'\| \frac{d\gamma}{dt} \right) \Big|_{t_*} \quad (6.39)$$

En remplaçant t_* par t dans cette dernière équation et en utilisant l'équation (6.34) on en déduit

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = 2 \frac{\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{D}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\| \|\underline{\delta x}'(t)\|} \quad \text{si } \gamma(t) = 0. \quad (6.40)$$

On remarque que ce taux de variation de l'angle de glissement ne dépend que des directions des deux petits vecteurs orthogonaux à l'instant t considéré. En choisissant $\underline{\delta x} = \delta x \underline{e}_1$ et $\underline{\delta x}' = \delta x' \underline{e}_2$, on voit que

$$\frac{d\gamma_{12}}{dt} = 2 D_{12}. \quad (6.41)$$

Les composantes non diagonales de $\underline{D}$ sont donc égales à la moitié des angles de glissement des directions des vecteurs de base.

3.3 Variation des volumes

On considère maintenant trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t)$ transportés par la trajectoire $\underline{x}(t)$ et on suppose qu'ils engendrent un petit cube

de côté δx à l'instant $t = t_*$ et qu'ils alignés avec les vecteurs de base à travers les relations

$$\underline{\delta x}(t_*) = \delta x \underline{e}_1, \quad \underline{\delta x}'(t_*) = \delta x \underline{e}_2, \quad \underline{\delta x}''(t_*) = \delta x \underline{e}_3. \quad (6.42)$$

Le volume $\mathcal{V}(t)$ du parallélépipède qu'ils engendrent à un instant t quelconque s'écrit

$$\delta \mathcal{V}(t) = (\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t)) \quad (6.43)$$

en supposant que ce produit mixte est positif.

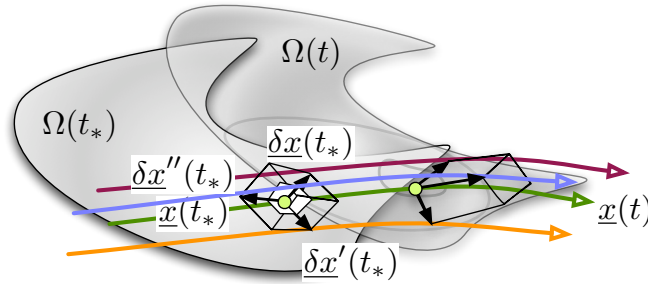


FIGURE 6.8 – Transport de trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t)$ formant un cube à $t = t_*$.

La dérivation de cette équation conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) &= \left(\underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t) \right) \\ &+ \left(\underline{\delta x}(t), \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t) \right) \\ &+ \left(\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}''(t) \right). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Comme les petits vecteurs sont proportionnels aux vecteurs de base pour $t = t_*$, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t_*) &= \delta x^3 \left[(\underline{K} \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) + (\underline{e}_1, \underline{K} \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_3) + (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{K} \cdot \underline{e}_3) \right] \Big|_{[\underline{x}(t_*), t_*]} \\ &= \delta x^3 [K_{11} + K_{22} + K_{33}] \Big|_{[\underline{x}(t_*), t_*]} = \delta \mathcal{V}(t_*) \operatorname{tr} \underline{K}[\underline{x}(t_*), t_*] \\ &= \delta \mathcal{V}(t_*) \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t_*), t_*]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

En recouvrant un petit domaine quelconque $\delta \mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement par des petits cubes à l'instant t , on démontre que le taux de variation relative des petits volumes s'écrit

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t), t] \quad (6.46)$$

où $\underline{x}(t)$ est une trajectoire proche de $\delta \mathcal{V}(t)$.

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

On considère le champ de vitesse $\underline{U} = l\omega [\sin \varphi(x_3, t) \underline{e}_1 - \cos \varphi(x_3, t) \underline{e}_2]$ où $\varphi(x_3, t) = kx_3 - \omega t$. On suppose que l , ω et k sont des constantes positives.

- 1) Déterminer les trajectoires $\underline{x}(t)$ associées à ce champ de vitesse. En déduire l'expression de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$. Quelle est la forme de ces trajectoires.

Les trajectoires sont solution de $\frac{dx_1}{dt} = l\omega \sin(kx_3 - \omega t)$, $\frac{dx_2}{dt} = -l\omega \cos(kx_3 - \omega t)$ et $\frac{dx_3}{dt} = 0$. On en déduit les trajectoires $\underline{x}(t)$ telle que $x_3(t) = a_3$,

$$x_1(t) = a_1 + l [\cos(ka_3 - \omega t) - \cos(ka_3)] \quad \text{et} \quad x_2(t) = a_2 + l [\sin(ka_3 - \omega t) - \sin(ka_3)].$$

On a donc $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + l [\cos \varphi(a_3, t) \underline{e}_1 + \sin \varphi(a_3, t) \underline{e}_2]$. Ces trajectoires sont de cercles de rayon l .

- 2) Décrire les lignes de courant à l'instant t par un paramétrage $s \mapsto \underline{y}(s)$ sous la forme $\underline{y}(s) = \underline{y}(0) + \underline{Y}(s)$ où $\underline{Y}(s)$ est une fonction que l'on déterminera. Quelle est la nature de ces lignes de courant.

Les lignes de courant sont données par $\frac{dy}{ds}(s) = \phi(s) \underline{U}[\underline{y}(s), t]$. En choisissant $\phi(s) = 1$, on peut écrire $\frac{dy_1}{ds} = l\omega \sin \varphi(y_3, t)$, $\frac{dy_2}{ds} = -l\omega \cos \varphi(y_3, t)$ et $\frac{dy_3}{ds} = 0$. On en déduit $y_3(s) = y_3(0)$, $y_1(s) = y_1(0) + l\omega \sin \varphi[y_3(0), t] s$ et $y_2(s) = y_2(0) - l\omega \cos \varphi[y_3(0), t] s$. Les lignes de courant sont donc des droites.

- 3) Expliciter les composantes du gradient du champ de vitesse $\underline{K}(\underline{x}, t)$, du tenseur des taux de déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$ et du tenseur des taux de rotations $\underline{\Omega}(\underline{x}, t)$. En déduire le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$. Comparer ce vecteur avec $\underline{U}$.

On a $K_{13} = l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $K_{23} = l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $K_{ij} = 0$ sinon. On a $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $D_{23} = D_{32} = \frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. On a $\Omega_{13} = -\Omega_{31} = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $\Omega_{23} = -\Omega_{32} = \frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $\Omega_{ij} = 0$ sinon. Comme $\Omega_{31} + \omega_2 = 0$ et $\omega_1 + \Omega_{23} = 0$, on a $\omega_1 = -\frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$, $\omega_2 = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$ et $\omega_3 = 0$. On remarque que $\underline{\omega} = \frac{1}{2} k \underline{U}$.

- 4) On considère le petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par la trajectoire $\underline{x}(t) = l [\cos(\omega t) - 1] \underline{e}_1 - l \sin(\omega t) \underline{e}_2$ issue du point $\underline{x}(0) = \underline{a} = \underline{0}$. On suppose que $\underline{\delta x}(0) = \delta x \underline{e}_3$. Exprimer les coordonnées de $\underline{\delta x}(t)$. Décrire le mouvement de $\underline{\delta x}(t)$.

Comme $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t)$, on peut écrire $\frac{d}{dt} \delta x_1 = \delta x_3 l\omega k \cos(\omega t)$, $\frac{d}{dt} \delta x_2 = -\delta x_3 l\omega k \sin(\omega t)$ et $\frac{d}{dt} \delta x_3 = 0$. On en déduit $\delta x_1(t) = \delta x l k \sin(\omega t)$, $\delta x_2(t) = \delta x l k \cos(\omega t)$ et $\delta x_3(t) = \delta x$. Le petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ décrit un cercle.

- 5) On considère le champ $B(\underline{x}, t) = \gamma x_1 t$. Calculer $\frac{\partial B}{\partial t}$, $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B$ et $\frac{dB}{dt}$.

On a $\frac{\partial B}{\partial t} = \gamma x_1$, $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B = \gamma l \omega t \sin \varphi(x_3, t)$ et $\frac{dB}{dt} = \gamma x_1 + \gamma l \omega t \sin \varphi(x_3, t)$.

- 6) On considère le champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}, t)$ tel que $V_1 = x_1 \cos \varphi(x_3, t) + x_2 \sin \varphi(x_3, t)$, $V_2 = x_1 \sin \varphi(x_3, t) - x_2 \cos \varphi(x_3, t)$ et $V_3 = 0$. Calculer $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}$, $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V}$ et la dérivée particulière $\frac{d\underline{V}}{dt}$.

On a $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = \omega(x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi) \underline{e}_1 + \omega(-x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) \underline{e}_2$ et $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V} = l\omega \sin \varphi (\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2) - l\omega \cos \varphi (\sin \varphi \underline{e}_1 - \cos \varphi \underline{e}_2) = l\omega \underline{e}_2$. D'où $\frac{d\underline{V}}{dt} = l\omega \underline{e}_2 + x_1(\sin \varphi \underline{e}_1 - \cos \varphi \underline{e}_2) + x_2(-\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2)$.

- 7) Calculer $\underline{K}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t)$. En déduire l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$. Comparer ce vec-

teur avec $\underline{e}_3 \wedge \underline{U}$. Calculer $\underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}$ et $\underline{\text{grad}} \underline{U}^2$. Commenter.

On a $\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{0}$, d'où $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \underline{0}$. On a donc $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ ce qui entraîne $\frac{d}{dt} \underline{U} = l\omega^2(-\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2) = \omega \underline{e}_3 \wedge \underline{U}$. Comme $\underline{\text{rot}} \underline{U} = -k\underline{U}$ et $\underline{U}^2 = l^2 \omega^2$, on a $\underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} = \underline{0}$ et $\underline{\text{grad}} \underline{U}^2 = 0$, ce qui est consistant avec $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 = \underline{0}$.

8) Indiquer le taux de variation des longueurs de petits vecteurs orientés dans les directions de la base canonique. Comparer avec leur évolution donnée par la relation $\frac{d}{dt} \delta \underline{x} = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \delta \underline{x}$.

Ces taux de variations sont nuls car $D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0$. Pour cette exemple particulier, on a même $\frac{d}{dt} \delta \underline{x} = \underline{0}$ pour les petits vecteurs tels que $\delta \underline{x}(0) \wedge \underline{e}_i$ avec $i = 1, \dots, 3$, compte-tenu de la structure de $\underline{K}$.

9) Indiquer les taux de variation $\frac{d\gamma_{12}}{dt}$, $\frac{d\gamma_{23}}{dt}$ et $\frac{d\gamma_{31}}{dt}$ dans angles de glissement des directions de bases.

On a $\frac{d\gamma_{12}}{dt} = 0$, $\frac{d\gamma_{23}}{dt} = 2D_{23} = l\omega k \sin \varphi$ et $\frac{d\gamma_{31}}{dt} = 2D_{13} = l\omega k \cos \varphi$.

10) Calculer le taux de variation des volumes.

On a $\frac{1}{\delta \mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \text{div} \underline{U}[\underline{x}(t), t] = 0$.

NIVEAU II Rotation et déformation

Le vecteur taux de rotation est défini par $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{U}$ en représentation eulérienne. Le tenseur des taux de déformation $\underline{D}$ est la partie symétrique du gradient de la vitesse exprimée en représentation eulérienne.

1) *Écoulement purement cisailé.* On considère un écoulement dont le champ de vitesse est $U_1 = F(x_2)$ et $U_2 = U_3 = 0$. Calculer $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$. Tracer la trajectoire d'une particule. Discuter l'éventuelle rotation de la particule sur elle-même. Calculer les directions propres de $\underline{D}$ pour en déduire une description de sa déformation.

On a $K_{12} = F'(x_2)$ et $K_{ij} = 0$ sinon. D'où $D_{12} = D_{21} = F'(x_2)/2$ et $D_{ij} = 0$ sinon. On a $\underline{\omega} = -\frac{1}{2} F'(x_2) \underline{e}_3$. Les trajectoires vérifient $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}(\underline{x})$ et donc $\frac{dx_1}{dt} = F(x_2)$, $\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0$. D'où $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ et $x_1 = a_1 + F(a_2)t$. Les trajectoires sont des droites. Une particule transportée par le mouvement tourne avec la vitesse angulaire $-F'(a_2)/2$ dans le plan (a_1, a_2) . En diagonalisant $\underline{D}$, on voit que son taux de déformation est de $F'(a_2)/2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ et de $-F'(a_2)/2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$. Il est nul dans la direction $\underline{e}_3$.

2) *Écoulement en rotation solide.* Mêmes questions pour $U_1 = -\Omega x_2$, $U_2 = \Omega x_1$ et $U_3 = 0$. Exprimer la vitesse en coordonnées cylindriques ainsi que $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$. Montrer que $\underline{\Omega} = \Omega(-\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$.

On a $K_{12} = -\Omega$, $K_{21} = \Omega$ et $K_{ij} = 0$ sinon. D'où $\underline{D} = \underline{0}$ et $\underline{\omega} = \Omega \underline{e}_3$. Les trajectoires vérifient $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}(\underline{x}) = \Omega \underline{e}_3 \wedge \underline{x}$. On a donc $\frac{d}{dt} \underline{x}^2 = 2\underline{x} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = 0$. Comme $|\underline{x}|$ est constant, les trajectoires sont des cercles de centre O . Une particule transportée par le mouvement tourne avec la vitesse angulaire Ω dans le plan (a_1, a_2) . Elle n'est pas déformée. Il s'agit d'un mouvement de rotation solide. On vérifie que l'on a bien $\underline{\Omega} \cdot \delta \underline{x} = \underline{\omega} \wedge \delta \underline{x}$ pour tout $\delta \underline{x} = \delta x_r \underline{e}_r + \delta x_\theta \underline{e}_\theta$ pour l'expression indiquée.

3) *Écoulement dans un cyclone.* On considère le champ de vitesse qui s'écrit $\underline{U}(r, \theta, z) = -\kappa \underline{e}_\theta(\theta)/r$ en coordonnées cylindriques. Calculer $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$ en coordonnées cylindriques. Tracer la trajectoire d'une particule. Discuter l'éventuelle rotation de la particule sur elle-même ainsi que sa déformation.

On a $U_r = 0$, $U_\theta = -\kappa/r$ et $U_z = 0$ en coordonnées cylindriques. Dans ces coordonnées, les seules composantes non nulles de $\underline{\underline{K}}$ sont $K_{\theta r} = U_{\theta,r} = \kappa/r^2$ et $K_{r\theta} = -U_{\theta,r} = \kappa/r^2$. On a donc $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{0}$ et $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{K}}$. En diagonalisant $\underline{\underline{D}}$, on voit que son taux de déformation est de κ/r^2 dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_r + \underline{e}_\theta)$ et de $-\kappa/r^2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_r - \underline{e}_\theta)$. Il est nul dans la direction $\underline{e}_3$. Il s'agit du champ de vitesse induit par un tourbillon ponctuel centré en O . La vitesse est infini en ce point.

NIVEAU III Mouvements avec fonction de courant

On considère le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ tel que $w = 0$ et

$$u(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial y} \quad \text{et} \quad v(\underline{x}, t) = \frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial x}, \quad (6.47)$$

où $\psi(\underline{x})$ est un champ quelconque appelée “fonction de courant” associée au champ $\underline{U}(\underline{x})$.

1) Montrer que l'on peut écrire $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \text{grad } \psi$.

| Il suffit d'écrire $\underline{e}_z \wedge \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \underline{e}_z \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \underline{e}_y - \frac{\partial \psi}{\partial z} \underline{e}_x + \underline{0}$.

2) Montrer qu'un mouvement qui admet une fonction de courant est isochore.

| On calcule $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$. Le mouvement est donc isochore.

3) Exprimer le rotationnel d'un tel mouvement en fonction de $\Delta \psi$.

| On a $\text{rot } \underline{U} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \underline{e}_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \underline{e}_z = \Delta \psi \underline{e}_z$.

4) On considère une courbe $\underline{x}(s)$, paramétré par une variable s , vérifiant $\psi[\underline{x}(s), t_*] = C$ où C est une constante. En calculant la dérivée de $\psi[\underline{x}(s), t_*]$ par rapport à s pour le temps t_* fixé, montrer que la vitesse $\underline{U}$ est tangente en tout point à la courbe $\underline{x}(s)$.

| On a $\frac{d}{ds} \psi[\underline{x}(s), t_*] = \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) [\underline{x}(s), t_*] = \left(\frac{dx}{ds} v - \frac{dy}{ds} u \right) [\underline{x}(s), t_*] = 0$. On a donc $\frac{dx(s)}{ds} \wedge \underline{U}[\underline{x}(s), t_*] = \underline{0}$. Les courbes $\underline{x}(s)$ sont donc bien des lignes de courant.

5) En déduire le tracé des trajectoires dans le cas où le mouvement est stationnaire, c'est-à-dire lorsque le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ ne dépend pas du temps,

| Comme le champ de vitesse est stationnaire (indépendant du temps), les trajectoires suivent le même tracé que les lignes de champs. Elle sont donc sur des courbes $\psi[\underline{x}(s)] = C$ où C est une constante.

Écoulement en coin

On considère un écoulement dont la vitesse est $u = \gamma(x^2 - y^2)$, $v = -2\gamma xy$ et $U_z = 0$.

6) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ et interpréter ses composantes. Calculer la divergence du champ de vitesse et en déduire le taux de variation des volumes?

| On a $K_{xx} = -K_{yy} = 2\gamma x$, $K_{xy} = K_{yx} = 2\gamma y$ et $K_{ij} = 0$ sinon. D'où $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{0}$. On a $\text{div } \underline{U} = \text{tr } \underline{\underline{D}} = 0$. Le mouvement est isochore.

- 7) Montrer que ce mouvement admet la fonction de courant $\psi(\underline{x}) = \gamma \left(\frac{1}{3} y^3 - x^2 y \right)$. En déduire l'existence de trajectoires rectilignes que l'on explicitera.

On vérifie que $u = -\psi_{,y}$ et $v = \psi_{,x}$. Les trajectoires vérifient $\psi(x, y) = C$ où C est une constante. Pour $C = 0$, on voit que les droites $y = 0$, $y = \sqrt{3} x$ et $y = -\sqrt{3} x$ supportent des trajectoires rectilignes.

- 8) Calculer le rotationnel du champ de vitesse. Calculer $\Delta\psi$. Commenter.

Comme $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{0}$, on a $\underline{\text{rot}} \underline{U} = \underline{0}$. On calcule $\Delta\psi = 0$. Ce résultat est consistant avec la relation $\underline{\text{rot}} \underline{U} = \Delta\psi \underline{e}_z$ démontré plus haut.

Chapitre 7

Équations de bilan

Sommaire

1	Théorèmes de transport	94
1.1	Domaine transporté par le mouvement	94
1.2	Conservation de la masse	95
1.3	Théorèmes de transport complémentaires	96
2	Formulation des équations de bilan	97
2.1	Formulation intégrale	98
2.2	Formulations en bilan locaux	98
2.3	Relations de saut	99
3	Principe fondamental de la dynamique	100
3.1	Modélisation des efforts	101
3.2	Tenseur des contraintes	102
3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	103

Introduction

On appelle théorèmes de transport les relations qui permettent de dériver par rapport au temps des intégrales sur des domaines transportés par le mouvement. Ces théorèmes permettent de formuler la loi de conservation de la masse pour la représentation eulérienne de la masse volumique. Elles permettent également de dériver les équations de bilan locaux à partir des lois de bilan exprimés en formulation intégrales. Dans le cas d'une surface de discontinuité mobile, le bilan global permet de dériver des relations de saut. On peut ensuite formuler le principe fondamental de la dynamique en considérant la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un ensemble de particules transportées par le mouvement. On montre comment l'existence d'une équation de bilan entraîne celle d'un vecteur flux et celle du tenseur des contraintes dans le cas de la loi de conservation de la quantité de mouvement.

1 Théorèmes de transport

La dérivation d'une intégrale triple sur un domaine transporté par le mouvement conduit à rajouter au terme de dérivée partielle du champ intégré un terme de flux cinématique intégrée sur la frontière. Ce résultat, complété par d'autres théorèmes de transport, permet de formuler la loi de conservation de la masse et de préparer la formulation d'autres équations de bilan.

1.1 Domaine transporté par le mouvement

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ constitué de particules transportées par le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$. Ces particules décrivent des trajectoires de la forme $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ avec $\underline{x}(0) = \underline{a}$, issues d'un ensemble de positions initiales formant le domaine $\mathcal{D}_0$. On peut donc écrire $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$. On dit que le domaine $\mathcal{D}(t)$ est transporté par le mouvement.

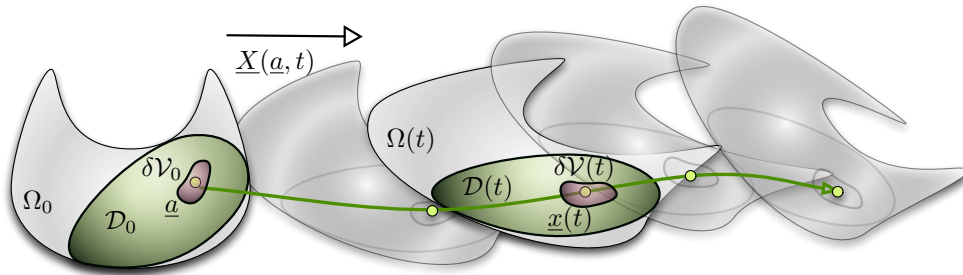


FIGURE 7.1 – Domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$.

On considère un champ $c(\underline{x}, t)$, en représentation eulérienne, intégrable sur le domaine $\mathcal{D}(t)$. Sa représentation lagrangienne $c^{(L)}(\underline{a}, t)$ vérifie donc $c[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = c^{(L)}(\underline{a}, t)$. On peut alors considérer le changement de variable

$\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ à l'instant t dans l'intégrale

$$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (7.1)$$

où $J(\underline{a}, t)$ est le Jacobien de l'application $\underline{X}$ de Ω_0 dans $\mathbb{R}^3$ au temps t . Si $c(\underline{x}, t)$ et donc $c^{(L)}(\underline{a}, t)$ sont dérivables par rapport à l'espace et au temps, on peut dériver cette intégrale par rapport au temps en écrivant

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t} J + c^{(L)} \frac{\partial J}{\partial t} \right] (\underline{a}, t) d^3a. \quad (7.2)$$

La dérivée par rapport au temps du Jacobien $J(\underline{a}, t)$ se calcule en considérant la variation d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement autour de la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ qui obéit aux relations

$$\delta\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \delta\mathcal{V}_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \delta\mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \quad (7.3)$$

où $\delta\mathcal{V}_0 = \delta\mathcal{V}(0)$ est la position du petit volume dans la configuration de référence Ω_0 . En éliminant $\delta\mathcal{V}(t)$ entre ces deux relations, on obtient

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t). \quad (7.4)$$

En reportant cette expression dans l'intégrale de l'équation (7.2), on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) + c^{(L)}(\underline{a}, t) \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \right] J(\underline{a}, t) d^3a. \quad (7.5)$$

En rappelant que $\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ est la représentation lagrangienne $\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)}$ de la dérivée particulaire, on peut faire le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ inverse pour obtenir finalement

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{dc}{dt}(\underline{x}, t) + c(\underline{x}, t) \text{div } \underline{U}(\underline{x}, t) \right] d^3x. \quad (7.6)$$

Les relations $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } c$ et $\text{div}(c \underline{U}) = \underline{U} \cdot \text{grad } c + c \text{div } \underline{U}$, permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \underline{U}) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

1.2 Conservation de la masse

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement et on définit sa masse par l'intégrale

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x \quad (7.8)$$

où $\rho(\underline{x}, t)$ est le champ de masse volumique. La loi de conservation de la masse stipule que cette quantité est invariante en temps pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$, ce que l'on traduit par la relation

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} \right) (\underline{x}, t) d^3x = 0. \quad (7.9)$$

En appliquant cette relation sur des domaines de plus en plus petits, on en déduit le bilan local

$$\frac{d\rho}{dt}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0 \quad (7.10)$$

valable pour tout point $\underline{x}$ et tout temps t . En développant l'expression de la dérivée particulaire, on peut écrire cette loi de conservation de la masse sous les formes suivantes

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0, \quad (7.11)$$

où l'on a utilisé la relation $\operatorname{div}(\rho \underline{U}) = \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U}$.

On voit que si le mouvement est isochore, c'est-à-dire si $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, la loi de conservation de la masse entraîne que ρ est constant le long d'une trajectoire quelconque dans la mesure où $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Réciproquement, si le milieu est incompressible, c'est-à-dire si ρ reste constant le long des trajectoires, alors l'écoulement est isochore.

1.3 Théorèmes de transport complémentaires

On généralise facilement le théorème de dérivation des intégrales sur des domaines transportés par le mouvement au cas des champs de vecteurs $\underline{V}(\underline{x}, t)$ à l'aide de la relation

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\underline{V}}{dt} + \underline{V} \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x \quad (7.12)$$

en explicitant ses composantes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} V_i d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dV_i}{dt} + V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i U_j) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (7.13)$$

En considérant le tenseur d'ordre deux $\underline{V} \otimes \underline{U}$ de composantes $V_i U_j$, produit tensoriel de $\underline{V}$ et $\underline{U}$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}(\underline{V} \otimes \underline{U}) \right] d^3x. \quad (7.14)$$

En utilisant les formules de la divergence

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q} d^3x \quad \text{et} \quad \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\operatorname{div}} \underline{\sigma} d^3x \quad (7.15)$$

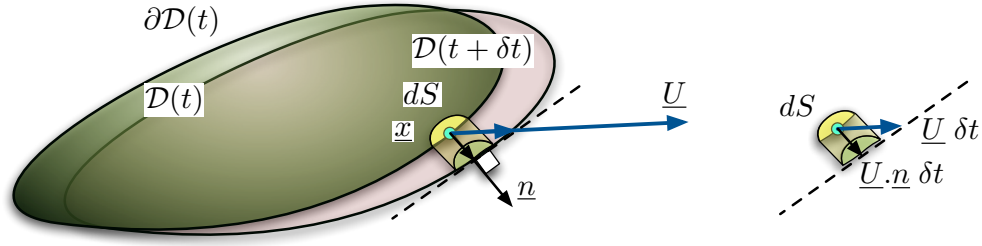


FIGURE 7.2 – Interprétation géométrique du terme $\underline{U} \cdot \underline{n}$ dans l'intégrale de surface du flux cinématique.

valables pour un champ de vecteur $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ ou un champ de tenseur $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$, on peut écrire les théorèmes de transport sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c \, d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} c \, \underline{U} \cdot \underline{n} \, dS, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} \, d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{V} (\underline{U} \cdot \underline{n}) \, dS. \end{aligned} \quad (7.16)$$

On peut interpréter les termes $c \, \underline{U}$ et $\underline{V} \otimes \underline{U}$, dont les produits avec la normale $\underline{n}$ sont respectivement $c (\underline{U} \cdot \underline{n})$ et $\underline{V} (\underline{U} \cdot \underline{n})$, comme des flux cinématiques à l'aide de la figure 7.2. Pendant le temps δt , les longueurs $\underline{U} \cdot \underline{n} \, \delta t$ permettent de définir les éléments de volume $dS \, \underline{U} \cdot \underline{n} \, \delta t$ qui expliquent la différence due au mouvement entre les intégrales sur $\mathcal{D}(t + \delta t)$ et $\mathcal{D}(t)$ pendant le temps δt , en plus de la différence due à la variation $\frac{\partial c}{\partial t}$ ou $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}$ du champ considéré.

Cette série de théorèmes de transport se termine ici par le théorème de Reynolds qui suppose que la loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$ est vérifiée. Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi \, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\phi}{dt} \, d^3x, \quad (7.17)$$

où $\phi(\underline{x}, t)$ est un champ scalaire dérivable quelconque. Pour démontrer ce résultat, il suffit de développer l'expression $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \text{div}(\rho \phi \underline{U}) = 0$ et d'appliquer la loi de conservation de la masse. On peut aussi se ramener à un domaine fixe par changement de variable et utiliser l'invariance dans le temps du produit $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t)$ qui constitue la formulation lagrangienne de la conservation de la masse.

2 Formulation des équations de bilan

Une équation de bilan consiste à exprimer la variation temporelle d'une grandeur intégrée sur une domaine transporté par le mouvement en fonction de l'intégrale d'un flux sur sa frontière et de l'intégrale d'un terme de production dans son intérieur. Ce bilan global permet de dériver des bilans locaux lorsque le champ intégré est dérivable et des relations de saut en présence de surfaces de discontinuité mobiles.

2.1 Formulation intégrale

Un équation de bilan est la donnée d'un champ $c(\underline{x}, t)$, d'un champ de surface $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ et d'un champ volumique $f_c(\underline{x}, t)$ tels que pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (7.18)$$

où $\underline{n}$ est la normale sortante de la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ du domaine $\mathcal{D}(t)$.

Si $c(\underline{x}, t)$ est une fonction dérivable, on peut appliquer la formule de dérivation d'une intégrale sur un domaine transporté par le mouvement et écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[f_c - \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(c \underline{U}) \right] d^3x. \quad (7.19)$$

En appliquant cette relation à l'instant t pour une famille de domaine tétraèdres $\mathcal{T}_h$ de taille caractéristique h tendant vers zéro, on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = O(h^3) \quad (7.20)$$

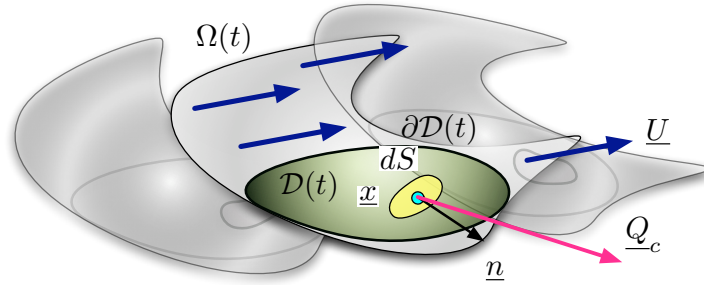


FIGURE 7.3 – Flux $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ d'une équation de bilan.

On montre alors, en faisant tendre la famille de tétraèdres vers un point fixe $\underline{x}$, que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ dépend linéairement de $\underline{n}$ et qu'il existe donc un vecteur flux (sortant) $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ tel que l'on puisse écrire

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}. \quad (7.21)$$

En appliquant le théorème de la divergence, la formulation intégrale de l'équation de bilan s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x. \quad (7.22)$$

2.2 Formulations en bilan locaux

En supposant que $c(\underline{x}, t)$ est une fonction dérivable, on déduit de la formulation intégrale du bilan global deux formulations en bilan locaux. La première,

appelée “bilan local en formulation conservative” consiste à écrire, pour tout point x et tout temps t , la relation

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c . \quad (7.23)$$

Pour déduire ce bilan local du bilan global, il suffit pour d’appliquer la formule de la divergence pour transformer l’intégrale surfacique en intégrale volumique puis de faire tendre le domaine $\mathcal{D}$ vers $\underline{x}$ au temps t .

La deuxième formulation suppose que la loi de conservation de la masse est vérifiée. On définit alors le champ $\phi(\underline{x}, t)$ par la relation $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t)$ ce qui est toujours possible dans la mesure où la masse volumique $\rho(\underline{x}, t)$ ne s’annule pas. En remplaçant c par $\rho \phi$ dans l’équation de bilan (7.23) et en utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{U}) = 0$, on peut écrire

$$\rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c . \quad (7.24)$$

Nous appellerons “formulation avec masse conservée” cette écriture de l’équation de bilan.

En résumé, l’expression d’une équation de bilan pour la grandeur $c = \rho \phi$, dans le cas où c est dérivable et où la masse est conservée, peut se faire par l’une des trois formulations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{intégrale :} \quad & \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x \\ \text{conservative :} \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \operatorname{div} (\rho \phi \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c \\ \text{avec masse conservée :} \quad & \rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c . \end{aligned} \quad (7.25)$$

Il est à noter que dans le cas où $c(\underline{x}, t)$ admet des discontinuités en espace (choc), la formulation intégrale du bilan est plus riche que les bilans locaux dans la mesure où elle contient également les relations de saut.

2.3 Relations de saut

On considère maintenant le cas où $c(\underline{x}, t)$ est dérivable sur le domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement, sauf sur une surface mobile $\Sigma(t)$ qui partage le domaine en deux sous-domaines $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$ tels que $\mathcal{D}_1(t) \cup \mathcal{D}_2(t) = \mathcal{D}(t)$ (voir figure 7.4). On note $\underline{W}(\underline{x}, t) = W(\underline{x}, t) \underline{N}(\underline{x}, t)$ la vitesse de la surface mobile $\Sigma(t)$ où $\underline{N}(\underline{x}, t)$ est la normale pointant du domaine $\mathcal{D}_1$ vers le domaine $\mathcal{D}_2$. On note alors le saut de c et le saut de $\underline{Q}_c$ de la manière suivante :

$$[[c]] = c^{(2)} - c^{(1)} \quad \text{et} \quad [[\underline{Q}_c]] = \underline{Q}_c^{(2)} - \underline{Q}_c^{(1)} \quad (7.26)$$

où les exposants ⁽¹⁾ et ⁽²⁾ désignent respectivement les valeurs dans les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ au voisinage de Σ .

Si $c(\underline{x}, t)$ est régi par l’équation de bilan

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x , \quad (7.27)$$

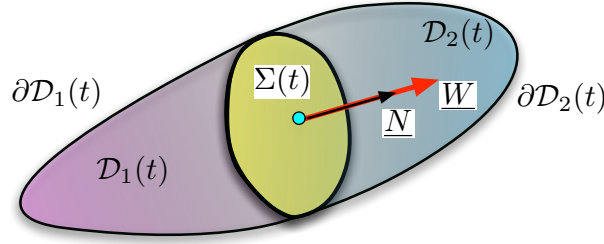


FIGURE 7.4 – Surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ de vitesse $\underline{W} = W \underline{N}$.

il est intéressant de développer le premier terme sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{(\partial\mathcal{D}_1 - \Sigma)(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} c^{(1)} \underline{W} \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{(\partial\mathcal{D}_2 - \Sigma)(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} c^{(2)} \underline{W} \cdot \underline{N} dS \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}_1(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} c^{(1)} (\underline{W} - \underline{U}^{(1)}) \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}_2(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} c^{(2)} (\underline{W} - \underline{U}^{(2)}) \cdot \underline{N} dS, \end{aligned}$$

le second sous la forme

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS &= \iint_{\partial\mathcal{D}_1(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} \underline{Q}_c^{(1)} \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iint_{\partial\mathcal{D}_2(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} \underline{Q}_c^{(2)} \cdot \underline{N} dS, \end{aligned}$$

ainsi que le troisième sous la forme

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} f_c d^3x + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} f_c d^3x.$$

En écrivant que l'équation de bilan est vérifiée sur les domaines $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$ on obtient la relation

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma(t)} \left[c^{(2)} (\underline{U}^{(2)} - \underline{W}) - c^{(1)} (\underline{U}^{(1)} - \underline{W}) \right] \cdot \underline{N} dS \\ + \iint_{\Sigma(t)} \left[\underline{Q}_c^{(2)} - \underline{Q}_c^{(1)} \right] \cdot \underline{N} dS = 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

En considérant des domaines de plus en plus petits, on aboutit finalement à l'équations de saut

$$\llbracket c (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \rrbracket + \llbracket \underline{Q}_c \cdot \underline{N} \rrbracket = 0, \quad (7.29)$$

pour tout point $\underline{x}$ de la surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ et pour tout temps.

3 Principe fondamental de la dynamique

La loi de conservation de la quantité de mouvement, qui constitue la première loi du principe fondamental de la dynamique, entraîne que les forces surfaciques de contact dépendent linéairement de la normale à la frontière ce

qui conduit à la définition du tenseur des contraintes. La loi de conservation du moment cinétique, qui complète le principe, entraîne que ce tenseur est symétrique.

3.1 Modélisation des efforts

Les forces extérieures de volumes, qui représentent les interactions à longue portée avec l'extérieur de la configuration déformée $\Omega(t)$, sont définies par leur résultante, leur moments en O et leur puissance dans un mouvement $\underline{U}$ à travers les relations respectives

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x , \\ \mathcal{M}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x , \\ \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) d^3x ,\end{aligned}\quad (7.30)$$

où $\underline{f}(\underline{x}, t)$ est la densité volumique des forces de volumes.

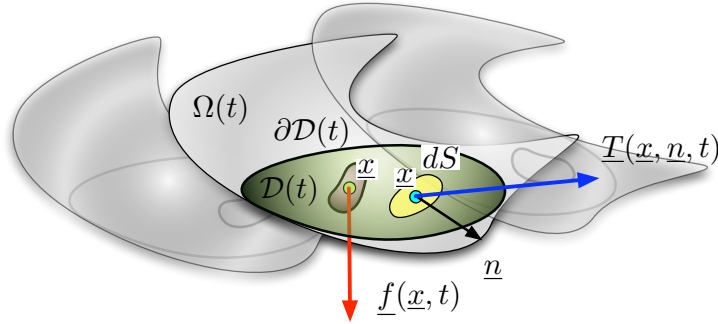


FIGURE 7.5 – Forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ et forces de contacts $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ extérieures à $\mathcal{D}(t)$.

Les forces de contact extérieures à $\mathcal{D}(t)$, qui représentent les interactions à courte portée exercées sur la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ par son voisinage extérieur situées à une distance microscopique inférieure à celle du continu, sont également définies par trois grandeurs à travers les relations

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS , \\ \mathcal{M}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS , \\ \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) dS ,\end{aligned}\quad (7.31)$$

où $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est la densité surfacique des forces de contact.

On suppose que les forces intérieurs de volumes, qui représentent les interactions à longue portée entre les particules situées à l'intérieur de $\Omega(t)$, sont

identiquement nulles, ce que l'on traduit par les relations

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \mathcal{P}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = 0. \quad (7.32)$$

Enfin, les forces de contact intérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$, qui représentent les interactions à courte portée entre les particules de ce domaine, vérifient, à cause du principe de l'action et de la réaction, les relations

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}. \quad (7.33)$$

Cependant, leur puissance $\mathcal{P}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)]$ pour le champ de vitesse $\underline{U}$ n'est en général pas nulle. Son expression est donnée par le "théorème de l'énergie cinétique", comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur.

3.2 Tenseur des contraintes

Pour exprimer le principe fondamental de la dynamique on définit la quantité de mouvement et le moment cinétique en O d'un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement qui s'écrivent respectivement

$$\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{x} \wedge \underline{U} d^3x. \quad (7.34)$$

Le principe fondamental de la dynamique stipule que la dérivée de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O d'un domaine de particules transporté par le mouvement sont respectivement égales à la résultante de toutes les forces et au moment en O de toutes les forces. Ces deux lois de conservation s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{p}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \\ \frac{d}{dt} \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Seules les forces extérieures apparaissent dans ces équations dans la mesure où la résultante et le moment en O des autres forces sont nuls. La loi de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O s'écrivent donc respectivement, en formulation intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} d^3x, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{T} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Si ρ et $\underline{U}$ sont dérivables, la loi de conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme

$$\iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t) d^3x - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x, \quad (7.37)$$

ce qui permet de démontrer, à l'aide de la construction des petits tétraèdres emboîtés, que la densité surfacique de forces $\underline{T}$ dépend linéairement de la

normale $\underline{n}$. Cette propriété permet de définir le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ à travers la relation

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \quad (7.38)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} d^3x , \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x . \end{aligned} \quad (7.39)$$

À partir de la loi de conservation de la quantité de mouvement, on peut interpréter le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ comme le flux entrant de la quantité de mouvement.

3.3 Symétrie du tenseur des contraintes

La formulation avec masse conservée de la loi de conservation de la quantité de mouvement se traduit par le bilan local

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma} . \quad (7.40)$$

D'autre part, en l'absence de discontinuité, la loi de conservation du moment cinétique en O s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \frac{d\underline{U}}{dt} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x . \quad (7.41)$$

En reportant le bilan local de quantité de mouvement (7.40) dans ce bilan global (7.41), on obtient la relation

$$\underline{C} = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d^3x = \underline{0} . \quad (7.42)$$

En appliquant le théorème de la divergences, composantes de $\underline{C}$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} C_i &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial (x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} - x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right] d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} d^3x = 0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

On en déduit que $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ est un tenseur symétrique vérifiant donc ${}^t \underline{\sigma} = \underline{\sigma}$. Pour tout point x et tout point t , on peut trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice des composantes de $\underline{\sigma}$ est diagonale.

On voit que la loi conservation du moment cinétique n'apporte pas d'autre information que d'imposer à $\underline{\sigma}$ d'être symétrique par rapport à la loi de conservation de la quantité de mouvement que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{f}_{\text{cont}} \quad \text{avec} \quad \underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma} . \quad (7.44)$$

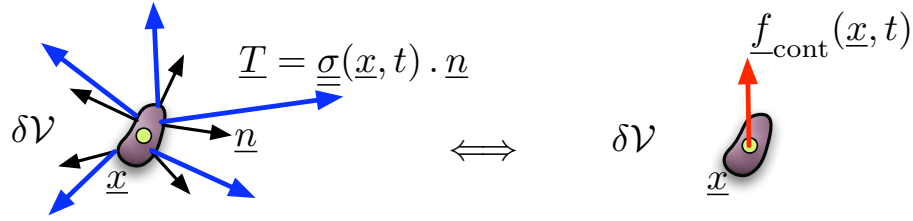


FIGURE 7.6 – Densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}$ “équivalente” aux forces de contact $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$.

On peut interpréter $\underline{f}_{\text{cont}}$ comment étant la densité volumique équivalente aux forces de contact $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ appliquée à un petit volume.

Pour conclure, les relations de saut issues de la formulation intégrale de la loi de conservation de la quantité de mouvement s’écrivent

$$\llbracket \rho \underline{U} (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \rrbracket - \llbracket \underline{\sigma} \cdot \underline{N} \rrbracket = \underline{0}, \quad (7.45)$$

pour tout point $\underline{x}$ d’une surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ et pour tout temps.

EXERCICES

NIVEAU I Questions simples

On considère le champ de vitesse stationnaire $\underline{U}(\underline{x}) = \gamma \underline{x}$ et le champ scalaire $c(\underline{x}, t) = \beta t \underline{x}^2$ où γ et β sont des constantes. On considère le domaine $\mathcal{D}_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| \leq R_0\}$ où R_0 est un rayon constant.

- 1) Décrire l'image $\mathcal{D}(t)$ de $\mathcal{D}_0$ par le mouvement. Calculer l'intégrale triple $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x$.

Les trajectoires du mouvement sont de la forme $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} e^{\gamma t}$. La déformation inverse est donc $\underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{x} e^{-\gamma t}$. L'image du domaine $\mathcal{D}_0$ d'équation $\underline{a}^2 \leq R_0^2$ est donc le domaine $\mathcal{D}(t)$ d'équation $\underline{x}^2 e^{-2\gamma t} \leq R_0^2$ qui est la sphère de centre $\underline{0}$ et de rayon $R(t) = R_0 e^{\gamma t}$. On a donc $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = 4\pi \int_0^{R(t)} \beta t r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \beta t R^5(t) = \frac{4\pi}{5} \beta t R_0^5 e^{5\gamma t}$.

- 2) Calculer les intégrales triples $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{dc}{dt} d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)} c \operatorname{div} \underline{U} d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \operatorname{div} (c \underline{U}) d^3x$. Comparer avec la dérivée de $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$.

On a $\frac{\partial c}{\partial t} = \beta \underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x = 4\pi \int_0^{R(t)} \beta r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \beta R_0^5 e^{5\gamma t}$. Comme $\underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} c = 2\beta \gamma t \underline{x}^2$, on a $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} c = \beta(1 + 2\gamma t) \underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{dc}{dt} d^3x = 4\pi \int_0^{R(t)} \beta(1 + 2\gamma t) r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \beta(1 + 2\gamma t) R_0^5 e^{5\gamma t}$. On a $\operatorname{div} \underline{U} = 3\gamma$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)} c \operatorname{div} \underline{U} d^3x = 4\pi \int_0^{R(t)} \beta(3\gamma t) r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \beta(3\gamma t) R_0^5 e^{5\gamma t}$. On a $c \underline{U} = \beta \gamma t \underline{x}^2 \underline{x}$, $\operatorname{div} (c \underline{U}) = \beta(5\gamma t) \underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)} \operatorname{div} (c \underline{U}) d^3x = 4\pi \int_0^{R(t)} \beta(5\gamma t) r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \beta(5\gamma t) R_0^5 e^{5\gamma t}$. Comme $\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \frac{4\pi}{5} \beta(1 + 5\gamma t) R_0^5 e^{5\gamma t}$, on a bien $\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \underline{U}) \right] d^3x$.

- 3) On suppose que $\rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$ est homogène. À partir de la loi de conservation de la masse en formulation lagrangienne, montrer que $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 e^{-3\gamma t}$. Vérifier alors la relation $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$.

Comme $J(\underline{a}, t) = e^{3\gamma t}$, la loi de conservation de la masse $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0$ entraîne $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 e^{-3\gamma t}$ et donc $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 e^{-3\gamma t}$. On a $\frac{d\rho}{dt} = -3\gamma \rho_0 e^{-3\gamma t}$ et $\operatorname{div} \underline{U} = 3\gamma$. On a donc bien $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$.

NIVEAU II Lois de conservation et équation de Burgers

Écriture des lois de conservation

- 1) La table 7.1 recense plusieurs loi de conservation ou équations de bilan écrite sous la forme $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x$ avec $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x$. Pour chaque ligne, écrire les bilans locaux sous la forme conservative puis sous la forme avec masse conservée. Écrire également la relation de saut associée.

La forme conservative $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{U}) = 0$ de la loi de conservation de la masse s'écrit aussi $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$ ou $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$. La relation de saut associée s'écrit $\llbracket \rho (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \rrbracket = 0$.

Grandeur	Densité	Flux	Production
$\mathcal{C} [\mathcal{D}(t)]$	c	$\underline{Q}_c$	f_c
$m [\mathcal{D}(t)]$	ρ	$\underline{0}$	0
$\mathcal{E}_{\text{int}} [\mathcal{D}(t)]$	ρe	$\underline{Q}$	$r + \underline{\sigma} : \underline{D}$
$\mathcal{K} [\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$-\underline{\sigma} \cdot \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}$
$\mathcal{E}_{\text{tot}} [\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$-\underline{\sigma} \cdot \underline{U} + \underline{Q}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$
$\underline{p} [\mathcal{D}(t)]$	$\rho \underline{U}$	$-\underline{\sigma}$	$\underline{f}$

TABLE 7.1 – Équations de bilan de la mécanique des milieux continus.

Les formes conservative, avec masse conservée et la relation de saut pour le bilan de l'énergie interne s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}(\rho e \underline{U} + \underline{Q}) &= r + \underline{\sigma} : \underline{D}, \\ \rho \frac{de}{dt} + \text{div} \underline{Q} &= r + \underline{\sigma} : \underline{D} \\ \text{et } \left[\rho e (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \right] + \left[\underline{Q} \cdot \underline{N} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Pour le bilan de l'énergie cinétique, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \underline{U} - \underline{\sigma} \cdot \underline{U} \right) &= \underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) - \text{div} (\underline{\sigma} \cdot \underline{U}) &= \underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D} \\ \text{et } \left[\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \right] - \left[\underline{U} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{N} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Pour la loi de conservation de l'énergie totale, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + e \right) + \text{div} \left[\left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + e \right) \underline{U} - \underline{\sigma} \cdot \underline{U} + \underline{Q} \right] &= \underline{f} \cdot \underline{U} + r, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) - \text{div} (\underline{\sigma} \cdot \underline{U} + \underline{Q}) &= \underline{f} \cdot \underline{U} + r, \\ \text{et } \left[\left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + e \right) (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \right] - \left[\underline{U} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{N} + \underline{Q} \cdot \underline{N} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Pour la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}) + \text{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) &= \underline{f}, \\ \rho \frac{d\underline{U}}{dt} + \text{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) &= \underline{f} \end{aligned}$$

et

$$\left[\rho \underline{U} \otimes (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \right] - \left[\underline{\sigma} \cdot \underline{N} \right] = 0.$$

Modèles de l'équation de Burgers

On considère une loi de conservation pour laquelle $\underline{U} = \underline{0}$ et où le champ unidimensionnel $c(\underline{x}, t) = c(x, t)$, continu ou discontinu, est indépendant de y et z . La loi s'écrit donc, e pour tout domaine $\mathcal{D}$ fixe, sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} c d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (7.46)$$

- 2) Écrire le bilan local dans le cas continu ainsi que la relation de saut pour une surface de discontinuité d'équation $x = x_*(t)$ séparant une région uniforme $c(x, t) = c_1$ pour $x < x_*(t)$ d'une région uniforme $c(x, t) = c_2$ pour $x > x_*(t)$. On notera $\underline{W} = W(t) \underline{e}_x$.

Le bilan local s'écrit $\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \underline{Q}_c}{\partial x} = 0$ et la relation de saut est $W = \left[\underline{Q}_c \right] / \left[c \right]$.

- 3) On suppose que $c = A(x, t)$ et $\underline{Q}_c = \frac{1}{2} \beta A^2 \underline{e}_x$. Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Calculer la vitesse $W(t)$.

Le bilan local est $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial x} (A^2) = \frac{\partial A}{\partial t} + \beta A \frac{\partial A}{\partial x} = 0$. La relation de saut est $-W[A] + \frac{1}{2} \beta [A^2] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{1}{2} \beta \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2 - A_1} = \frac{\beta}{2} (A_1 + A_2)$. C'est la moyenne des vitesses A_1 et A_2 .

- 4) On suppose maintenant que $c = A^2(x, t)$ et $\underline{Q}_c = \frac{2}{3} \beta A^3 \underline{e}_x$. Répondre

aux deux questions précédentes en supposant que $A \neq 0$ et $A_1 + A_2 \neq 0$.

Comparer avec le modèle précédent.

Le bilan local est $\frac{\partial}{\partial t}(A^2) + \frac{2}{3}\beta \frac{\partial}{\partial x}(A^3) = 2A(\frac{\partial A}{\partial t} + \beta A \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$. La relation de saut est $-W[A^2] + \frac{2}{3}\beta[A^3] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{3}{2}\beta \frac{A_2^3 - A_1^3}{A_2^2 - A_1^2} = \frac{2}{3}\beta \frac{A_1^2 + A_1 A_2 + A_2^2}{A_1 + A_2}$. Les deux modèles correspondent au même bilan local mais diffèrent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même.

NIVEAU III Film glissant sur un plan incliné

Un film liquide d'épaisseur h et de densité ρ s'écoule sur un plan incliné faisant un angle γ avec l'horizontale. On suppose que les seules forces extérieures de volume sont dues à la gravité. On choisit la coordonnée x_3 dans la direction normale au plan et x_1 dans la direction de l'écoulement. On suppose que $x_3 = 0$ est l'équation du fond.

On suppose que l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ en tout point $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = -p_a \underline{\underline{I}} + \rho g (h - x_3) \begin{pmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & -\cos \gamma & 0 \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

- 1) Calculer les forces de contact $\underline{T}_a$ exercées sur la surface libre du fluide par l'atmosphère.

Sur la surface libre de normale $\underline{e}_3$ située en $x_3 = h$, la densité surfacique des forces de contact s'écrit $\underline{T}_a = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 = -p_a \underline{e}_3$.

- 2) Calculer les forces de contact $\underline{T}_p$ exercées par le fluide sur la paroi. En déduire la contrainte normale $\sigma = -\underline{T}_p \cdot \underline{e}_3$ et la contrainte de cisaillement $\tau = \underline{T}_p \cdot \underline{e}_1$.

La normale à la paroi pointant vers l'extérieur du fluide est $-\underline{e}_3$. La force de contact exercée sur le fluide est donc $\underline{T}_p = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 = p_a \underline{e}_3 + \rho g h (\sin \gamma \underline{e}_1 - \cos \gamma \underline{e}_3)$. On en déduit $\sigma = p_a + \rho g h \cos \gamma$ et $\tau = \rho g h \sin \gamma$.

- 3) Calculer la densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x})$ de la résultante des forces de contacts.

On a $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) = \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \rho g (-\sin \gamma \underline{e}_1 + \cos \gamma \underline{e}_3)$.

- 4) Donner les composantes des forces extérieures de volume $\underline{f}$. Comparer avec $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x})$ et commenter.

Puisque $\underline{e}_z = -\sin \gamma \underline{e}_1 + \cos \gamma \underline{e}_3$, on a $\underline{f} = \rho g (\sin \gamma \underline{e}_1 - \cos \gamma \underline{e}_3)$. On remarque que $\underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = 0$. L'écoulement est à l'équilibre, l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$ est nulle.

- 5) Calculer le bilan des forces de contact $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}_{\text{fix}})$ exercées sur le domaine fixe $\mathcal{D}_{\text{fix}} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$. Interpréter.

En appliquant le théorème de la divergence $\iint_{\partial \mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} d^3x$ et comme $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{f}$, on a $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}_{\text{fix}}) = -\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_{\text{fix}}) = \rho g \mathcal{V}(\mathcal{D}_{\text{fix}}) (\sin \gamma \underline{e}_1 - \cos \gamma \underline{e}_3)$. $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_{\text{fix}})$ est le poids du fluide contenu dans $\mathcal{D}_{\text{fix}}$. Il est équilibré par les forces de contact sur la surface libre et sur la paroi. Les forces de contact des autres faces s'annulent deux à deux.

Chapitre 8

Équations de Navier-Stokes

Sommaire

1	Fluides newtoniens	110
1.1	Rhéologie des fluides newtoniens	110
1.2	Conditions aux limites	111
1.3	Équations de Navier-Stokes incompressibles	113
2	Équations de Navier-Stokes compressibles	114
2.1	“Théorème” de l’énergie cinétique	114
2.2	Premier principe de la thermodynamique	115
2.3	Lois de conservation, de comportement et d’état	117
3	Du compressible à l’incompressible	118
3.1	Relation de Gibbs et entropie	118
3.2	Ondes sonores	119
3.3	Filtrage des ondes sonores	120

Introduction

Contrairement aux solides élastiques, pour lesquels les contraintes ne dépendent que de la déformation au temps considéré, la rhéologie des fluides dépend d'un champ de pression et des vitesses de déformation, c'est-à-dire des gradients de vitesses. La plupart des fluides comme l'air ou l'eau ont un comportement de fluides newtoniens pour lequel le tenseur des contraintes visqueuses dépend de manière linéaire, homogène et isotrope du tenseur des taux de déformations. Dans le cadre de l'approximation incompressible, la contrainte d'écoulement isochore suffit à compléter la loi de conservation de la quantité de mouvement pour résoudre les équations, à condition de spécifier des conditions aux limites et une condition initiale. Lorsque le fluide est considéré comme compressible, le champ de pression dépend de ses propriétés thermodynamiques et l'on doit compléter les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement par deux lois d'état et une équation de bilan de l'énergie interne issue du premier principe de la thermodynamique. L'introduction du champ d'entropie au moyen de l'équation de Gibbs permet de décrire les ondes sonores, adiabatiques. On explique alors comment l'approximation de fluide incompressible se justifie dans la limite des nombres de Mach très petits.

1 Fluides newtoniens

La loi de comportement rhéologique d'un fluide newtonien exprime le tenseur des contraintes en fonction d'un champ de pression et d'un tenseur des contraintes visqueuses fonction du tenseur des taux de déformation. La loi de conservation de la quantité de mouvement constitue alors une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesse que l'on complète par des conditions aux limites aux frontières du domaine étudié. Dans le cas incompressible, la contrainte isochore permet de déterminer le champ de pression.

1.1 Rhéologie des fluides newtoniens

Un fluide newtonien est défini par sa loi de comportement rhéologique

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}} = \lambda_n (\text{tr } \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}, \quad (8.1)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ est le tenseur des contraintes, $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression, $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t)$ le "tenseur des contraintes visqueuses", $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ le tenseur des taux de déformation et (λ_n, μ_n) deux coefficients de Lamé. Le coefficient μ_n est appelé "viscosité dynamique".

Cette loi est obtenue en observant que le tenseur de contrainte est un tenseur de pression lorsque λ_n et μ_n sont négligeables et que le tenseur des contraintes visqueuses dépend de manière linéaire, homogène et isotrope des gradients de vitesses locaux, et donc de $\underline{\underline{D}}$, en spécifiant que la loi de comportement ne dépend pas du choix du repère (indifférence matérielle).

La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho(\underline{x}, t) \frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}, t) + \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \quad (8.2)$$

fait intervenir la divergence du tenseur des contraintes dont les composantes s'écrivent

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda_n \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} + 2 \mu_n D_{ij} \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.3)$$

Un calcul similaire au cas de la loi de Hooke des solides élastiques permet de résumer le comportement rhéologique des fluides newtoniens par les relations

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= -p \underline{\underline{I}} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}, \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} &= -\operatorname{grad} p + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

À titre d'exemple, on mesure $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour l'eau et $\mu_n = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour l'air. Pour tous les fluides, "l'hypothèse de Stokes" $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$ est expérimentalement valide.

1.2 Conditions aux limites

La loi de conservation de la quantité de mouvement des fluides newtoniens s'écrit

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} - \operatorname{grad} p + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.5)$$

C'est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en espace pour les fluides visqueux et d'ordre un pour les fluides inviscides ($\lambda_n = \mu_n = 0$) aussi appelés "fluides parfaits" (à ne pas confondre avec les gaz parfaits). Il faut donc lui adjoindre trois conditions aux limites dans le cas général, une seule étant requise dans le cas inviscide (fluide parfait).

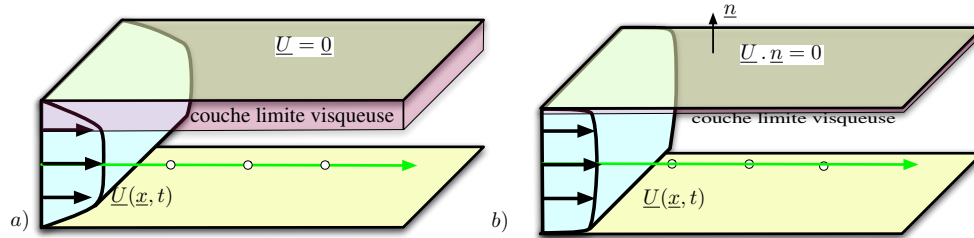


FIGURE 8.1 – Conditions aux limites sur une paroi solide. a) Fluide visqueux. b) Fluide parfait.

Si les frontières qui délimitent l'écoulement sont solides, la vitesse du fluide doit être égale à celle des parois. On considère ici le cas particulier où ces parois sont immobiles, le cas général s'en déduisant facilement. Dans le cas visqueux, les conditions aux limites s'écrivent

$$\underline{U} = \underline{0}, \quad \text{sur les parois solides.} \quad (8.6)$$

Dans le cas inviscide (fluide parfait), seule la vitesse normale à la paroi peut être imposée et les conditions aux limites s'écrivent, dans le cas d'une paroi immobile,

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = 0, \quad \text{sur les parois solides de normale } \underline{n}. \quad (8.7)$$

Le passage entre le cas visqueux et le cas inviscide peut être compris en considérant la couche limite visqueuse qui existe au voisinage des parois. Lorsque les coefficients λ_n et ν_n tendent vers zéro, l'épaisseur de la couche limite, où les effets visqueux sont influents, tend également vers zéro. La vitesse y varie très rapidement en espace et on observe des vitesses tangentielles non nulles très près des parois, c'est-à-dire sur les parois d'un point de vue mathématique dans le cas inviscide (figure 8.1).

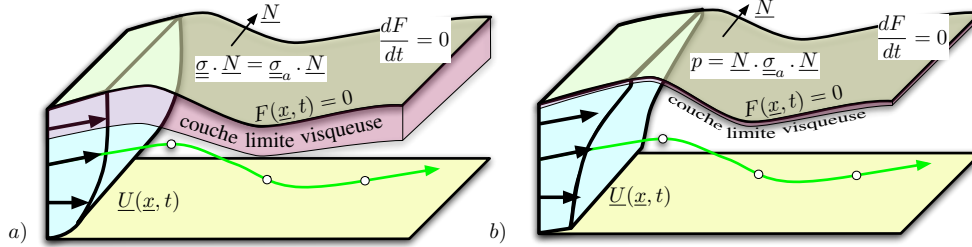


FIGURE 8.2 – Conditions aux limites sur une surface libre. a) Fluide visqueux. b) Fluide parfait.

Une partie des frontières de l'écoulement peut être constituée d'une surface libre en contact avec un autre fluide, par exemple l'air. Dans ce cas, l'équation $F(\underline{x}, t) = 0$ de la surface libre fait partie des inconnues du problème. Cette nouvelle inconnue doit être compensée par une condition aux limites que l'on obtient en spécifiant que les trajectoires $\underline{x}(t)$ des particules fluides de la surface vérifient $F[\underline{x}(t), t] = 0$. En dérivant par rapport au temps cette relation, on obtient la condition aux limites cinématiques qui s'écrit

$$\frac{dF}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } F = 0, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0. \quad (8.8)$$

Cette condition aux limites peut aussi s'écrire $\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N}$ où $\underline{W} = -\frac{\partial F}{\partial t} / \|\text{grad } F\| \underline{N}$ et $\underline{N} = \text{grad } F / \|\text{grad } F\|$ sont respectivement la vitesse et la normale de la surface libre.

Les conditions aux limites dynamiques s'obtiennent en écrivant les relations de saut à travers la surface libre considérée comme une surface de discontinuité. Comme $\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N}$, ces relations de saut s'écrivent, dans le cas visqueux,

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{N} = \underline{\sigma}_a \cdot \underline{N}, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0, \quad (8.9)$$

où $\underline{\sigma}_a$ est le tenseur des contraintes du fluide extérieur au domaine considéré. Dans le cas inviscide, le tenseur des contraintes du fluide considéré est un tenseur de pression $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$ et la condition aux limites dynamique se réduit à la relation scalaire

$$-p = \underline{N} \cdot \underline{\sigma}_a \cdot \underline{N}, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0, \quad (8.10)$$

l'existence d'une couche limite infiniment mince permettant de justifier qu'une seule des relations de saut soit vérifiée.

1.3 Équations de Navier-Stokes incompressibles

Lorsque l'écoulement est suffisamment lent, le fluide peut être considéré comme étant incompressible et la contrainte d'écoulement isochore

$$\operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0 \quad (8.11)$$

peut être imposée en tout point $\underline{x}$ et pour tout temps t . Dans ce cas, la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (8.12)$$

ce qui signifie que la masse volumique reste constante le long des trajectoires. En supposant $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$, c'est-à-dire que la masse volumique du fluide est homogène, la loi de comportement rhéologique et la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu_n \underline{D} \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} - \operatorname{grad} p + \mu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.13)$$

En notant $\nu_n = \mu_n / \rho_0$ la “viscosité cinématique”, la contrainte d'incompressibilité et l'équation de conservation de la masse constituent le système des **équations de Navier-Stokes incompressibles** qui s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{1}{\rho_0} \underline{f} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.14)$$

Lorsque le fluide est parfait, c'est-à-dire si l'on peut négliger ν_n , les équations inviscides correspondantes sont appelées ici les **équations d'Euler incompressibles**.

En ajoutant les conditions aux limites et en spécifiant une condition initiale pour le champ de vitesse, ce système d'équation est fermé, c'est-à-dire qu'il ne nécessite pas d'information supplémentaire pour trouver une solution. En particulier, la pression n'est pas reliée à la thermodynamique du fluide, l'approximation d'incompressibilité l'obligeant à s'adapter instantanément à la dynamique, c'est-à-dire au champ de vitesse.

On peut se convaincre du rôle asservi de la pression, dont le rôle est de s'adapter pour maintenir la contrainte d'incompressibilité, en faisant abstraction des conditions aux limites et en prenant respectivement la divergence l'équation de quantité de mouvement ce qui conduit, en tenant compte de la relation $\operatorname{div} \underline{U}$, à l'expression

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta p = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \underline{f} - \operatorname{div} (\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U}). \quad (8.15)$$

En inversant l'opérateur Δ (opération mathématique classique), on voit que la pression dépend uniquement du forçage $\underline{f}$ et du champ de vitesse $\underline{U}$. La pression peut être éliminée en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement ce qui conduit à la relation (après quelques manipulations algébriques) :

$$\frac{d(\operatorname{rot} \underline{U})}{dt} = [(\operatorname{rot} \underline{U}) \cdot \operatorname{grad}] \underline{U} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \underline{f} + \nu_n \Delta (\operatorname{rot} \underline{U}). \quad (8.16)$$

En écrivant que les solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles minimisent une fonctionnelle (non détaillée ici) sous la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \underline{U}$, on peut aussi interpréter p comme un “multiplicateur de Lagrange” associé à cette contrainte. Il est surtout important de retenir que, contrairement au cas compressible, la pression n'est pas un champ thermodynamique dans le cas incompressible.

2 Équations de Navier-Stokes compressibles

Le “théorème” de l'énergie cinétique, qui est en fait un axiome de base pour la mécanique des milieux continus, permet de déterminer l'expression de la puissance des forces de contact intérieures à un domaine transporté par le mouvement. On peut alors formuler le premier principe de la thermodynamique qui conduit à l'équation de bilan de l'énergie interne. L'ajout de deux lois d'état permet de compléter le système des équations de Navier-Stokes compressible.

2.1 “Théorème” de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique $\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$ d'un ensemble de particules fluides contenue dans le domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est définie par la relation

$$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x. \quad (8.17)$$

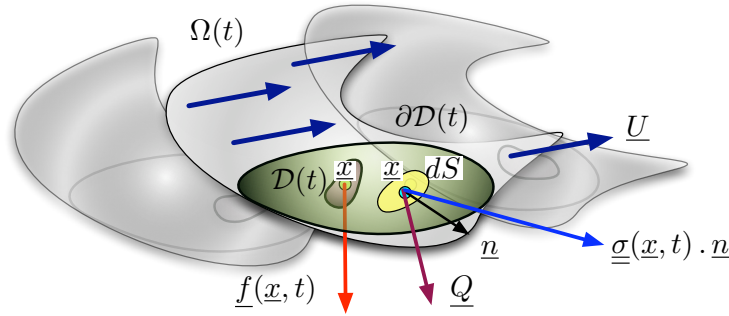


FIGURE 8.3 – Domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{U}$.

Par extrapolation du cas des masses ponctuelles ou des solides indéformables, le théorème de l'énergie cinétique, qui est ici, pour le cas des milieux continus, un postulat, s'écrit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] \quad (8.18)$$

où seule la puissance $\mathcal{P}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces intérieures de volumes, que l'on suppose négligeables, est absente. En explicitant les expressions des puissances

de tous les systèmes de forces, l'équation de bilan de l'énergie cinétique s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} dS \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x, \end{aligned} \quad (8.19)$$

où $\pi_{\text{int}}(\underline{x}, t)$ est la densité volumique de la puissance des forces de contact intérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$. La modélisation $\mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x$ sous la forme d'une intégrale de volume est moins riche qu'une éventuelle modélisation sous la forme d'une intégrale de surface dans la mesure où elle ne nécessite qu'un champ scalaire π_{int} au lieu du champ vectoriel que constituerait un éventuel vecteur flux. Cette modélisation volumique est suffisante ici.

L'application du théorème de Reynolds à $\frac{d\mathcal{K}}{dt}[\mathcal{D}(t)]$ et le rappel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, s'écrivent respectivement

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\underline{U}}{dt} \cdot \underline{U} d^3x \quad \text{et} \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \text{div} \underline{\sigma}. \quad (8.20)$$

En reportant ces relations dans l'équation (8.19) et en simplifiant le terme $\underline{f} \cdot \underline{U}$, on obtient la relation

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} (\text{div} \underline{\sigma}) \cdot \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n} dS \quad (8.21)$$

où l'on a utilisé la relation $(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{U} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n}$ qui découle de la symétrie de $\underline{\sigma}$ à travers l'égalité $\sigma_{ij} n_j U_i = n_i \sigma_{ij} U_j$. En appliquant la formule de la divergence à cette dernière relation, on obtient finalement

$$\pi_{\text{int}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} U_i - \frac{\partial(\sigma_{ij} U_i)}{\partial x_j} = -\sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\underline{\sigma} : {}^t \underline{K} = -\underline{\sigma} : \underline{D}, \quad (8.22)$$

où $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ sont les composantes du gradient du champ de vitesse qui se décompose sous la forme $\underline{K} = \underline{\Omega} + \underline{D}$. On a utilisé la nullité $\underline{\sigma} : \underline{\Omega} = \sigma_{ij} \Omega_{ji} = -\sigma_{ji} \Omega_{ij} = -\underline{\sigma} : \underline{\Omega} = 0$ du produit contracté d'un tenseur symétrique $\underline{\sigma}$ et d'un tenseur antisymétrique $\underline{\Omega}$.

2.2 Premier principe de la thermodynamique

Une hypothèse essentielle de la mécanique des milieux continus consiste à supposer que les particules fluides, à l'échelle h_{mic} de l'hypothèse du continu, sont localement en équilibre thermodynamique. Cette hypothèse d'équilibre thermodynamique local permet de définir le champ d'énergie interne spécifique $e(\underline{x}, t)$ et l'énergie interne d'une domaine $\mathcal{D}(t)$ de particules par la relation

$$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) d^3x. \quad (8.23)$$

Le premier principe de la thermodynamique relie alors l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$ à la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)]$ et à la puissance des forces extérieures à travers la relation

$$\frac{d}{dt} \{\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]\} = \mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \quad (8.24)$$

la puissance thermique étant définie par la relation

$$\mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} r(\underline{x}, t) d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS \quad (8.25)$$

où $r(\underline{x}, t)$ est le taux de chauffage volumique (par exemple dû au rayonnement électromagnétique) et $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ le flux de chaleur sortant du domaine. En soustrayant le “théorème” de l’énergie cinétique (8.18) à la loi de conservation de l’énergie totale (8.24) on obtient l’équation $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{the}} - \mathcal{P}_{\text{intcont}}$ qui s’écrit

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho e d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} r d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x. \quad (8.26)$$

En remplaçant la densité volumique par son expression $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D}$, le bilan local d’énergie interne s’écrit finalement

$$\rho \frac{de}{dt} = r - \text{div } \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}. \quad (8.27)$$

On peut alors rassembler les équations de bilans dans la table 8.1 en les écrivant sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x. \quad (8.28)$$

	$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \phi$	$\underline{Q}_c$	f_c
	Grandeur	Densité	Flux	Production
C	$m[\mathcal{D}(t)]$	ρ	$\underline{0}$	0
C	$p[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \underline{U}$	$-\underline{\sigma}$	$\underline{f}$
B	$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$	ρe	$\underline{Q}$	$r + \underline{\sigma} : \underline{D}$
B	$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$-\underline{\sigma} \cdot \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}$
C	$\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)] = (\mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{K})[\mathcal{D}(t)]$	$\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$\underline{Q} - \underline{\sigma} \cdot \underline{U}$	$r + \underline{f} \cdot \underline{U}$

TABLE 8.1 – Équations de bilan (B) ou lois de conservation (C).

Cette table indique que les équations concernant la masse (m), la quantité de mouvement (p) et l’énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ sont des lois de conservation (C) tandis que celles concernant l’énergie interne $\mathcal{E}_{\text{int}}$ et l’énergie cinétique $\mathcal{K}$ sont de simples équations de bilan (B). Une équation de bilan est une loi de conservation si la grandeur $\mathcal{C}$ considérée est invariante dans le temps lorsque le système est isolé de son extérieur, ce qui signifie que les termes de production $\underline{f} = \underline{0}$ et $r = 0$ sont nuls et que les flux $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ et $\underline{Q} \cdot \underline{n}$ sont nuls sur les frontières. On voit que dans ce cas, seul le terme $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D}$ subsiste et permet un échange entre l’énergie interne et l’énergie cinétique. Par exemple, les effets de compressibilité peuvent être responsables d’un échange entre les énergies cinétique et interne d’un fluide, en l’absence de toute interaction avec l’extérieur. Même en l’absence d’effets compressibilité, les forces de frottements peuvent diminuer l’énergie cinétique au profit de l’énergie interne par échauffement interne.

2.3 Lois de conservation, de comportement et d'état

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que l'équation de bilan de l'énergie cinétique s'écrivent respectivement

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{dU}{dt} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}, \quad \rho \frac{de}{dt} = r - \operatorname{div} \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}. \quad (8.29)$$

La loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens et la loi de Fourier s'écrivent respectivement

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U}) \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}, \quad \underline{Q} = -k \operatorname{grad} T. \quad (8.30)$$

Contrairement au cas incompressible, la pression est ici une variable thermodynamique qu'il convient de relier aux autres variables thermodynamiques que sont la température T et la masse volumique ρ . On complète donc le système d'équations par les deux lois d'état

$$p = \mathcal{P}_T(\rho, T), \quad e = \mathcal{E}_T(\rho, T), \quad (8.31)$$

qui expriment la pression et l'énergie interne en fonction de la masse volumique et de la température.

En reportant l'expression des lois de comportement dans les équations de bilan, on obtient un système fermé pour les quatre champs scalaires (ρ, T, e, p) et le champ vectoriel $\underline{U}$ constitué des quatre équations scalaires et d'une équation vectorielle qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U}, & p &= \mathcal{P}_T(\rho, T), & e &= \mathcal{E}_T(\rho, T), \\ \rho \frac{dU}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \underline{f} + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U}, \\ \rho \frac{de}{dt} &= r + k \Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2\mu_n \underline{D} : \underline{D}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Ces **équations de Navier-Stokes compressibles** sont appelées les **équations d'Euler compressibles** lorsque le fluide est parfait. Dans tous les cas doivent être complétées par une condition initiale pour les cinq champs et par des conditions aux limites aux frontières. Les conditions aux limites en vitesse ou en contraintes sur des parois rigides ou des surfaces libres ont été détaillées ci-dessus. Le couplage avec la thermodynamique à travers l'équation de bilan de l'énergie interne requiert des conditions aux limites thermiques aux frontières.

On peut par exemple spécifier le flux $\underline{Q} \cdot \underline{n} = q_{\text{Neumann}}$ sur une partie $\partial\Omega_{\text{Neumann}}$ de la frontière et la température $T = T_{\text{Dirichlet}}$ sur une autre partie $\partial\Omega_{\text{Dirichlet}}$. Ces conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet s'écrivent alors

$$\begin{aligned} -k \operatorname{grad} T(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} &= q_{\text{Neumann}}(\underline{x}, t) & \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{Neumann}} \\ T(\underline{x}, t) &= T_{\text{Dirichlet}}(\underline{x}, t) & \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{Dirichlet}}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Lorsque la conductivité thermique k est négligeable (fluide parfait), ces conditions aux limites disparaissent, ce que l'on explique par l'existence d'une couche limite thermique dont l'épaisseur tend vers zéro.

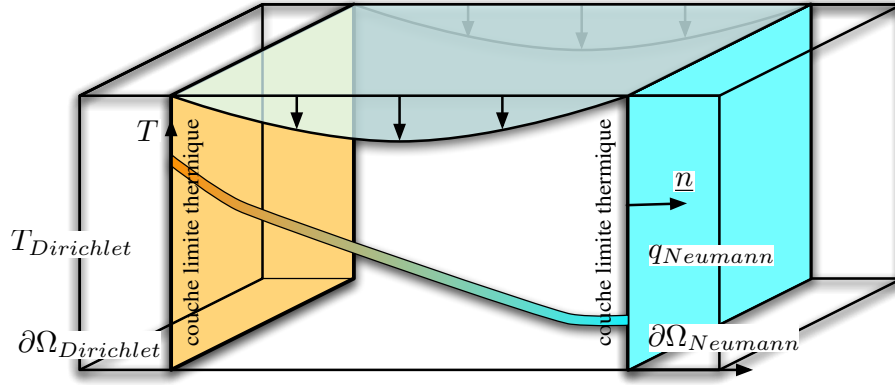


FIGURE 8.4 – Conditions aux limites en température sur $\partial\Omega_{Dirichlet}$ et en flux sur $\partial\Omega_{Neumann}$.

3 Du compressible à l'incompressible

La relation de Gibbs permet de définir l'entropie en fonction des autres variables thermodynamiques. On peut alors utiliser cette grandeur dans l'expression des lois d'état pour décrire les mouvements adiabatiques. On examine alors l'exemple des ondes sonores à partir des petites oscillations autour de l'équilibre, régies par les équations de Navier-Stokes compressibles. La comparaison entre la vitesse du son et la vitesse du fluide permet d'expliquer le passage à la limite de fluide incompressible.

3.1 Relation de Gibbs et entropie

Le champ d'entropie $s(\underline{x}, t)$ est une grandeur thermodynamique définie par l'intermédiaire de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme

$$de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \iff ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho. \quad (8.34)$$

Plutôt que de considérer les lois d'état $p = \mathcal{P}_T(\rho, T)$ et $e = \mathcal{E}_T(\rho, T)$ en choisissant ρ et T comme variables de base, il est utile ici de considérer les lois d'état $p = \mathcal{P}_e(\rho, e)$ et $T = \mathcal{T}_e(\rho, e)$ en choisissant ρ et e comme variables de base. La d'état $s = \mathcal{S}(\rho, e)$ est alors définie par

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\right)_\rho(\rho, e) = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)_e(\rho, e) = -\frac{p}{\rho^2 T}. \quad (8.35)$$

L'entropie étant ainsi définie, on peut considérer finalement les lois d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}_s(\rho, s)$ et $T = \mathcal{T}_s(\rho, s)$ où ρ et s sont les variables de base. L'équation de bilan de l'entropie qui s'écrit sous la forme

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (8.36)$$

En écrivant le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$, où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses, et en utilisant la loi de conservation de

la masse et l'équation de bilan de l'énergie interne du système (8.29), on en déduit

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{r}{T} - \frac{\operatorname{div} \underline{Q}}{T} + \frac{\underline{\tau} : \underline{D}}{T} . \quad (8.37)$$

Le second principe de la thermodynamique stipule que la production d'entropie d'une particule transportée par le mouvement est supérieure à celle qui serait produite par une transformation réversible recevant la même puissance thermique. On en déduit (non développé ici) des contraintes sur les lois de comportement comme par exemple $k \geq 0$ pour la loi de Fourier ou $\mu_n \geq 0$ et $3\lambda_n + 2\mu_n \geq 0$ pour la loi des fluides newtoniens.

Dans le cas d'un écoulement adiabatique ($r = 0$, $\underline{Q} = \underline{0}$) et inviscide ($\underline{\tau} = \underline{0}$), les équations de d'Euler (fluide parfait) peuvent se réduire au système

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} , & p &= \mathcal{P}_s(\rho, s) , \\ \rho \frac{dU}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \underline{f} , & \rho \frac{ds}{dt} &= 0 . \end{aligned} \quad (8.38)$$

où seule la loi d'état $\mathcal{P}_s$ de la pression, exprimée en fonction de ρ et s est nécessaire pour fermer les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de l'entropie qui est équivalente à l'équation de bilan de l'énergie interne.

3.2 Ondes sonores

En l'absence de forces extérieures $\underline{f} = \underline{0}$, on considère l'état d'équilibre $\underline{U} = \underline{0}$ de masse volumique ρ_0 , d'entropie s_0 et de pression $p_0 = \mathcal{P}_s(\rho_0, s_0)$.

On s'intéresse aux petites oscillations autour de ces équilibres, que l'on appelle "ondes sonores". On pose alors

$$p = p_0 + \tilde{p} \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad s = s_0 + \tilde{s} \quad (8.39)$$

et on suppose que $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{s}$ et $\underline{U}$ sont petits. On suppose que ces petites oscillations sont adiabatiques ($r = 0$, $\underline{Q} = \underline{0}$) et inviscides ($\underline{\tau} = \underline{0}$). En reportant cette décomposition dans les équations de d'Euler (8.38) et en négligeant les termes d'ordre deux $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho$, $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U}$, $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} s$, on obtient le système

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{U} , \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \tilde{p} , \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0 , \quad \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho} \quad (8.40)$$

où l'on a linéarisé l'équation d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ autour du couple de valeur (ρ_0, s_0) en définissant c_0 par la relation

$$c_0^2(\rho_0, s_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial \rho} \right)_s . \quad (8.41)$$

En éliminant $\tilde{s}$, $\tilde{p}$ et $\underline{U}$ du système d'équations, on obtient une équation d'évolution pour $\tilde{\rho}$ qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{\rho} = 0 . \quad (8.42)$$

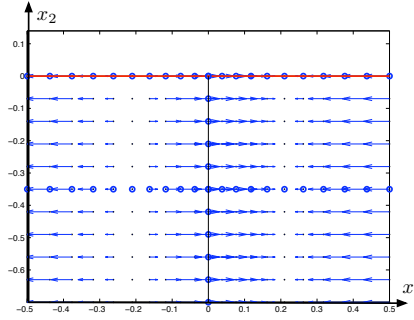


FIGURE 8.5 – Ondes sonores, donc longitudinales.

Cette équation admet des solutions de la forme

$$\tilde{\rho}(\underline{x}, t) = 2 \rho_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = c_0 \|\underline{k}\| \quad (8.43)$$

où ρ_m est une amplitude quelconque mais petite et $\underline{k}$ un vecteur d'onde quelconque. Les champs de pressions et de vitesse associés sont alors

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= 2 c_0^2 \rho_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - c_0 \|\underline{k}\| t + \varphi), \\ \underline{U} &= 2 c_0 \frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\underline{k}}{\|\underline{k}\|} \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - c_0 \|\underline{k}\| t + \varphi) \underline{k}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

On voit que ces ondes planes sont longitudinales (figure 8.5) et on démontre facilement que les trajectoires parcourent des segments de droites dans la direction du vecteur d'onde $\underline{k}$.

3.3 Filtrage des ondes sonores

On cherche maintenant à justifier le recours à l'approximation de fluide incompressible pour certains écoulements. Si c_0 et U_0 sont respectivement les vitesses caractéristiques du son et de l'écoulement, on définit le nombre de Mach par la relation

$$M = \frac{U_0}{c_0}. \quad (8.45)$$

Si le nombre de Mach $M \ll 1$ est très petit devant un, on peut considérer que la vitesse du son devient infinie. La pente de la loi d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ à s fixée devient infinie (figure 8.6). On voit qu'il n'est alors plus possible de déterminer p à partir de ρ qui ne peut pas s'écarter d'une valeur constante ρ_0 . La pression, qui n'est alors plus une grandeur thermodynamique, devient un champ dépendant uniquement du champ de vitesse qui satisfait alors la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \underline{U} = 0$.

En pratique, un écoulement incompressible est tel que des ondes sonores infiniment rapides et donc d'amplitude toujours très faibles, se propagent constamment pour maintenir la masse volumique ρ à la valeur constante ρ_0 . Les équations d'Euler incompressibles ne décrivent pas explicitement ces ondes sonores, contrairement aux équations d'Euler compressibles. On dit que l'approximation incompressible a permis de "filtrer" les ondes sonores. Cette approximation permet en effet de se concentrer sur les échelles de temps lents de l'écoulement de vitesse caractéristique U_0 en laisse de côté les ondes sonores de vitesses c_0 très grandes.

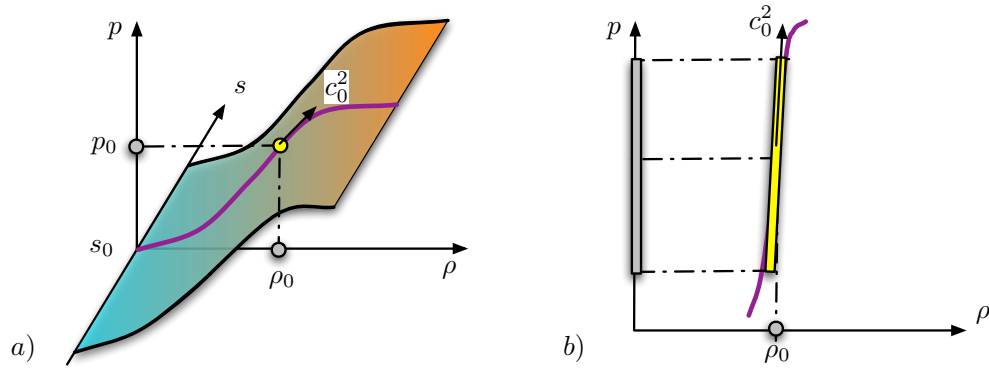


FIGURE 8.6 – a) Vitesse du son c_0 et loi d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$. b) Limite c_0 infinie et absence de loi d'état pour la pression.

EXERCICES : écoulements incompressibles

NIVEAU Ia Questions simples : cas incompressible

- On considère un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0 . On note $\underline{U}$ et p les champs eulériens caractérisant son mouvement. On suppose qu'il est soumis aux forces extérieures de gravité $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$. Écrire les équations de Navier-Stokes en notant ν_n la viscosité cinématique.
On a $\frac{d\underline{U}}{dt} = -g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \nu_n \Delta \underline{U}$.
- Dans le cas $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$, calculer la pression p dans le cas hydrostatique $\underline{U} = \underline{0}$ en supposant que $p(0) = p_0$ à l'origine.
L'équilibre hydrostatique $\underline{0} = -g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p$ conduit à $p = p_0 - \rho_0 g z$.
- Dans le cas $\underline{f} = \underline{0}$, calculer la pression p dans le cas $\underline{U} = -\alpha z^2 \underline{e}_x$, où α est une constante positive, en supposant que $p(0) = p_0$ à l'origine.
On calcule $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{0}$, $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\alpha z^2 \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0}$ et $\Delta \underline{U} = -2\alpha \underline{e}_x$. On en déduit $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = -2\rho_0 \nu_n \alpha$, d'où $p = p_0 - \rho_0 \nu_n \alpha x$.
- Dans le cas $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$ et $\underline{U} = -\alpha z^2 \underline{e}_x$, calculer la pression p en supposant que $p(0) = p_0$ à l'origine. Comparer avec les deux questions précédentes.
En suivant une démarche similaire à ces des questions précédentes, on trouve que $p(x, z) = p_0 - \rho_0 g z - \rho_0 \nu_n \alpha x$. Dans la mesure où le terme non linéaire $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ est nul, les équations de Navier-Stokes deviennent linéaire. On peut donc superposer les solutions.
- Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ pour cette solution.
Comme $\underline{D} = -\alpha z (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$, on a $\underline{\sigma} = -p(x, z) \underline{I} - 2\rho_0 \nu_n z (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$.

NIVEAU IIa Écoulements de Poiseuille - Couette

On considère un écoulement fluide compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$ dans le repère orthonormé $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$. On suppose que la loi de comportement rhéologique du milieu est celle d'un fluide newtonien

incompressible de masse volumique homogène ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n . On note $\underline{U}(\underline{x}, t)$ le champ de vitesse et $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression. On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. On suppose que la plaque du bas, en $z = -l$, est immobile, et que la plaque du haut, en $z = l$, est animée d'une vitesse uniforme $U_* \underline{e}_x$.

1) Écrire les conditions aux limites pour la vitesse en $z = \pm l$.
 Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{U}(x, y, -l) = \underline{0}$ et $\underline{U}(x, y, l) = U_* \underline{e}_x$ pour tout couple (x, y) .

2) Écrire les équations du mouvement.
 Les équations du mouvement s'écrivent $\text{div } \underline{U} = 0$ et $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p - g \underline{e}_z + \nu_n \Delta \underline{U}$.

On cherche des solutions stationnaires telles que $\underline{U}(\underline{x}, t) = U(z) \underline{e}_x$. On suppose que $p(0, 0, 0) = P_0$ et $p(L, 0, 0) = P_L$, les pressions en $\underline{x} = \underline{0}$ et $\underline{x} = L \underline{e}_x$ sont des constantes connues. On suppose que $P_L \leq P_0$.

3) Écrire les équations du mouvement que doivent vérifier ces solutions particulières.
 On a trivialement $\text{div } \underline{U} = 0$. Le profil $U(z)$ vérifie $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n U''(z)$. Les autres équations s'écrivent $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$.

4) Montrer d'abord que la pression est de la forme $p = C z + G(x)$ où C est une constante que l'on précisera.
 En intégrant les deux dernière équations on obtient $p = -\rho_0 g z + G(x)$. On a donc $C = -\rho_0 g$.

5) Montrer que $G'(x) = -B$ et que p est de la forme $p = A - B x + C z$ où A et B sont des constantes que l'on précisera.
 En reportant dans la première, on obtient $0 = -\frac{1}{\rho_0} G'(x) + \nu_n U''(z)$. On en déduit que $G'(x)$ est une constante que l'on note $-B$. On a donc $p = A - B x - \rho_0 g z$. Les valeurs de P en $x = 0$ et $x = L$ sur le plan central entraînent $A = P_0$ et $B = \frac{P_0 - P_L}{L}$.

6) Montrer que $U(z)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire avec deux conditions aux limites que l'on précisera. On pourra noter $\beta = (P_0 - P_L)/(\rho_0 \nu_n L)$.
 On en déduit que $-\frac{P_0 - P_L}{\rho_0 L} = \nu_n U''(z)$ et donc $U''(z) = -\beta/2$ avec les conditions aux limites $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_*$.

7) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_* = 0$ (écoulement de Poiseuille).
 Dans le cas $U_* = 0$, la solution est $U(z) = \beta(l^2 - z^2)$.

8) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_* \neq 0$ et $P_L = P_0$ (écoulement de Couette).
 Dans le cas $P_L = P_0$, on a $\beta = 0$ et donc $U(z) = U_* (z + l)/(2l)$.

9) Calculer $U(z)$ dans le cas général $U_* \neq 0$ et $P_L \neq P_0$. Comparer avec les profils des deux questions précédentes et commenter.
 Dans le cas général, on a $U(z) = \beta(l^2 - z^2) + U_* (z + l)/(2l)$. C'est la somme des deux profils précédent. Cela résulte du fait que l'équation du second degré et les conditions aux limites constituent un problème linéaire.

NIVEAU IIIa Calculs énergétiques de Couette

On considère le champ de pression $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$ et le champ de vitesse $U(z) = a z + b$ d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n . Le fluide, soumis à la gravité $-g \underline{e}_z$ est compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$

1) On suppose que $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_*$. En déduire a et b .

En résolvant $al + b = U_*$ et $-al + b = 0$, on obtient $a = \frac{U_*}{2l}$ et $b = \frac{U_*}{2}$. On retrouve l'écoulement de Couette.

2) Calculer la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ exercés dans le domaine $\mathcal{D} = \{\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq D \text{ et } |z| \leq l\}$

Le tenseur $\underline{D}$ est tel que $D_{13} = D_{31} = U'(z)/2 = \frac{1}{4l} U_*$ et $D_{ij} = 0$ sinon. Le tenseur des contraintes est $\underline{\sigma} = 2\rho_0 \nu_n \underline{D}$. On a $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D} = -\rho_0 \nu_n [U'(z)]^2$. On en déduit que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2l} L D \rho_0 \nu_n U_*^2$.

3) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des efforts de contact extérieurs à $\mathcal{D}$.

La force de contact en $z = l$ est $\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{e}_z = -p \underline{e}_z + \rho_0 \nu_n U'(l) \underline{e}_x$. On a donc $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2l} L D \rho_0 \nu_n U_*^2$.

4) Comparer les puissances $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$. Commenter.

On remarque que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = 0$. En effet, cet écoulement de Couette est une solution des équations de Navier-Stokes incompressibles. On déduit la relation entre les puissances du théorème de l'énergie cinétique en remarquant que l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$ de cet écoulement est nulle.

EXERCICES : écoulements compressibles

NIVEAU Ib Questions simples : cas compressible

1) On considère un fluide compressible et $\underline{U}, \rho, p, e, T$ les champs eulériens caractérisant son mouvement et sa thermodynamique. On note $p = \mathcal{P}_T(\rho, T)$ et $e = \mathcal{E}_T(\rho, T)$ ses lois d'état. Quelle relation traduisent les relations $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)_s = -\frac{p}{\rho^2 T}$ et $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\right)_\rho = \frac{1}{T}$? Écrire l'équation de bilan associée.

Il s'agit de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme $ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho$ ou $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. L'équation de bilan associée est $T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$.

2) On suppose que le fluide est parfait ($\lambda_n = \mu_n = 0$), que le flux de chaleur $\underline{Q}$ est nul et qu'il n'y a pas de chauffage volumique ($r = 0$). Écrire alors l'équation de bilan de l'énergie interne e . En déduire que $\frac{ds}{dt} = 0$. Commenter le résultat obtenu.

L'équation de bilan de l'énergie interne s'écrit dans ce cas $\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$. En utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$, l'équation de Gibbs conduit à $\frac{ds}{dt} = 0$. Pour un fluide parfait, la viscosité est négligée. Comme de plus les apports de chaleur sont nuls, il est normal que l'entropie reste constante le long des trajectoires des particules fluides. En effet, les transformations sont réversibles.

3) On considère un fluide visqueux newtonien de coefficients de Lamé λ_n et μ_n . On dit que l'on est en présence d'une compression isotrope si $\underline{D} = -\alpha \underline{I}$ avec $\alpha > 0$. La puissance des forces intérieures de viscosité est définie par $-\underline{\tau} : \underline{D}$ où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuse. En invoquant

le second principe de la thermodynamique, montrer que l'on doit avoir $3\lambda_n + 2\mu_n \geq 0$.

Comme $\underline{\tau} = \lambda_n \text{tr}(\underline{D})\underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$, on a $-\underline{\tau} : \underline{D} = -(3\lambda_n + 2\mu_n)\alpha^2$. On en déduit $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$.

- 4) L'hypothèse de Stokes consiste à supposer que la puissance $-\underline{\tau} : \underline{D}$ des forces intérieures de viscosité est nul lors d'une compression isotrope. En déduire une relation entre les coefficients de Lamé λ_n et μ_n d'un fluide newtonien.

On en déduit $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$.

NIVEAU IIb Ondes sonores

On considère un fluide parfait, compressible, non conducteur de la chaleur, dans un milieu infini en l'absence de forces ou de chauffage extérieur. On suppose que ses lois d'état sont celles d'un gaz parfait $e = c_v T$ et $p = \rho r T$ où c_v et r sont des constantes. On suppose connue la représentation eulérienne des champs de vitesse $\underline{U}$, de masse volumique ρ , de pression p et de température T à l'ordre dominant d'un petit paramètre $\eta \ll 1$:

$$\begin{aligned}\underline{U}(\underline{x}, t) &= \eta c \cos[k(x_1 - ct)] \underline{e}_1 + O(\eta^2) \\ \rho(\underline{x}, t) &= \rho_0 + \eta \rho_0 \cos[k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ p(\underline{x}, t) &= p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos[k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ T(\underline{x}, t) &= T_0 + \eta (r/c_v) T_0 \cos[k(x_1 - ct)] + O(\eta^2)\end{aligned}\quad (8.46)$$

où $\underline{e}_1$ est un vecteur unitaire de la base canonique et où k , p_0 et ρ_0 sont des constantes données, $T_0 = \frac{p_0}{r\rho_0}$ s'en déduit et c est une vitesse que l'on veut déterminer pour que ces champs soient solutions des équations d'Euler. On négligera les forces de gravité.

- 1) Montrer que la loi de conservation de la masse est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

La loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$ s'écrit ici $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\eta \rho_0 \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_0 \eta c \cos \varphi) + O(\eta^2)$ avec $\varphi = k(x_1 - ct)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la masse est satisfaite à l'ordre η .

- 2) Montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

Seule la première composante $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} U_1 + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} U_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} p$ de l'équation de la quantité de mouvement $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U} \right) = -\text{grad} p$ nécessite une vérification non triviale. Elle s'écrit $\eta \rho_0 c \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta \rho_0 c^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la conservation de mouvement est satisfaite à l'ordre η .

- 3) Montrer que l'équation de bilan de l'énergie interne est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

L'équation de bilan de l'énergie interne $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} e + \underline{U} \cdot \text{grad} e \right) = -p \text{div} \underline{U}$, avec $e = c_v T$, s'écrit ici $\eta \rho_0 r T_0 \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta \rho_0 c \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$ et $\rho_0 r T_0 = p_0$, l'équation de bilan de l'énergie interne est satisfaite à l'ordre η .

- 4) En exprimant l'équation d'état du gaz parfait à l'ordre un en η , montrer que $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p = c_v + r$.

L'équation d'état $p = \rho r T$ s'écrit $p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos \varphi = \rho_0 r T_0 + \eta r (\rho_0 T_0 + \rho_0 T_0 r / c_v) \cos \varphi + O(\eta^2)$. L'ordre dominant est satisfait par définition de T_0 . L'ordre un en η conduit à $\rho_0 c^2 = \rho_0 T_0 r (1 + r / c_v)$ c'est-à-dire $c^2 = r T_0 \frac{c_v + r}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} r T_0 = \gamma r T_0$. On obtient donc bien $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p = c_v + r$.

5) Commenter le nom de "vitesse du son" attribué à la vitesse c .

La vitesse c est la vitesse de propagation d'une onde progressive longitudinale qui correspond à des oscillations des champs dont le champ de pression. On peut montrer que l'entropie $s = s_0$ reste constante au cours de ces oscillations et que l'on a en fait $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s (\rho_0, s_0)$ où $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ est la loi d'état des gaz parfaits.

NIVEAU IIIb Compression isotherme

On considère le mouvement d'un fluide newtonien qui à $t = 0$ possède une densité uniforme ρ_0 et occupe un domaine Ω_0 de volume V_0 . On suppose que ce mouvement $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit :

$$x_1 = a_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad x_2 = a_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad x_3 = a_3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8.47)$$

1) Calculer le volume $V(t)$ du domaine $\Omega(t)$ occupé par le fluide à l'instant t et tracer $V(t)$ en fonction de t .

On calcule la Jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t) = \exp(-t/\tau) \underline{I}$ dont on déduit le Jacobien $J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t) = \exp(-3t/\tau)$. On a $V(t) = \iiint_{\Omega(t)} d^3x = \iiint_{\Omega_0} J(\underline{a}, t) d^3a = V_0 \exp(-3t/\tau)$. La fonction $V(t)$ décroît exponentiellement.

2) Montrer que la densité $\rho(\underline{x}, t)$ est indépendante de $\underline{x}$ et indiquer son expression $\rho(t)$ en fonction du temps. Calculer le produit $\rho(t) V(t)$ et donner sa signification physique. Tracer cette fonction.

La conservation de la masse entraîne que $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0$. On a donc $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho^{(E)}(\underline{x}, t) = \rho(t) = \rho_0 \exp(3t/\tau)$. La fonction $\rho(t)$ croît exponentiellement. La masse du fluide contenu dans le domaine $\rho_0 V_0 = \rho(t) V(t)$ est constante.

3) Calculer la représentation eulérienne du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ et en déduire sa divergence $\text{div } \underline{U}(\underline{x}, t)$.

On a $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = -\frac{1}{\tau} \underline{a} \exp(-t/\tau)$ et donc $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \underline{x}$.

4) En déduire que ρ et $\underline{U}$ vérifient bien l'équation de continuité en représentation eulérienne.

Les termes de l'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad } \rho = 0$ vérifient $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{3}{\tau} \rho(t)$, $\text{div } \underline{U} = -\frac{3}{\tau}$ et $\text{grad } \rho = \underline{0}$. On a donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \underline{U} = 0$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } \rho = 0$.

On suppose que les lois d'état $p = \mathcal{P}(\rho, e)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, T)$ du fluide visqueux sont celles d'un gaz parfait monoatomique : $p = \rho R T / M$ et $e = c_v T$ où R , M et c_v sont des constantes. On note λ_n et μ_n les coefficients de Lamé de ce fluide newtonien. On suppose de plus que le mouvement est suffisamment lent pour que la transformation puisse être considérée comme isotherme avec $T = T_0$.

5) Montrer que $p(t)$ ne dépend pas de l'espace et donner son expression en fonction de $p_0 = p(0)$. Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{D}(\underline{x}, t)$ et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$.

On a $p(t) = \rho(t) R T_0 / M = p_0 \exp(3t/\tau)$ avec $p_0 = \rho_0 R T_0 / M$. On a $\underline{D}(\underline{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \underline{I}$. Comme $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda_n \text{div } \underline{U} \underline{I} + 2 \mu_n \underline{D}$, on a $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -[p(t) + (3 \lambda_n + 2 \mu_n) \frac{1}{\tau}] \underline{I}$.

- 6) En déduire la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)]$ à chaque instant t . Que devient cette expression lorsque l'on fait l'hypothèse de Stokes $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$. Commenter.

Comme $\pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = -3\frac{1}{\tau}p(t) - (3\lambda_n + 2\mu_n)\frac{1}{\tau^2}$, on a $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] = \pi_{\text{int}}V(t) = -3\frac{1}{\tau}p_0V_0 - (3\lambda_n + 2\mu_n)\frac{1}{\tau^2}V_0\exp(-3t/\tau)$. L'hypothèse de Stokes suppose que les forces visqueuses ne travaillent pas dans une compression isotrope. On a donc $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] = -3\frac{1}{\tau}p_0V_0$.

- 7) Écrire l'équation de bilan de l'énergie interne en notant r le terme de chauffage interne et k la conduction thermique. Quels sont les termes non nuls? On suppose que la chaleur est évacuée par un rayonnement électromagnétique modélisé par le terme de chauffage r . En déduire la valeur $r(t)$ pour cette transformation isotherme. Commenter le signe négatif de r .

L'équation de bilan de l'énergie interne s'écrit $\rho \frac{de}{dt} = r + k\Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} - \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\tau}}$ où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur de contraintes visqueuses. Comme $e = c_v T_0$ est constant on a $\frac{de}{dt} = 0$. Comme $T = T_0$ est constant, on a $\Delta T = 0$. On a $\pi_{\text{int}} = 0$. Il ne reste donc plus que l'équilibre $r = p \operatorname{div} \underline{U}$. On a donc $r(t) = -3\frac{1}{\tau}p_0\exp(3t/\tau)$. Ce terme volumique est négatif dans la mesure où il permet d'évacuer, par exemple par rayonnement, la chaleur produite par la compression.

Chapitre 9

Problèmes corrigés

NIVEAU IIa Vases communicants

On considère deux réservoirs $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dont les niveaux d'eau respectifs sont notés h_1 et h_2 (voir figure 9.1). Ils sont reliés par un petit tube de section circulaire rempli d'eau allant de A_1 à A_2 respectivement situés à l'intérieur de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Dans un repère $Oxyz$ où z est la coordonnée verticale et $z = 0$ est la cote du fond des réservoirs, on suppose $\underline{OA_1} = -\frac{L+d}{2}\underline{e}_x + h_0\underline{e}_z$ et $\underline{OA_2} = \frac{L+d}{2}\underline{e}_x + h_0\underline{e}_z$.

On note d le diamètre du tube constitué de deux cylindres verticaux de longueur l et d'axes respectifs A_1B_1 et A_2B_2 , reliés par un tube horizontal de longueur L d'axe C_1C_2 . On suppose que d est suffisamment petit pour que l'écoulement dans le tube puisse être considéré comme laminaire. On néglige alors l'effet des deux coudes reliant les cylindres verticaux au cylindre horizontal.

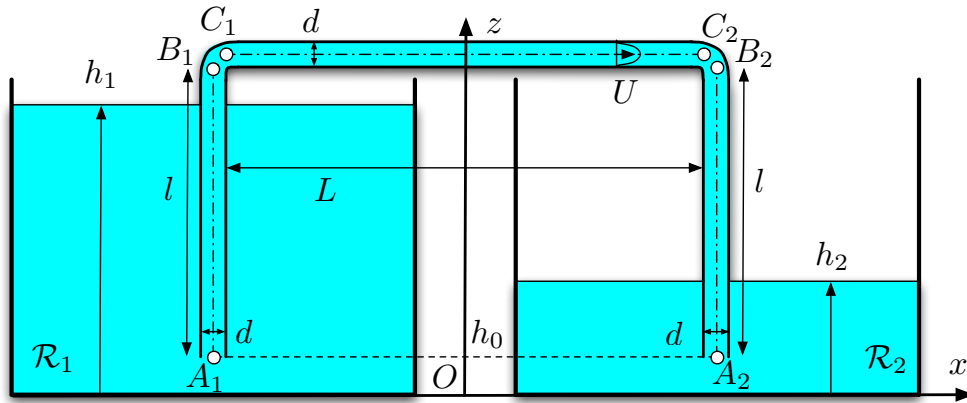


FIGURE 9.1 – Réservoirs reliés par un tube de section circulaire de diamètre d .

On suppose que la capacité des réservoirs est suffisamment grande pour considérer que h_1 et h_2 ne varient pas avec le temps tandis qu'un champ de vitesse stationnaire $\underline{U}(\underline{x})$ existe dans le tube. La pression atmosphérique, considérée comme constante, vaut $p_a = 10^5$ Pa. La masse volumique de l'eau,

considérée ici comme un fluide incompressible, vaut $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Sa viscosité cinématique vaut $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Écoulement stationnaire dans un tube vertical

- 1) Dans un premier temps, on suppose que $h_1 = h_2 = h_e$ et que le fluide est au repos. En utilisant les équations de Navier-Stokes, donner l'expression de la pression $p(\underline{x})$ en un point quelconque $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ en fonction de h_e et des autres paramètres du problème.
- 2) On suppose maintenant que $h_1 > h_2$, ce qui induit une circulation d'eau du réservoir $\mathcal{R}_1$ vers le réservoir $\mathcal{R}_2$. On néglige le champ de vitesse dans les réservoirs et on suppose alors que la pression aux points A_1 et A_2 est la pression hydrostatique des réservoirs respectifs auxquels ils appartiennent. Exprimer leurs pressions respectives p_{A_1} et p_{A_2} ainsi que $p_{A_1} - p_{A_2}$.
- 3) En supposant connue la pression p_{B_1} au point B_1 , on cherche une solution de la forme $\underline{U}(\underline{x}) = w(r) \underline{e}_z$ dans le tube vertical où r est la distance de $\underline{x}$ à l'axe A_1B_1 . Montrer que $\underline{U}$ vérifie l'équation de conservation de la masse. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser la formule $\text{div } \underline{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ de la divergence d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques.
- 4) Expliciter toutes les composantes de $\frac{d\underline{U}}{dt}$ en coordonnées cartésiennes. En déduire que l'accélération est nulle pour le champ $\underline{U} = w(r) \underline{e}_z$ recherché.
- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes pour le cas du champ de vitesse stationnaire $\underline{U} = w(r) \underline{e}_z$ recherché. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser les formules

$$\Delta \underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \underline{e}_\theta + \Delta V_z \underline{e}_z$$

et $\Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$ en coordonnées cylindriques.

- 6) En déduire que $p = p_{A_1} - (\rho g + G_1)(z - h_0)$ dans le tube A_1B_1 où G_1 est une constante que l'on exprimera en fonction de p_{B_1} et des autres paramètres.
- 7) On suppose que $w(r)$ est dérivable en $r = 0$. Écrire les conditions aux limites sur les parois du tube rigide. Exprimer alors $w(r)$ et tracer cette fonction.
- 8) Exprimer le débit volumique Q de l'eau dans le tube en fonction de G_1 .

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

On suppose l'égalité des pressions $p_{B_1} = p_{C_1}$ et $p_{B_2} = p_{C_2}$ en négligeant les coudes.

- 9) On cherche le champ de vitesse stationnaire dans le tube horizontal sous la forme $\underline{U}(\underline{x}) = u(r) \underline{e}_x$ où r est maintenant la distance de $\underline{x}$ à l'axe C_1C_2 avec $\underline{OC}_1 = -\frac{L}{2} \underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right) \underline{e}_z$ et $\underline{OC}_2 = \frac{L}{2} \underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right) \underline{e}_z$. Vérifier que $\text{div } \underline{U} = 0$ et montrer que $p = p_{C_1} - G_0 \left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho g(z - z_*)$ où z_* est une constante que l'on exprimera et $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$.

- 10) En supposant connu $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho g$, exprimer le champ de vitesse dans le tube vertical d'axe A_2B_2 .
- 11) Montrer que G_1 , G_0 et G_2 sont égaux à une valeur commune G que l'on exprimera en fonction de $p_{A_1} - p_{A_2}$ et de la longueur $L_{tot} = (2l + L)$ du tube.
- 12) En déduire que $Q = \frac{\pi d^4}{128} \frac{g(h_1 - h_2)}{\nu L_{tot}}$ et donner sa valeur pour $l = 1$ m, $L = 2$ m, $d = 4$ mm et $h_1 - h_2 = 50$ cm ?

Bilans intégraux de forces

- 13) Exprimer la résultante $\underline{F}_{A_1B_1}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre d'axe A_1B_1 sur ses sections circulaires de centres A_1 et B_1 .
- 14) Exprimer la résultante $\underline{F}_\Sigma$ des forces de contacts exercées sur le fluide par la paroi latérale du cylindre d'axe A_1B_1 de normales horizontales.
- 15) Exprimer $\underline{F}_{A_1B_1} + \underline{F}_\Sigma$ et commenter le résultat.
- 16) Exprimer la résultante $\underline{F}_{C_1C_2}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre C_1C_2 sur ses sections circulaires de centres C_1 et C_2 en fonction de G . Comparer cette force aux forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide.
- 17) Calculer la résultante des forces de contact exercée sur toute la frontière du cylindre C_1C_2 .

Corrigé Vases communicants

Écoulement stationnaire dans un tube vertical

1) Les équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide au repos ($\underline{U} = \underline{0}$) s'écrivent $\underline{0} = -\text{grad } p - \rho g \underline{e}_z$. En utilisant les conditions aux limites $p = p_a$ en $z = h_e$, on obtient la pression hydrostatique $p(x) = p_a - \rho g(z - h_e)$. 2) On a $p_{A_1} = p_a + \rho g(h_1 - h_0)$ et $p_{A_2} = p_a + \rho g(h_2 - h_0)$, d'où $p_{A_1} - p_{A_2} = \rho g(h_1 - h_2)$. 3) La loi de conservation de la masse pour un fluide incompressible et homogène s'écrit $\text{div } \underline{U} = 0$. Comme w ne dépend pas de z , cette relation est trivialement satisfaite. 4) On a $\frac{dU}{dt} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) \underline{e}_x + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\right) \underline{e}_y + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right) \underline{e}_z$. Comme $u = v = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, on a bien $\frac{dU}{dt} = 0$. 5) La conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes s'écrit $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \rho \nu \Delta w$ avec $\Delta w = w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr}\right)$. 6) Les équations $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ montrent que p ne dépend que de z . Les fonctions $-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$ et $-\rho \nu \Delta w$ sont égales mais dépendent respectivement de z et de r . Elles sont donc égales à une constante, notée G_1 , ce qui entraîne que $p = p_{A_1} - (\rho g + G_1)(z - h_0)$ avec $G_1 = (p_{A_1} - p_{B_1})/l - \rho g$. 7) Les conditions aux limites s'écrivent $w(d/2) = 0$. Comme $0 = G_1 + \rho \nu \Delta w(r)$, on a $\rho \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr}\right) = -G_1$ et donc $\rho \nu r w'(r) = -\frac{1}{2} G_1 r^2 + C_{ste}$. Comme $w'(0)$ est borné, la constante C_{ste} est nulle. En utilisant la condition aux limites $w(d/2) = 0$, on a $w(r) = \frac{G_1}{4\rho\nu} \left(\frac{1}{4} d^2 - r^2\right)$. Le tracé de cette fonction est celui d'une parabole. 8) Le débit volumique est $Q = 2\pi \int_0^r w(r) r dr = \frac{G_1 \pi d^4}{128 \rho \nu}$.

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

9) On a bien $\text{div } \underline{U} = 0$ car u ne dépend pas de x . Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \nu \Delta u$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$. On en déduit que $p = -\rho g z + F(x)$ où $F(x)$ est une fonction qui ne dépend que de x . Comme $-F'(x)$ et $-\rho \nu \Delta u$ sont égales et dépendent respectivement de x et r , elles sont égales à une constante notée G_0 . On a donc $p = p_{C_1} - G_0 \left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho g(z - z_*)$ avec $z_* = h_0 + l + \frac{d}{2}$, la constante d'intégration étant obtenue en utilisant l'information $p = p_{C_1}$ au point C_1 . Comme $p = p_{C_2}$ au point C_2 , on en déduit que $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$. **10)** En suivant une démarche similaire à résolution effectuées le tube $A_1 B_1$, on obtient $\underline{U} = -\frac{G_2}{4\rho\nu} \left(\frac{1}{4}d^2 - r^2\right) \underline{e}_z$ avec $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho g$. **11)** Comme le débit Q est constant le long du tube, on a $G_1 = G_0 = G_2$ et on note G leur valeur commune. Comme on a supposé $p_{B_1} = p_{C_1}$ et $p_{C_2} = p_{B_2}$, on peut écrire $p_{A_1} - p_{A_2} = (p_{A_1} - p_{B_2} - \rho g l) + (p_{C_1} - p_{C_2}) + (p_{B_2} - p_{A_2} + \rho g l) = G_1 l + G_0 L + G_2 l = G L_{tot}$. On a donc $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{(2l+L)}$. **12)** Comme calculé précédemment, le débit est $Q = \frac{G \pi d^4}{128 \rho \nu}$. Comme $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{L_{tot}} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{(2l+L)}$, le débit vaut $Q = \frac{g(h_2 - h_1) \pi d^4}{128(2l+L)\nu} = 7.7 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Bilans intégraux de forces

13) On a $\underline{K} = \text{grad } \underline{U} = w'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z$ et donc $\underline{D} = \frac{1}{2} w'(r) (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)$ et $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho \nu \underline{D}$. Sur la section de centre A_1 et de normale $-\underline{e}_z$, les forces de contact sont $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_z) = p_{A_1} \underline{e}_z - \rho \nu w'(r) \underline{e}_r$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta) d\theta = \underline{0}$ la résultante vaut $\underline{F}_{A_1} = p_{A_1} S \underline{e}_z$ où $S = \pi d^2/4$ est la section du cylindre. On a de même $\underline{F}_{B_1} = -p_{B_1} S \underline{e}_z$ si bien que $\underline{F}_{A_1 B_1} = \underline{F}_{A_1} + \underline{F}_{B_1} = (p_{A_1} - p_{B_1}) \frac{\pi d^2}{4} \underline{e}_z$ avec $p_{A_1} - p_{B_1} = \rho g l + G_1 l$ et $G_1 = G = (p_{A_1} - p_{A_2})/(2l+L)$. On a donc $\underline{F}_{A_1 B_1} = \rho g V_1 \underline{e}_z + G V_1 \underline{e}_z$ où $V_1 = \frac{\pi d^2 l}{4}$ est le volume du cylindre $A_1 B_1$. **14)** La normale en un point de la frontière latérale Σ étant $\underline{n} = \underline{e}_r$, les forces de contact s'écrivent $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -p \underline{e}_r + \rho \nu w'(d/2) \underline{e}_z$ avec $w'(d/2) = -\frac{G_1 d}{4\rho \nu}$. On a donc $\underline{T} = -p \underline{e}_r - G_1 (d/4) \underline{e}_z$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta) d\theta = \underline{0}$, la résultante de ces forces est $\underline{F}_\Sigma = -\int_0^l \int_0^{2\pi} G_1 (d/4) \underline{e}_z d\theta dz = -G_1 \frac{l \pi d^2}{4} \underline{e}_z = -G V_1 \underline{e}_z$. **15)** La force $\underline{F}_{A_1 B_1} + \underline{F}_\Sigma = \rho g V_1 \underline{e}_z$ est l'opposée du poids du fluide compris dans le cylindre $A_1 B_1$. **16)** En suivant la même démarche, on a $\underline{F}_{C_1 C_2} = G V_1 \underline{e}_x$. Cette force compense les forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide, c'est-à-dire la composante en $\underline{e}_x$ des forces de contact. **17)** Comme l'écoulement est stationnaire, la résultante des forces de contact exercées sur toute la frontière du cylindre $C_1 C_2$ est l'opposée du poids du fluide et vaut donc $\rho g V_0 \underline{e}_z$ avec $V_0 = \frac{\pi d^2 L}{4}$.

NIVEAU IIb

Écoulement de Couette cylindrique

On rappelle tout d'abord quelques résultats de calcul différentiel en coordonnées cylindriques. Étant donné un champ scalaire $b(r, \theta, z)$, les composantes de son gradient en coordonnées cylindriques sont $\text{grad } b = \frac{\partial b}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial b}{\partial z} \underline{e}_z$. Étant donné un champ de vecteurs $\underline{U}(r, \theta, z) = U_r \underline{e}_r + U_\theta \underline{e}_\theta + U_z \underline{e}_z$, les

composantes en coordonnées cylindriques de son gradient sont

$$\underline{\text{grad}} \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) & \frac{dU_r}{dz} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) & \frac{dU_\theta}{dz} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{dU_z}{dz} \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

La divergence de $\underline{U}$ est obtenue en prenant la trace du tenseur gradient. On rappelle que le laplacien d'un champ b s'exprime sous la forme $\Delta b = \text{div grad } b$.

Étant donné un champ de tenseurs *symétriques* d'ordre deux $\underline{A}(\underline{x})$, les composantes en coordonnées cylindriques de sa divergence $\underline{B} = \underline{\text{div}} \underline{A}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{rz}}{dz} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{\theta z}}{dz} + \frac{2 A_{r\theta}}{r} \\ B_z &= \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{zz}}{dz} + \frac{A_{zr}}{r}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Étude de l'écoulement

On considère deux cylindres circulaires infiniment longs, coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace annulaire est rempli d'un fluide *pesant* et *newtonien* incompressible de masse volumique ρ . La constante de gravité est notée g . L'axe Oz des cylindres est vertical. Le mouvement du fluide ne résulte que de la rotation uniforme de chacun des cylindres : ω_1 pour le cylindre intérieur et ω_2 pour le cylindre extérieur. Le mouvement est supposé permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et de révolution ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$). De plus, on suppose que $U_z(r, z) = 0$. On veut montrer l'écoulement a pour solution $U_r = U_z = 0$,

$$\begin{aligned} U_\theta &= \frac{A}{2} r + \frac{B}{r}, \quad p(r, z) = p_0 - \rho g z + \rho \left(\frac{A^2 r^2}{8} + AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2} \right), \\ A &= 2 \left(\omega_2 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad \text{et} \quad B = (\omega_1 - \omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

- 1) Expliciter les équations du mouvement en coordonnées cylindriques ainsi que les conditions aux limites correspondant à cet écoulement.
- 2) Vérifier que la solution correspond bien au problème posé en détaillant les calculs.
- 3) Décrire l'ensemble des trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ et calculer l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{a}, t)$ en coordonnées cylindriques.
- 4) Calculer les tenseurs des taux de déformation et de rotation $\underline{D}$ et $\underline{\Omega}$ en tout point (r, θ, z) . Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$? Expliquer.
- 5) Interpréter les composantes de $\underline{D}$ (pour $\omega_1 \neq \omega_2$). Faire un dessin explicatif.

Étude des contraintes

On considère le sous-domaine $\mathcal{D}$ constitué d'une portion de fluide comprise entre deux plans horizontaux distants d'une longueur verticale L .

- 6) Montrer que la pression $p(r, z)$ est une fonction croissante de r pour z fixé.

- 7) Calculer le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}$ défini par $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$.
- 8) Calculer la résultante et le moment $\underline{M}_1(\mathcal{D})$ en $\underline{0}$ des forces extérieures exercées sur le domaine fluide $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?
- 9) Calculer la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ des efforts extérieurs exercés sur $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur.
- 10) Calculer les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur une section $z = \text{constante}$ orientée vers le haut puis vers le bas. En déduire que la puissance des forces extérieures exercées sur $\mathcal{D}$ est $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. Commenter le signe de cette puissance. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

Étude thermodynamique

On suppose que les parois des cylindres sont adiabatiques (pas de flux de chaleur) et que la température est indépendante de z . À partir des résultats des questions précédentes, indiquer le signe de $\frac{d\mathcal{E}_{\text{int}}}{dt}$ où $\mathcal{E}_{\text{int}}$ est l'énergie interne du cylindre par unité de longueur.

- 11) On suppose que $e = C_p T$. Que peut-on dire de l'évolution de la température moyenne du cylindre au cours du temps ? Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

On suppose que l'on utilise ce système comme coupleur hydraulique sur un treuil à moteur thermique. L'axe intérieur, de rayon $R_1 = 20$ cm tourne est entraîné par le moteur à la vitesse $\omega_1 = 3000$ tours/mn. Le tube cylindrique de longueur $L = 1$ m est rempli d'une huile de viscosité $\mu = .5$ Pa. Cette huile entraîne le cylindre extérieur de rayon $R_2 = 30$ cm à la vitesse angulaire ω_2 . Pour un régime donné, on constate que le moteur exerce un couple $M = 150$ Nm.

- 12) Calculer ω_2 .
- 13) Calculer $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. En déduire la valeur $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$.
- 14) Définir un rendement caractéristique du système que l'on calculera. Commenter l'utilisation de ce principe dans les coupleurs hydrauliques existants.

Corrigé Écoulement de Couette cylindrique

Étude de l'écoulement

1) Il faut écrire les équations de Navier Stokes incompressibles en coordonnées cylindriques à partir des informations fournies dans l'énoncé. L'équation de conservation de la masse $\text{div } \underline{U} = 0$ s'écrit en utilisant la relation $\text{div } \underline{U} = \text{tr}(\underline{\text{grad}} \underline{U})$. Le terme d'accélération de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'exprime en utilisant l'expression $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{\text{grad}} \underline{U}) \cdot \underline{U}$. Le terme le plus difficile à exprimer en coordonnées cylindriques est le terme de dissipation $\mu_n \Delta \underline{U}$. Une première méthode consiste à revenir à l'expression du tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}(\underline{D}) = \lambda_n \text{tr}(\underline{D}) \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$ où $\underline{D}$ est la partie symétrique de $\underline{\text{grad}} \underline{U}$. Comme $\text{div } \underline{U} = 0$, cette expression se réduit à $\underline{\tau}(\underline{D}) = 2\mu_n \underline{D}$. Le terme de dissipation étant égal à $\underline{\text{div}} \underline{\tau}$, on voit donc que $\Delta \underline{U} = 2 \underline{\text{div}} \underline{D}$ dans le cas où $\text{div } \underline{U} = 0$. L'expansion de cette expression se sim-

plifie alors en utilisant l'expansion des relations $\frac{\partial}{\partial r}(\text{div } \underline{U}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{div } \underline{U}) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \underline{U}) = 0$. Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} &= 0 \\ \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_n \Delta_r \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r \rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu_n \Delta_\theta \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_n \Delta_z, \end{aligned}$$

avec $\Delta \underline{U} = \Delta_r \underline{e}_r + \Delta_\theta \underline{e}_\theta + \Delta_z \underline{e}_z$ tel que

$$\Delta_r = \Delta U_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r^2}, \quad \Delta_\theta = \Delta U_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2}, \quad \Delta_z = \Delta U_z. \quad (9.4)$$

Le Laplacien scalaire s'écrit

$$\Delta b = \text{div}(\text{grad } b) = \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}. \quad (9.5)$$

Une autre manière d'exprimer $\Delta \underline{U}$ est de remarquer que $\Delta \underline{U} = -\text{rot rot } \underline{U}$ dans le cas particulier $\text{div } \underline{U} = 0$. L'expression en coordonnées cylindriques du rotationnel s'obtient en calculant la partie antisymétrique de la matrice gradient d'un champ de vecteur. Cette méthode est encore plus fastidieuse que la première. Les conditions aux limites de l'écoulement sont $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_1 R_1$ pour $r = R_1$ et $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_2 R_2$ pour $r = R_2$.

2) Les seuls termes des équations qui ne sont pas nuls vérifient $-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = \nu_n \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} \right)$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. On vérifie alors facilement que ces équations ainsi que les conditions aux limites sont satisfaites par les solutions analytiques de l'énoncé.

3) Les trajectoires sont des cercles d'équations $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \theta_0 + U_\theta(r_0)t$ et $z = z_0$. L'accélération est donnée par $\Gamma_r = -U_\theta^2/r_0$, $\Gamma_\theta = \Gamma_z = 0$.

4) Les seuls composantes non nulles sont $D_{rr} = D_{\theta\theta} = -B/r^2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{r^2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = -A/2 = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$. Dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ on a $\underline{D} = 0$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = \omega$: c'est un mouvement de rotation solide.

5) Si $\omega_2 > \omega_1$ alors B est positif, U_θ croît avec r et $D_{r\theta} = -B/r^2 < 0$. L'angle de glissement $\gamma(t)$ entre $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ décroît comme $\gamma(t) \sim -D_{r\theta} t/r^2$ au voisinage de $t = 0$. Un schéma permet de relier ce comportement avec le fait que $U_\theta(r)$ croît avec r .

Étude des contraintes

6) Comme $\frac{\partial r}{\partial r} = \rho_0 U_\theta^2/r > 0$ la fonction $p(r)$ est croissante.

7) Les seules composantes non nulles sont $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -2\mu_n B/r^2$.

8) Les forces extérieures par unité de surface exercées par les cylindres sur le fluide sont la somme des forces de pression $-p(R_1, z)\underline{e}_r$ et des forces visqueuses $-\underline{\tau}(R_1)\underline{e}_r = -2\mu_n B/R_1^2 \underline{e}_\theta = -2\mu_n \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2 \underline{e}_\theta$ pour le cylindre intérieur et $p(R_2, z)\underline{e}_r$ et $\underline{\tau}(R_2)\underline{e}_r = 2\mu_n B/R_2^2 \underline{e}_\theta = 2\mu_n \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 \underline{e}_\theta$ pour le cylindre extérieur. Si $\omega_2 > \omega_1$ le cylindre intérieur freine le fluide tandis que le cylindre

extérieur l'accélère. Par symétrie, on voit que la résultante des ces forces par unité de surface est nulle lorsque l'on intègre sur une unité de longueur verticale. En ce qui concerne le moment en un point $\underline{0}$ situé sur l'axe, seules les forces visqueuses ont une contribution.

Le moment exercé sur le sous-domaine $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur est alors $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -L \int_0^{2\pi} R_1 \underline{e}_r \wedge \underline{\tau}(R_1) \cdot \underline{e}_r R_1 d\theta = 4\pi\mu_n B \underline{e}_3$. Il est égal à $\underline{M}_2(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} R_2 \underline{e}_r \wedge \underline{\tau}(R_2) \cdot \underline{e}_r R_2 d\theta = -4\pi\mu_n B \underline{e}_3$ pour le cylindre extérieur.

On vérifie que la conservation du moment cinétique $\underline{M}_1(\mathcal{D}) + \underline{M}_2(\mathcal{D}) = 0$ est vérifiée. Dans le cas de la rotation solide $\omega_2 = \omega_1$ on a la relation $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D}) = \underline{0}$.

9) Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} \underline{\tau}(R_1) \omega_1 \underline{e}_r R_1 \underline{e}_\theta R_1 d\theta = 4\pi L \mu_n B \omega_1$ pour le cylindre intérieur et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} \underline{\tau}(R_2) \omega_2 \underline{e}_r R_2 \underline{e}_\theta R_2 d\theta = 4\pi L \mu_n B \omega_2$ pour le cylindre extérieur. On vérifie que $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_1(\mathcal{D}) \cdot \omega_1 \underline{e}_z$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D}) \cdot \omega_2 \underline{e}_z$.

10) Dans les cas $\underline{n} = \underline{e}_3$ (haut) et $\underline{n} = -\underline{e}_3$ (bas) on a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = -p(r)\underline{n}$. Comme $\underline{U} \cdot \underline{e}_3 = 0$ la puissance $L \int_{R_1 \leq r \leq R_2} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) \cdot \underline{U} dS$ est nulle. Comme la puissance des forces de gravité est elle aussi nulle, on a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 4\pi L \mu_n \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2 > 0$. On a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = 0$ dans le cas $\omega_2 = \omega_1$.

Étude thermodynamique

11) Le premier principe $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \frac{d}{dt} \mathcal{K}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ s'écrit ici $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$. On a donc $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}} > 0$. La température moyenne T_m , définie par $\rho_0 C_p T_m = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) / [2\pi L (R_2^2 - R_1^2)]$ est donc croissante. Cet échauffement est dû à la dissipation visqueuse qui transforme l'énergie mécanique en chaleur. Dans le cas de la rotation solide il n'y a pas d'échauffement.

12) Ici $\omega_1 > \omega_2$. En notant $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -\underline{M}_2(\mathcal{D}) = M \underline{e}_3$ on a $M = 4\pi\mu_n (\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2) = 150 \text{ Nm}$. Donc $\omega_2 = \omega_1 - \frac{M}{4\pi\mu_n} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2} = 16.82 \text{ s}^{-1}$ ce qui donne $w_2 = 1010 \text{ tours/mn}$.

13) Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = M \omega_1 = 7.5 \text{ kW}$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = -M \omega_2 = 2.5 \text{ kW}$. On a donc $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 5 \text{ kW}$.

14) Le rendement est égale à la puissance $-\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$ fournie par le fluide au cylindre extérieur divisée par la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ fournie par cylindre intérieur au fluide, c'est-à-dire par le moteur. On obtient donc un rendement de un tiers. Les deux tiers de l'énergie mécanique fournie par le moteur sont dissipés sous forme de chaleur. Le rendement de ce coupleur mécanique est faible.

NIVEAU IIIa Mouvement plan de fluide

On considère un fluide en mouvement de masse volumique ρ_0 et de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ définie par $U_1 = \alpha x_1$, $U_2 = -\alpha x_2$ et $U_3 = 0$ où α est une constante. On suppose les forces extérieures s'écrivent $\underline{f}(\underline{x}, t) = -\rho_0 g \underline{e}_3$ où g est la gravité. On note μ la viscosité dynamique du fluide.

- 1) Exprimer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ et le tenseur des déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 2) On considère le domaine $\mathcal{D}(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 + a_2^2 \leq l^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq h\}$ et on note $\mathcal{D}(t)$ son évolution au cours du temps sous l'action du mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Quelle est la forme de $\mathcal{D}(0)$? Dessiner cette forme.
- 3) Montrer que le volume du domaine $\mathcal{D}(t)$ est une constant V_0 que l'on calculera.

- 4) Donner l'expression de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ en supposant que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$.
- 5) Montrer que $x_1(t) x_2(t) = a_1 a_2$. En déduire le tracé des trajectoires dans un plan $x_3 = a_3$.
- 6) Tracer les lignes de champs de la vitesse au temps $t = 0$.
- 7) On considère un champ $B(\underline{x}, t) = \frac{\gamma}{2} (x_1^2 e^{-2\alpha t} + x_2^2 e^{2\alpha t})$. Calculer l'expression lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de ce champ.
- 8) Que vaut $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$?
- 9) Calculer $\frac{\partial B}{\partial t}$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } B$ et comparer avec la question précédente.
- 10) Remplacer l'expression du champ de vitesse dans les équations de Navier-Stokes.
- 11) En supposant la pression $p(\underline{0}, t) = p_0$ constante en $\underline{x} = \underline{0}$ et pour tout temps t , calculer le champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 12) Donner l'expression de densité surfacique de forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ pour $\underline{x} = \frac{1}{2} h \underline{e}_3$ et $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$.

Corrigé Mouvement plan de fluide

Mouvement 2D

1) On a $\underline{\omega} = \underline{0}$, $D_{11} = \alpha$, $D_{22} = -\alpha$ et $D_{ij} = 0$ sinon. 2) Le domaine $\mathcal{D}(0)$ est un cylindre d'axe Ox_3 et de hauteur h dont la section est un disque de rayon l . 3) On a $\text{div } \underline{U} = 0$. Le mouvement est isochore et donc $V(t) = V_0 = \pi l^2 h$. 4) La déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit $x_1 = a_1 e^{\alpha t}$, $x_2 = a_2 e^{-\alpha t}$ et $x_3 = a_3$. 5) On a bien $x_1(t) x_2(t) = a_1 a_2$. Les lignes de champs sont donc les hyperboles $x_1 x_2 = a_1 a_2$ d'asymptotes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. 6) Comme le champ de vitesse est stationnaire, ses lignes de champ sont confondues avec les trajectoires. 7) On utilise $B^{(L)}(\underline{a}, t) = B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \frac{\gamma}{2} (a_1^2 + a_2^2)$. 8) Comme $\frac{dB}{dt}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \frac{\partial B}{\partial t}^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$, on a $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = 0$. 9) On a $\frac{\partial B}{\partial t} = -\gamma (\alpha x_1^2 e^{-2\alpha t} - \alpha x_2^2 e^{-2\beta t})$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } B = \gamma (U_1 x_1 e^{-2\alpha t} + U_2 x_2 e^{-2\beta t}) = \gamma (\alpha x_1^2 e^{-2\alpha t} - \alpha x_2^2 e^{-2\beta t})$. On a vérifié donc bien la relation $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } B = 0$. 10) Comme $\frac{d}{dt} \underline{U} = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2, 0)$, $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_3$ et $\Delta \underline{U} = \underline{0}$, la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit $\rho_0 \alpha^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $\rho_0 \alpha^2 x_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho_0 g$. 11) On en déduit $p(\underline{x}, t) = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) - \rho_0 g x_3$. 12) Le tenseur des contraintes s'écrit $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I} + 2\rho_0 \mu \underline{D}$ avec $\underline{D} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$. On a donc : $\underline{T} \left[\frac{1}{2} h \underline{e}_3, \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \right] = \left(p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 g h \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_0 \nu \alpha (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$.

NIVEAU IIIb Rotations d'axe vertical

NB : bien qu'elles ne soient pas indispensables pour la résolution du problème, les formules suivantes relatives aux coordonnées cylindriques sont rappelées ici : $\text{grad } B(\underline{x}) = B_{,r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta} \underline{e}_\theta + B_{,z} \underline{e}_z$, $\text{grad } V = V_{,r,r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{,r,\theta} - V_{,\theta}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{,r,z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + V_{,\theta,r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{,\theta,\theta} + V_r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{,\theta,z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + V_{,z,r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} V_{,z,\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{,z,z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, $\text{div } \underline{V} = V_{,r,r} + \frac{1}{r} V_{,\theta,\theta} + \frac{1}{r} V_r + V_{,z,z}$ et $\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r} B_{,r} + \frac{1}{r^2} B_{,\theta\theta} + B_{,zz}$.

Rotation dans un solide

On considère un solide élastique homogène et isotrope dont la configuration de référence est exempte de contraintes et occupe le volume :

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : 0 < R_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq R_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_3 \leq l\}.$$

On définit les coordonnées polaires (R, Θ) dans la configuration de référence par le changement de variables $(a_1, a_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$. On définit ensuite les vecteurs de base par $\underline{e}_R(\Theta) = \cos \Theta \underline{e}_1 + \sin \Theta \underline{e}_2$ et $\underline{e}_\Theta(\Theta) = -\sin \Theta \underline{e}_1 + \cos \Theta \underline{e}_2$.

On examine la déformation dont le champ de déplacement est $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha R \underline{e}_\Theta(\Theta)$ en coordonnées polaires. On suppose que $\alpha \ll 1$.

- 1) Décrire et dessiner le volume Ω occupé par la configuration déformée.
- 2) Exprimer les composantes de $\underline{\xi}$ en coordonnées cartésiennes.
- 3) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette déformation.
- 4) Calculer les tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ pour tout point de Ω .

Fluide incompressible avec surface libre

On considère un écoulement à surface libre occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h(r) \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m est le rayon de la cuve et $h(r)$ le profil de la surface libre que l'on cherche à déterminer. Le champ de gravité $-g \underline{e}_z$ est parallèle à l'axe de la cuve. On suppose que la cuve est remplie d'un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0 , et animé du mouvement $\underline{U}(r, \theta, z) = V(r) \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques et $V(r)$ un profil de vitesse. On suppose que le fluide est visqueux et que le mouvement vérifie $V(r) = \omega r$.

- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes en remplaçant le champ de vitesse par son expression.
- 6) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ en fonction du champ de pression p pour l'instant indéterminé.
- 7) On suppose que la pression atmosphérique p_a est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation $z = h(r)$ en supposant la continuité des forces de contact.
- 8) Montrer que le champ de pression s'écrit sous la forme $p = p_c(z, t) + \beta(x^2 + y^2)$ où β est une constante que l'on explicitera.
- 9) Préciser le profil de pression $p_c(z, t)$ en appliquant la condition aux limites en $\underline{x} = h_0 \underline{e}_z$ en supposant que $h(0) = h_0$ est connu.
- 10) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
- 11) On suppose $\omega = .5 \text{ Hz}$, $R_m = 1 \text{ m}$. Calculer la différence de hauteur maximale entre les points de la surface libre pour $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Fluide compressible à toit rigide

On considère un écoulement occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h_m \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m et h_m sont respectivement le rayon et la hauteur de la cuve à toit rigide. Le champ de gravité est $-g \underline{e}_z$. On suppose que la cuve fermée est entièrement remplie d'un fluide parfait compressible et que l'ensemble est animé du mouvement de rotation solide $\underline{U}(r, \theta, z) = \omega r \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques. On suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M . On suppose que la température $T = T_0$ est homogène et on cherche le champ de masse volumique solution sous une forme $\rho = \rho_e(r, z)$ qui ne dépend que de r et de z .

- 12) Écrire les équations d'Euler compressibles en remplaçant $\underline{U}$ par sa valeur.
- 13) Montrer que l'hypothèse $\rho = \rho_e(r, z)$ et le champ de vitesse proposé sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
- 14) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques en remplaçant le champ de vitesse par sa valeur.
- 15) En éliminant p , déduire des équations d'état et des équations d'Euler compressibles que la masse volumique est de la forme $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ où α est une constante que l'on précisera.
- 16) On suppose que $\rho(0, t) = \rho_e(0, 0) = \rho_0$ est connu. Donner l'expression du profil de masse volumique $\rho_c(z)$ au centre de la cuve.
- 17) En déduire l'expression du champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 18) Faire un tracé schématique des isobares dans un plan horizontal.

Corrigé Rotation d'axe vertical

Rotation dans un solide

- 1) On a $\Omega \sim \Omega_0$. C'est le volume compris entre deux cylindres de hauteur l de même axe et de rayons R_1 et R_2 .
- 2) On a $\xi_1(\underline{a}) = -\alpha a_2$ et $\xi_2(\underline{a}) = \alpha a_1$.
- 3) On en déduit que $\underline{H}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit $\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \underline{0}$ (partie symétrique de $\underline{H}$).
- 4) La loi de Hooke entraîne $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} = \underline{0}$.

Fluide incompressible avec surface libre

- 5) On a $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\omega y \underline{e}_x + \omega x \underline{e}_y$ pour le champ de vitesse, $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\omega^2 (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y)$ pour l'accélération et $\Delta \underline{U} = \underline{0}$. Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent $\text{div} \underline{U} = 0$ et $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p - g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$. On vérifie que l'on a bien $\text{div} \underline{U} = 0$. Les équations de quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1}$, $-\omega^2 y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$.
- 6) Comme $\underline{D}(\underline{x}, t) = \underline{0}$, on a $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I}$.
- 7) On doit avoir $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p_a \underline{I}$ pour les points $\underline{x}$ de la surface libre. On en déduit $p(\underline{x}, t) = p_a$ pour ces points.
- 8) On déduit des équations de Navier-Stokes la relation $p(\underline{x}, t) = p_c(z, t) + \beta (x^2 + y^2)$ avec $\beta = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2$.
- 9) En reportant dans l'équation de la quantité de mouvement verticale, on obtient $\frac{\partial}{\partial z} p_c = -\rho_0 g$, d'où $p_c(z, t) = p_a - \rho_0 g (z - h_0)$.
- 10) En appliquant la condition aux limites $p = p_a$ à tous les points de la surface libre $z = h(r)$, on obtient $0 = -g[h(r) - h_0] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$ et donc $h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$. La surface libre a la forme d'un paraboloïde de révolution.
- 11) La différence est $h(R_m) - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R_m^2 \sim 1.3 \text{ cm}$.

Fluide compressible à toit rigide

12) La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$. Comme $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, on a donc $\frac{d\rho}{dt} = 0$. La loi de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide parfait (inviscible) s'écrit $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$ avec $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\omega^2(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$. Comme l'écoulement isochore, on peut ignorer l'équation de bilan de l'énergie interne, qui s'écrit $\frac{de}{dt} = 0$. Les lois d'état sont $p = \rho \frac{R}{M} T$ et $e = c_v T$. **13)** L'hypothèse $\rho = \rho_e(r, z)$ entraîne bien $\frac{d\rho}{dt} = \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho = \omega r \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_e(r, z) = 0$. **14)** Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$ et $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. **15)** L'équation d'état entraîne $p = \rho_e(r, z) \frac{R}{M} T_0$. On en déduit $\frac{RT_0}{M} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = \omega^2 r$ et donc $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{RT_0}{M}$. **16)** La relation hydrostatique entraîne $\frac{R}{M} T_0 \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho_c}{\partial z} = -g$ et donc $\rho_c(z) = \rho_0 e^{-\frac{gz}{\alpha}}$. **17)** On a donc $p = \alpha \rho_e(r, z)$ avec $\rho_e(r, z) = \rho_0 \exp \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right) \right]$. **18)** Les isobares sont des cercles concentriques. Le minimum de pression est au centre.

Bibliographie

- [1] O. THUAL, Mécanique des Milieux Continus, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT* **1018** (2012) 50h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018>
- [2] O. THUAL, Hydraulique pour l'ingénieur généraliste, Cépaduès-Éditions, 2018.
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/180714>
Disponible en prêt à la bibliothèque de l'ENSEEIH.
- [3] O. THUAL, Hydrodynamique de l'environnement, Éditions de l'École Polytechnique, 2010.
<http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee>
Disponible en prêt à la bibliothèque de l'ENSEEIH.
- [4] D. CALECKI, Physique des milieux continus, 1. Mécanique et thermodynamique, Hermann Éditeurs, 2007, Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés, Dunod 2013.
Livre numérique sur Scholarvox :
<http://univ-toulouse.scholarvox.com/catalog/book/88818351>
- [5] J. COIRIER et C. NADOT-MARTIN, Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés, Dunod 2013.
Livre numérique sur Scholarvox :
<http://univ-toulouse.scholarvox.com/catalog/book/88815301>