Exercices pour le chapitre 8 : Équations de Navier-Stokes

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU Ia Questions simples : cas incompressible

- 1) On considère un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0 . On note $\underline{U}$ et p les champs eulériens caractérisant son mouvement. On suppose qu'il est soumis aux forces extérieures de gravité $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$. Écrire les équations de Navier-Stokes en notant ν_n la viscosité cinématique.

| On a $\frac{d\underline{U}}{dt} = -g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \nu_n \Delta \underline{U}$.

- 2) Dans le cas $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$, calculer la pression p dans le cas hydrostatique $\underline{U} = \underline{0}$ en supposant que $p(\underline{0}) = p_0$ à l'origine.

| L'équilibre hydrostatique $\underline{0} = -g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p$ conduit à $p = p_0 - \rho_0 g z$.

- 3) Dans le cas $\underline{f} = \underline{0}$, calculer la pression p dans le cas $\underline{U} = -\alpha z^2 \underline{e}_x$, où α est une constante positive, en supposant que $p(\underline{0}) = p_0$ à l'origine.

| On calcule $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = 0$, $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\alpha z^2 \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0}$ et $\Delta \underline{U} = -2\alpha \underline{e}_x$. On en déduit $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = -2\rho_0 \nu_n \alpha$, d'où $p = p_0 - \rho_0 \nu_n \alpha x$.

- 4) Dans le cas $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$ et $\underline{U} = -\alpha z^2 \underline{e}_x$, calculer la pression p en supposant que $p(\underline{0}) = p_0$ à l'origine. Comparer avec les deux questions précédentes.

| En suivant une démarche similaire à ces des questions précédentes, on trouve que $p(x, z) = p_0 - \rho_0 g z - \rho_0 \nu_n \alpha x$. Dans la mesure où le terme non linéaire $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ est nul, les équations de Navier-Stokes deviennent linéaire. On peut donc superposer les solutions.

- 5) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ pour cette solution.

| Comme $\underline{D} = -\alpha z (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$, on a $\underline{\sigma} = -p(x, z) \underline{I} - 2\rho_0 \nu_n z (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$.

NIVEAU Ib Questions simples : cas compressible

- 1) On considère un fluide compressible et $\underline{U}$, ρ , p , e , T les champs eulériens caractérisant son mouvement et sa thermodynamique. On note $p = \mathcal{P}_T(\rho, T)$ et $e = \mathcal{E}_T(\rho, T)$ ses lois d'état. Quelle relation traduisent les relations

$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)_s = -\frac{p}{\rho^2 T}$ et $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\right)_\rho = \frac{1}{T}$? Écrire l'équation de bilan associée.

| Il s'agit de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme $ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho$ ou $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. L'équation de bilan associée est $T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$.

- 2) On suppose que le fluide est parfait ($\lambda_n = \mu_n = 0$), que le flux de chaleur $\underline{Q}$ est nul et qu'il n'y a pas de chauffage volumique ($r = 0$). Écrire alors l'équation de bilan de l'énergie interne e . En déduire que $\frac{ds}{dt} = 0$. Commenter le résultat obtenu.

| L'équation de bilan de l'énergie interne s'écrit dans ce cas $\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$. En utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$, l'équation de Gibbs conduit à $\frac{ds}{dt} = 0$. Pour un fluide parfait, la viscosité est négligée. Comme de plus les apports de chaleur sont nuls, il est normal que l'entropie reste constante le long des trajectoires des particules fluides. En effet, les transformations sont réversibles.

- 3) On considère un fluide visqueux newtonien de coefficients de Lamé λ_n et μ_n . On dit que l'on est en présence d'une compression isotrope si $\underline{D} = -\alpha \underline{I}$ avec $\alpha > 0$. La puissance des forces intérieures de viscosité est définie par $-\underline{\tau} : \underline{D}$ où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuse. En invoquant le second principe de la thermodynamique, montrer que l'on doit avoir $3\lambda_n + 2\mu_n \geq 0$.

| Comme $\underline{\tau} = \lambda_n \operatorname{tr}(\underline{D}) \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$, on a $-\underline{\tau} : \underline{D} = -(3\lambda_n + 2\mu_n)\alpha^2$. On en déduit $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$.

- 4) L'hypothèse de Stokes consiste à supposer que la puissance $-\underline{\tau} : \underline{D}$ des forces intérieures de viscosité est nul lors d'une compression isotrope. En déduire une relation entre les coefficients de Lamé λ_n et μ_n d'un fluide newtonien.

| On en déduit $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU IIa Écoulements de Poiseuille - Couette

On considère un écoulement fluide compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$ dans le repère orthonormé $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$. On suppose que la loi de comportement rhéologique du milieu est celle d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique homogène ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n . On note $\underline{U}(x, t)$ le champ de vitesse et $p(x, t)$ le champ de pression. On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. On suppose que la plaque du bas, en $z = -l$, est immobile, et que la plaque du haut, en $z = l$, est animée d'une vitesse uniforme $U_* \underline{e}_x$.

- 1) Écrire les conditions aux limites pour la vitesse en $z = \pm l$.

| Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{U}(x, y, -l) = \underline{0}$ et $\underline{U}(x, y, l) = U_* \underline{e}_x$ pour tout couple (x, y) .

- 2) Écrire les équations du mouvement.

| Les équations du mouvement s'écrivent $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ et $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z + \nu_n \Delta \underline{U}$.

On cherche des solutions stationnaires telles que $\underline{U}(\underline{x}, t) = U(z) \underline{e}_x$. On suppose que $p(0, 0, 0) = P_0$ et $p(L, 0, 0) = P_L$, les pressions en $\underline{x} = \underline{0}$ et $\underline{x} = L \underline{e}_x$ sont des constantes connues. On suppose que $P_L \leq P_0$.

3) Écrire les équations du mouvement que doivent vérifier ces solutions particulières.

On a trivialement $\text{div } \underline{U} = 0$. Le profil $U(z)$ vérifie $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n U''(z)$. Les autres équations s'écrivent $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$.

4) Montrer d'abord que la pression est de la forme $p = C z + G(x)$ où C est une constante que l'on précisera.

En intégrant les deux dernière équations on obtient $p = -\rho_0 g z + G(x)$. On a donc $C = -\rho_0 g$.

5) Montrer que $G'(x) = -B$ et que p est de la forme $p = A - B x + C z$ où A et B sont des constantes que l'on précisera.

En reportant dans la première, on obtient $0 = -\frac{1}{\rho_0} G'(x) + \nu_n U''(z)$. On en déduit que $G'(x)$ est une constante que l'on note $-B$. On a donc $p = A - B x - \rho_0 g z$. Les valeurs de P en $x = 0$ et $x = L$ sur le plan central entraînent $A = P_0$ et $B = \frac{P_0 - P_L}{L}$.

6) Montrer que $U(z)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire avec deux conditions aux limites que l'on précisera. On pourra noter $\beta = (P_0 - P_L)/(2 \rho_0 \nu_n L)$.

On en déduit que $-\frac{P_0 - P_L}{\rho_0 L} = \nu_n U''(z)$ et donc $U''(z) = -\beta/2$ avec les conditions aux limites $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_*$.

7) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_* = 0$ (écoulement de Poiseuille).

Dans le cas $U_* = 0$, la solution est $U(z) = \beta(l^2 - z^2)$.

8) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_* \neq 0$ et $P_L = P_0$ (écoulement de Couette).

Dans le cas $P_L = P_0$, on a $\beta = 0$ et donc $U(z) = U_*(z + l)/(2l)$.

9) Calculer $U(z)$ dans le cas général $U_* \neq 0$ et $P_L \neq P_0$. Comparer avec les profils des deux questions précédentes et commenter.

Dans le cas général, on a $U(z) = \beta(l^2 - z^2) + U_*(z + l)/(2l)$. C'est la somme des deux profils précédent. Cela résulte du fait que l'équation du second degré et les conditions aux limites constituent un problème linéaire.

NIVEAU IIb

 Ondes sonores

On considère un fluide parfait, compressible, non conducteur de la chaleur, dans un milieu infini en l'absence de forces ou de chauffage extérieur. On suppose que ses lois d'état sont celles d'un gaz parfait $e = c_v T$ et $p = \rho r T$ où c_v et r sont des constantes. On suppose connue la représentation eulérienne des champs de vitesse $\underline{U}$, de masse volumique ρ , de pression p et de température T à l'ordre dominant d'un petit paramètre $\eta \ll 1$:

$$\begin{aligned} \underline{U}(\underline{x}, t) &= \eta c \cos [k(x_1 - ct)] \underline{e}_1 + O(\eta^2) \\ \rho(\underline{x}, t) &= \rho_0 + \eta \rho_0 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ p(\underline{x}, t) &= p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ T(\underline{x}, t) &= T_0 + \eta (r/c_v) T_0 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (8.1)$$

où $\underline{e}_1$ est un vecteur unitaire de la base canonique et où k , p_0 et ρ_0 sont des constantes données, $T_0 = \frac{p_0}{r \rho_0}$ s'en déduit et c est une vitesse que l'on veut déterminer pour que ces champs soient solutions des équations d'Euler. On négligera les forces de gravité.

- 1) Montrer que la loi de conservation de la masse est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

La loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$ s'écrit ici $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\eta \rho_0 \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_0 \eta c \cos \varphi) + O(\eta^2)$ avec $\varphi = k(x_1 - ct)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la masse est satisfaite à l'ordre η .

- 2) Montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

Seule la première composante $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} U_1 + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} U_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} p$ de l'équation de la quantité de mouvement $\rho \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U} \right) = -\text{grad} p$ nécessite une vérification non triviale. Elle s'écrit $\eta \rho_0 c \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta \rho_0 c^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la conservation de mouvement est satisfaite à l'ordre η .

- 3) Montrer que l'équation de bilan de l'énergie interne est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).

L'équation de bilan de l'énergie interne $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} e + \underline{U} \cdot \text{grad} e \right) = -p \text{div} \underline{U}$, avec $e = c_v T$, s'écrit ici $\eta \rho_0 r T_0 \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta p_0 c \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$ et $\rho_0 r T_0 = p_0$, l'équation de bilan de l'énergie interne est satisfaite à l'ordre η .

- 4) En exprimant l'équation d'état du gaz parfait à l'ordre un en η , montrer que $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p = c_v + r$.

L'équation d'état $p = \rho r T$ s'écrit $p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos \varphi = \rho_0 r T_0 + \eta r (\rho_0 T_0 + \rho_0 T_0 r / c_v) \cos \varphi + O(\eta^2)$. L'ordre dominant est satisfait par définition de T_0 . L'ordre un en η conduit à $\rho_0 c^2 = \rho_0 T_0 r (1 + r/c_v)$ c'est-à-dire $c^2 = r T_0 \frac{c_v + r}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} r T_0 = \gamma r T_0$. On obtient donc bien $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p = c_v + r$.

- 5) Commenter le nom de "vitesse du son" attribué à la vitesse c .

La vitesse c est la vitesse de propagation d'une onde progressive longitudinale qui correspond à des oscillations des champs dont le champ de pression. On peut montrer que l'entropie $s = s_0$ reste constante au cours de ces oscillations et que l'on a en fait $c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right)_s(\rho_0, s_0)$ où $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ est la loi d'état des gaz parfaits.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU IIIa Calculs énergétiques de Couette

On considère le champ de pression $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$ et le champ de vitesse $U(z) = a z + b$ d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n . Le fluide, soumis à la gravité $-g \underline{e}_z$ est compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$

- 1) On suppose que $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_*$. En déduire a et b .
- 2) Calculer la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ exercés dans le domaine $\mathcal{D} = \{ \underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq D \text{ et } |z| \leq l \}$
- 3) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des efforts de contact extérieurs à $\mathcal{D}$.
- 4) Comparer les puissances $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$. Commenter.

NIVEAU IIIb

 Compression isotherme

On considère le mouvement d'un fluide newtonien qui à $t = 0$ possède une densité uniforme ρ_0 et occupe un domaine Ω_0 de volume V_0 . On suppose que ce mouvement $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit :

$$x_1 = a_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad x_2 = a_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad x_3 = a_3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8.2)$$

- 1) Calculer le volume $V(t)$ du domaine $\Omega(t)$ occupé par le fluide à l'instant t et tracer $V(t)$ en fonction de t .
- 2) Montrer que la densité $\rho(\underline{x}, t)$ est indépendante de $\underline{x}$ et indiquer son expression $\rho(t)$ en fonction du temps. Calculer le produit $\rho(t) V(t)$ et donner sa signification physique. Tracer cette fonction.
- 3) Calculer la représentation eulérienne du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ et en déduire sa divergence $\text{div } \underline{U}(\underline{x}, t)$.
- 4) En déduire que ρ et $\underline{U}$ vérifient bien l'équation de continuité en représentation eulérienne.

On suppose que les lois d'état $p = \mathcal{P}(\rho, e)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, T)$ du fluide visqueux sont celles d'un gaz parfait monoatomique : $p = \rho R T / M$ et $e = c_v T$ où R , M et c_v sont des constantes. On note λ_n et μ_n les coefficients de Lamé de ce fluide newtonien. On suppose de plus que le mouvement est suffisamment lent pour que la transformation puisse être considérée comme isotherme avec $T = T_0$.

- 5) Montrer que $p(t)$ ne dépend pas de l'espace et donner son expression en fonction de $p_0 = p(0)$. Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$.
- 6) En déduire la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)]$ à chaque instant t . Que devient cette expression lorsque l'on fait l'hypothèse de Stokes $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$. Commenter.
- 7) Écrire l'équation de bilan de l'énergie interne en notant r le terme de chauffage interne et k la conduction thermique. Quels sont les termes non nuls? On suppose que la chaleur est évacuée par un rayonnement électromagnétique modélisé par le terme de chauffage r . En déduire la valeur $r(t)$ pour cette transformation isotherme. Commenter le signe négatif de r .