Exercices pour le chapitre 7 : Équations de bilan

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

On considère le champ de vitesse stationnaire $\underline{U}(\underline{x}) = \gamma\,\underline{x}$ et le champ scalaire $c(\underline{x},t) = \beta\,t\,\underline{x}^2$ où γ et β sont des constantes. On considère le domaine $\mathcal{D}_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| \leq R_0\}$ où R_0 est un rayon constant.

1) Décrire l'image $\mathcal{D}(t)$ de $\mathcal{D}_0$ par le mouvement. Calculer l'intégrale triple $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x},t)\,d^3x$.

Les trajectoires du mouvement sont de la forme $\underline{X}(\underline{a},t) = \underline{a}\,e^{\gamma\,t}$. La déformation inverse est donc $\underline{A}(\underline{x},t) = \underline{x}\,e^{-\gamma\,t}$. L'image du domaine $\mathcal{D}_0$ d'équation $\underline{a}^2 \leq R_0^2$ est donc le domaine $\mathcal{D}(t)$ d'équation $\underline{x}^2\,e^{-2\,\gamma\,t} \leq R_0^2$ qui est la sphère de centre $\underline{0}$ et de rayon $R(t) = R_0\,e^{\gamma\,t}$. On a donc $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = 4\,\pi\int_0^{R(t)}\beta\,t\,r^4\,dr = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,t\,R^5(t) = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,t\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$.

2) Cacluler les intégrales triples $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\frac{\partial c}{\partial t}\,d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\frac{dc}{dt}\,d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)} c\,\mathrm{div}\;\underline{U}\,d^3x$, $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\mathrm{div}\;(c\,\underline{U})\,d^3x$. Comparer avec la dérivée de $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$.

On a $\frac{\partial c}{\partial t} = \beta\,\underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\frac{\partial c}{\partial t}\,d^3x = 4\,\pi\int_0^{R(t)}\beta r^4\,dr = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$. Comme $\underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\;c = 2\,\beta\,\gamma\,t\,\underline{x}^2$, on a $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\;c = \beta(1+2\,\gamma\,t)\,\underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\frac{dc}{dt}\,d^3x = 4\,\pi\int_0^{R(t)}\beta(1+2\,\gamma\,t)r^4\,dr = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,(1+2\,\gamma\,t)\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$. On a $\mathrm{div}\;\underline{U} = 3\,\gamma$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)} c\,\mathrm{div}\;\underline{U}\,d^3x = 4\,\pi\int_0^{R(t)}\beta\,(3\,\gamma\,t)r^4\,dr = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,(3\,\gamma\,t)\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$. On a $c\,\underline{U} = \beta\,\gamma\,t\underline{x}^2\,\underline{x}$, $\mathrm{div}\;(c\,\underline{U}) = \beta\,(5\,\gamma\,t)\,\underline{x}^2$ et donc $\iiint_{\mathcal{D}(t)}\mathrm{div}\;(c\,\underline{U})\,d^3x = 4\,\pi\int_0^{R(t)}\beta\,(5\,\gamma\,t)r^4\,dr = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,(5\,\gamma\,t)\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$. Comme $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \frac{4\,\pi}{5}\,\beta\,(1+5\,\gamma\,t)\,R_0^5\,e^{5\,\gamma\,t}$, on a bien $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)}(\frac{dc}{dt} + c\,\mathrm{div}\;\underline{U})\,d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)}\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\;(c\,\underline{U})\right]\,d^3x$.

3) On suppose que $\rho^{(L)}(\underline{a},0) = \rho_0$ est homogène. À partir de la loi de conservation de la masse en formulation lagrangienne, montrer que $\rho(\underline{x},t) = \rho_0\,e^{-3\,\gamma\,t}$. Vérifier alors la relation $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\;\underline{U} = 0$.

Comme $J(\underline{a},t) = e^{3\,\gamma\,t}$, la loi de conservation de la masse $\rho^{(L)}(\underline{a},t)\,J(\underline{a},t) = \rho_0$ entraine $\rho^{(L)}(\underline{a},t) = \rho_0\,e^{-3\,\gamma\,t}$ et donc $\rho(\underline{x},t) = \rho_0\,e^{-3\,\gamma\,t}$. On a $\frac{d\rho}{dt} = -3\,\gamma\,\rho_0\,e^{-3\,\gamma\,t}$ et $\mathrm{div}\;\underline{U} = 3\,\gamma$. On a donc bien $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\;\underline{U} = 0$.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Lois de conservation et équation de Burgers

Écriture des lois de conservation

1) La table **7**.1 recense plusieurs loi de conservation ou équations de bilan écrite sous la forme $\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} c\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c\, d^3x$ avec $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c\, d^3x$. Pour chaque ligne, écrire les bilans locaux sous la forme conservative puis sous la forme avec masse conservée. Écrire également la relation de saut associée.

Grandeur	Densité	Flux	Production
$\mathcal{C}\,[\mathcal{D}(t)]$	c	$\underline{Q}_c$	f_c
$m\,[\mathcal{D}(t)]$	ρ	$\underline{0}$	0
$\mathcal{E}_{\text{int}}\,[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\, e$	$\underline{Q}$	$r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$
$\mathcal{K}\,[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2$	$-\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U}$	$\underline{f}\cdot\underline{U} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$
$\mathcal{E}_{\text{tot}}\,[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2 + \rho\, e$	$-\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U} + \underline{Q}$	$\underline{f}\cdot\underline{U} + r$
$\underline{p}\,[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\,\underline{U}$	$-\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{f}$

TABLE **7**.1 – Équations de bilan de la mécanique des milieux continus.

La forme conservative $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\,\underline{U}) = 0$ de la loi de conservation de la masse s'écrit aussi $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\text{div}\,\underline{U} = 0$ ou $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\,\rho + \rho\,\text{div}\,\underline{U} = 0$. La relation de saut associée s'écrit $\left[\!\left[\rho\,(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}\right]\!\right] = 0$.

Les formes conservative, avec masse conservée et la relation de saut pour le bilan de l'énergie interne s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, e) + \text{div}\,(\rho\, e\,\underline{U} + \underline{Q}) = r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}},$$
$$\rho\,\frac{de}{dt} + \text{div}\,\underline{Q} = r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$$
$$\text{et}\quad \left[\!\left[\rho\, e(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}\right]\!\right] + \left[\!\left[\underline{Q}\cdot\underline{N}\right]\!\right] = 0.$$

Pour le bilan de l'énergie cinétique, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2\right) + \text{div}\,\left(\tfrac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2\,\underline{U} - \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U}\right) = \underline{f}\cdot\underline{U} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2\right) - \text{div}\,(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U}) = \underline{f}\cdot\underline{U} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$$
$$\text{et}\quad \left[\!\left[\tfrac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2\,(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}\right]\!\right] - \left[\!\left[\underline{U}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{N}\right]\!\right] = 0.$$

Pour la loi de conservation de l'énergie totale, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2 + e\right) + \text{div}\,\left[\left(\tfrac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2 + e\right)\,\underline{U} - \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U} + \underline{Q}\right] = \underline{f}\cdot\underline{U} + r,$$
$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,\underline{U}^2 + e\right) - \text{div}\,(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U} + \underline{Q}) = \underline{f}\cdot\underline{U} + r,$$
$$\text{et}\quad \left[\!\left[\left(\tfrac{1}{2}\,\rho\,\underline{U}^2 + e\right)\,(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}\right]\!\right] - \left[\!\left[\underline{U}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{N} + \underline{Q}\cdot\underline{N}\right]\!\right] = 0.$$

Pour la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\underline{U}) + \underline{\text{div}}\,(\rho\,\underline{U}\otimes\underline{U}) = \underline{f},$$
$$\rho\,\frac{d\underline{U}}{dt} + \underline{\text{div}}\,(\rho\,\underline{U}\otimes\underline{U}) = \underline{f}$$

et
$$\left[\!\left[\rho\,\underline{U}\otimes(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}\right]\!\right] - \left[\!\left[\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{N}\right]\!\right] = 0.$$

Modèles de l'équation de Burgers

On considère une loi de conservation pour laquelle $\underline{U} = \underline{0}$ et où le champ unidimensionnel $c(\underline{x}, t) = c(x, t)$, continu ou discontinu, est indépendant de y et z. La loi s'écrit donc, e pour tout domaine $\mathcal{D}$ fixe, sous la forme

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}} c\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c\cdot\underline{n}\, dS = 0\,. \qquad (\mathbf{7}.1)$$

2) Écrire le bilan local dans le cas continu ainsi que la relation de saut pour une surface de discontinuité d'équation $x = x_*(t)$ séparant une région uniforme $c(x,t) = c_1$ pour $x < x_*(t)$ d'une région uniforme $c(x,t) = c_2$ pour $x > x_*(t)$. On notera $\underline{W} = W(t)\, \underline{e}_x$.

> Le bilan local s'écrit $\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial Q_c}{\partial x} = 0$ et la relation de saut est $W = \left[\!\left[Q_c\right]\!\right] / \left[\!\left[c\right]\!\right]$.

3) On suppose que $c = A(x,t)$ et $\underline{Q}_c = \frac{1}{2}\,\beta\, A^2\, \underline{e}_x$. Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Calculer la vitesse $W(t)$.

> Le bilan local est $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\beta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(A^2\right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \beta\, A\, \frac{\partial A}{\partial x} = 0$. La relation de saut est $-W[\![A]\!] + \frac{1}{2}\,\beta\,[\![A^2]\!] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{1}{2}\,\beta\,\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2 - A_1} = \frac{\beta}{2}(A_1 + A_2)$. C'est la moyenne des vitesses A_1 et A_2.

4) On suppose maintenant que $c = A^2(x,t)$ et $\underline{Q}_c = \frac{2}{3}\,\beta\, A^3\, \underline{e}_x$. Répondre aux deux questions précédentes en supposant que $A \neq 0$ et $A_1 + A_2 \neq 0$. Comparer avec le modèle précédent.

> Le bilan local est $\frac{\partial}{\partial t}\left(A^2\right) + \frac{2}{3}\,\beta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(A^3\right) = 2\,A\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \beta\, A\,\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0$. La relation de saut est $-W[\![A^2]\!] + \frac{2}{3}\,\beta\,[\![A^3]\!] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{3}{2}\,\beta\,\frac{A_2^3 - A_1^3}{A_2^2 - A_1^2} = \frac{2}{3}\,\beta\,\frac{A_1^2 + A_1\, A_2 + A_2^2}{A_1 + A_2}$. Les deux modèles correspondent au même bilan local mais diffèrent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III — Film glissant sur un plan incliné

Un film liquide d'épaisseur h et de densité ρ s'écoule sur un plan incliné faisant un angle γ avec l'horizontale. On suppose que les seules forces extérieures de volume sont dues à la gravité. On choisit la coordonnée x_3 dans la direction normale au plan et x_1 dans la direction de l'écoulement. On suppose que $x_3 = 0$ est l'équation du fond.
On suppose que l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ en tout point $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = -p_a\,\underline{\underline{I}} + \rho\, g\,(h - x_3)\begin{pmatrix} -\cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & -\cos\gamma & 0 \\ \sin\gamma & 0 & -\cos\gamma \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{7}.2)$$

1) Calculer les forces de contact $\underline{T}_a$ exercées sur la surface libre du fluide par l'atmosphère.
2) Calculer les forces de contact $\underline{T}_p$ exercées par le fluide sur la paroi. En déduire la contrainte normale $\sigma = -\underline{T}_p\,\underline{e}_3$ et la contrainte de cisaillement $\tau = T_p\,\underline{e}_1$.
3) Calculer la densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x})$ de la résultante des forces de contacts.
4) Donner les composantes des forces extérieures de volume $\underline{f}$. Comparer avec $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x})$ et commenter.
5) Calculer le bilan des forces de contact $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}_{\text{fix}})$ exercées sur le domaine fixe $\mathcal{D}_{\text{fix}} = \{\underline{x} \in I\!R^3 \mid 0 \le x_1 \le L_1,\ 0 \le x_2 \le L_2,\ 0 \le x_3 \le h\}$. Interpréter.