

Exercices pour le chapitre 6 : Cinématique du continu

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

On considère le champ de vitesse $\underline{U} = l\omega [\sin \varphi(x_3, t) \underline{e}_1 - \cos \varphi(x_3, t) \underline{e}_2]$ où $\varphi(x_3, t) = kx_3 - \omega t$. On suppose que l , ω et k sont des constantes positives.

- 1) Déterminer les trajectoires $\underline{x}(t)$ associées à ce champ de vitesse. En déduire l'expression de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$. Quelle est la forme de ces trajectoires.

Les trajectoires sont solution de $\frac{dx_1}{dt} = l\omega \sin(kx_3 - \omega t)$, $\frac{dx_2}{dt} = -l\omega \cos(kx_3 - \omega t)$ et $\frac{dx_3}{dt} = 0$. On en déduit les trajectoires $\underline{x}(t)$ telle que $x_3(t) = a_3$,

$$x_1(t) = a_1 + l [\cos(k a_3 - \omega t) - \cos(k a_3)] \text{ et } x_2(t) = a_2 + l [\sin(k a_3 - \omega t) - \sin(k a_3)].$$

On a donc $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + l [\cos \varphi(a_3, t) \underline{e}_1 + \sin \varphi(a_3, t) \underline{e}_2]$. Ces trajectoires sont de cercles de rayon l .

- 2) Décrire les lignes de courant à l'instant t par un paramétrage $s \mapsto \underline{y}(s)$ sous la forme $\underline{y}(s) = \underline{y}(0) + \underline{Y}(s)$ où $\underline{Y}(s)$ est une fonction que l'on déterminera. Quelle est la nature de ces lignes de courant.

Les lignes de courant sont données par $\frac{dy}{ds}(s) = \phi(s) \underline{U}[\underline{y}(s), t]$. En choisissant $\phi(s) = 1$, on peut écrire $\frac{dy_1}{ds} = l\omega \sin \varphi(y_3, t)$, $\frac{dy_2}{ds} = -l\omega \cos \varphi(y_3, t)$ et $\frac{dy_3}{ds} = 0$. On en déduit $y_3(s) = y_3(0)$, $y_1(s) = y_1(0) + l\omega \sin \varphi[y_3(0), t] s$ et $y_2(s) = y_2(0) - l\omega \cos \varphi[y_3(0), t] s$. Les lignes de courant sont donc des droites.

- 3) Expliciter les composantes du gradient du champ de vitesse $\underline{K}(\underline{x}, t)$, du tenseur des taux de déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$ et du tenseur des taux de rotations $\underline{\Omega}(\underline{x}, t)$. En déduire le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$. Comparer ce vecteur avec $\underline{U}$.

On a $K_{13} = l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $K_{23} = l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $K_{ij} = 0$ sinon. On a $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $D_{23} = D_{32} = \frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. On a $\Omega_{13} = -\Omega_{31} = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$, $\Omega_{23} = -\Omega_{32} = \frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$ et $\Omega_{ij} = 0$ sinon. Comme $\Omega_{31} + \omega_2 = 0$ et $\omega_1 + \Omega_{23} = 0$, on a $\omega_1 = -\frac{1}{2} l\omega k \sin \varphi(x_3, t)$, $\omega_2 = \frac{1}{2} l\omega k \cos \varphi(x_3, t)$ et $\omega_3 = 0$. On remarque que $\underline{\omega} = \frac{1}{2} k \underline{U}$.

- 4) On considère le petit vecteur $\delta \underline{x}(t)$ transporté par la trajectoire $\underline{x}(t) = l [\cos(\omega t) - 1] \underline{e}_1 - l \sin(\omega t) \underline{e}_2$ issue du point $\underline{x}(0) = \underline{a} = \underline{0}$. On suppose que $\delta \underline{x}(0) = \delta x \underline{e}_3$. Exprimer les coordonnées de $\delta \underline{x}(t)$. Décrire le mouvement de $\delta \underline{x}(t)$.

- Comme $\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t)$, on peut écrire $\frac{d}{dt}\delta x_1 = \delta x_3 l \omega k \cos(\omega t)$, $\frac{d}{dt}\delta x_2 = -\delta x_3 l \omega k \sin(\omega t)$ et $\frac{d}{dt}\delta x_3 = 0$. On en déduit $\delta x_1(t) = \delta x l k \sin(\omega t)$, $\delta x_2(t) = \delta x l k \cos(\omega t)$ et $\delta x_3(t) = \delta x$. Le petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ décrit un cercle.
- 5) On considère le champ $B(\underline{x}, t) = \gamma x_1 t$. Calculer $\frac{\partial B}{\partial t}$, $\underline{U} \cdot \text{grad } B$ et $\frac{dB}{dt}$.
- On a $\frac{\partial B}{\partial t} = \gamma x_1$, $\underline{U} \cdot \text{grad } B = \gamma l \omega t \sin \varphi(x_3, t)$ et $\frac{dB}{dt} = \gamma x_1 + \gamma l \omega t \sin \varphi(x_3, t)$.
- 6) On considère le champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}, t)$ tel que $V_1 = x_1 \cos \varphi(x_3, t) + x_2 \sin \varphi(x_3, t)$, $V_2 = x_1 \sin \varphi(x_3, t) - x_2 \cos \varphi(x_3, t)$ et $V_3 = 0$. Calculer $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}$, $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{V}$ et la dérivée particulaire $\frac{d\underline{V}}{dt}$.
- On a $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = \omega(x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi) \underline{e}_1 + \omega(-x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) \underline{e}_2$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{V} = l \omega \sin \varphi (\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2) - l \omega \cos \varphi (\sin \varphi \underline{e}_1 - \cos \varphi \underline{e}_2) = l \omega \underline{e}_2$. D'où $\frac{d\underline{V}}{dt} = l \omega \underline{e}_2 + x_1(\sin \varphi \underline{e}_1 - \cos \varphi \underline{e}_2) + x_2(-\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2)$.
- 7) Calculer $\underline{K}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t)$. En déduire l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$. Comparer ce vecteur avec $\underline{e}_3 \wedge \underline{U}$. Calculer $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ et $\text{grad } \underline{U}^2$. Commenter.
- On a $\underline{K} \cdot \underline{U} = 0$, d'où $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = 0$. On a donc $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ ce qui entraîne $\frac{d}{dt} \underline{U} = l \omega^2 (-\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2) = \omega \underline{e}_3 \wedge \underline{U}$. Comme $\text{rot } \underline{U} = \frac{1}{2} k \underline{U}$ et $\underline{U}^2 = l^2 \omega^2$, on a $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = 0$ et $\text{grad } \underline{U}^2 = 0$, ce qui est consistant avec $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 = 0$.
- 8) Indiquer le taux de variation des longueurs de petits vecteurs orientés dans les directions de la base canonique. Comparer avec leur évolution donnée par la relation $\frac{d}{dt} \underline{\delta x} = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}$.
- Ces taux de variations sont nuls car $D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0$. Pour cet exemple particulier, on a même $\frac{d}{dt} \underline{\delta x} = 0$ pour les petits vecteurs tels que $\underline{\delta x}(0) \wedge \underline{e}_i$ avec $i = 1, \dots, 3$, compte-tenu de la structure de $\underline{K}$.
- 9) Indiquer les taux de variation $\frac{d\gamma_{12}}{dt}$, $\frac{d\gamma_{23}}{dt}$ et $\frac{d\gamma_{31}}{dt}$ dans angles de glissement des directions de bases.
- On a $\frac{d\gamma_{12}}{dt} = 0$, $\frac{d\gamma_{23}}{dt} = 2 D_{23} = l \omega k \sin \varphi$ et $\frac{d\gamma_{31}}{dt} = 2 D_{13} = l \omega k \cos \varphi$.
- 10) Calculer le taux de variation des volumes.
- On a $\frac{1}{\delta \mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t] = 0$.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Rotation et déformation

Le vecteur taux de rotation est défini par $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$ en représentation eulérienne. Le tenseur des taux de déformation $\underline{D}$ est la partie symétrique du gradient de la vitesse exprimée en représentation eulérienne.

- 1) *Écoulement purement cisailé.* On considère un écoulement dont le champ de vitesse est $U_1 = F(x_2)$ et $U_2 = U_3 = 0$. Calculer $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$. Tracer la trajectoire d'une particule. Discuter l'éventuelle rotation de la particule sur elle-même. Calculer les directions propres de $\underline{D}$ pour en déduire une description de sa déformation.

On a $K_{12} = F'(x_2)$ et $K_{ij} = 0$ sinon. D'où $D_{12} = D_{21} = F'(x_2)/2$ et $D_{ij} = 0$ sinon. On a $\underline{\omega} = -\frac{1}{2} F'(x_2) \underline{e}_3$. Les trajectoires vérifient $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}(\underline{x})$ et donc $\frac{d\underline{x}_1}{dt} = F(x_2)$, $\frac{d\underline{x}_2}{dt} = \frac{d\underline{x}_3}{dt} = 0$. D'où $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ et $x_1 = a_1 + F(a_2)t$. Les trajectoires sont des droites. Une particule transportée par le mouvement tourne avec la vitesse angulaire $-F'(a_2)/2$ dans le plan (a_1, a_2) . En diagonalisant $\underline{D}$, on voit que son taux de déformation est de $F'(a_2)/2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ et de $-F'(a_2)/2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$. Il est nul dans la direction $\underline{e}_3$.

2) *Écoulement en rotation solide.* Mêmes questions pour $U_1 = -\Omega x_2$, $U_2 = \Omega x_1$ et $U_3 = 0$. Exprimer la vitesse en coordonnées cylindriques ainsi que $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$. Montrer que $\underline{\Omega} = \Omega(-\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$.

On a $K_{12} = -\Omega$, $K_{21} = \Omega$ et $K_{ij} = 0$ sinon. D'où $\underline{D} = \underline{0}$ et $\underline{\omega} = \Omega \underline{e}_3$. Les trajectoires vérifient $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}(\underline{x}) = \Omega \underline{e}_3 \wedge \underline{x}$. On a donc $\frac{d}{dt} \underline{x}^2 = 2 \underline{x} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = 0$. Comme $|\underline{x}|$ est constant, les trajectoires sont des cercles de centre O . Une particule transportée par le mouvement tourne avec la vitesse angulaire Ω dans le plan (a_1, a_2) . Elle n'est pas déformée. Il s'agit d'un mouvement de rotation solide. On vérifie que l'on a bien $\underline{\Omega} \cdot \delta \underline{x} = \omega \wedge \delta \underline{x}$ pour tout $\delta \underline{x} = \delta x_r \underline{e}_r + \delta x_\theta \underline{e}_\theta$ pour l'expression indiquée.

3) *Écoulement dans un cyclone.* On considère le champ de vitesse qui s'écrit $U(r, \theta, z) = -\kappa \underline{e}_\theta(\theta)/r$ en coordonnées cylindriques. Calculer $\underline{\omega}$ et $\underline{D}$ en coordonnées cylindriques. Tracer la trajectoire d'une particule. Discuter l'éventuelle rotation de la particule sur elle-même ainsi que sa déformation.

On a $U_r = 0$, $U_\theta = -\kappa/r$ et $U_z = 0$ en coordonnées cylindriques. Dans ces coordonnées, les seules composantes non nulles de $\underline{K}$ sont $K_{\theta r} = U_{\theta,r} = \kappa/r^2$ et $K_{r\theta} = -U_{\theta,r} = -\kappa/r^2$. On a donc $\underline{\Omega} = \underline{0}$ et $\underline{D} = \underline{K}$. En diagonalisant $\underline{D}$, on voit que son taux de déformation est de κ/r^2 dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_r + \underline{e}_\theta)$ et de $-\kappa/r^2$ dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_r - \underline{e}_\theta)$. Il est nul dans la direction $\underline{e}_3$. Il s'agit du champ de vitesse induit par un tourbillon ponctuel centré en O . La vitesse est infini en ce point.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III Mouvements avec fonction de courant

On considère le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ tel que $w = 0$ et

$$u(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial y} \quad \text{et} \quad v(\underline{x}, t) = \frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial x}, \quad (6.1)$$

où $\psi(\underline{x})$ est un champ quelconque appelée "fonction de courant" associée au champ $\underline{U}(\underline{x})$.

- 1) Montrer que l'on peut écrire $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \text{grad } \psi$.
- 2) Montrer qu'un mouvement qui admet une fonction de courant est isochore.
- 3) Exprimer le rotationnel d'un tel mouvement en fonction de $\Delta \psi$.
- 4) On considère une courbe $\underline{x}(s)$, paramétré par une variable s , vérifiant $\psi[\underline{x}(s), t_*] = C$ où C est une constante. En calculant la dérivée de $\psi[\underline{x}(s), t_*]$ par rapport à s pour le temps t_* fixé, montrer que la vitesse $\underline{U}$ est tangente en tout point à la courbe $\underline{x}(s)$.
- 5) En déduire le tracé des trajectoires dans le cas où le mouvement est stationnaire, c'est-à-dire lorsque le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ ne dépend pas du temps,

Écoulement en coin

On considère un écoulement dont la vitesse est $u = \gamma(x^2 - y^2)$, $v = -2\gamma xy$ et $U_z = 0$.

- 6) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ et interpréter ses composantes. Calculer la divergence du champ de vitesse et en déduire le taux de variation des volumes ?
- 7) Montrer que ce mouvement admet la fonction de courant $\psi(\underline{x}) = \gamma \left(\frac{1}{3} y^3 - x^2 y \right)$. En déduire l'existence de trajectoires rectilignes que l'on explicitera.
- 8) Calculer le rotationnel du champ de vitesse. Calculer $\Delta\psi$. Commenter.