

Chapitre 8

Équations de Navier-Stokes

O. Thual, 9 septembre 2018

Sommaire

1	Fluides newtoniens	2
1.1	Rhéologie des fluides newtoniens	2
1.2	Conditions aux limites	3
1.3	Équations de Navier-Stokes incompressibles	5
2	Équations de Navier-Stokes compressibles	6
2.1	“Théorème” de l’énergie cinétique	6
2.2	Premier principe de la thermodynamique	7
2.3	Lois de conservation, de comportement et d’état	9
3	Du compressible à l’incompressible	10
3.1	Relation de Gibbs et entropie	10
3.2	Ondes sonores	11
3.3	Filtrage des ondes sonores	12

Introduction

Contrairement aux solides élastiques, pour lesquels les contraintes ne dépendent que de la déformation au temps considéré, la rhéologie des fluides dépend d'un champ de pression et des vitesses de déformation, c'est-à-dire des gradients de vitesses. La plupart des fluides comme l'air ou l'eau ont un comportement de fluides newtoniens pour lequel le tenseur des contraintes visqueuses dépend de manière linéaire, homogène et isotrope du tenseur des taux de déformations. Dans le cadre de l'approximation incompressible, la contrainte d'écoulement isochore suffit à compléter la loi de conservation de la quantité de mouvement pour résoudre les équations, à condition de spécifier des conditions aux limites et une condition initiale. Lorsque le fluide est considéré comme compressible, le champ de pression dépend de ses propriétés thermodynamiques et l'on doit compléter les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement par deux lois d'état et une équation de bilan de l'énergie interne issue du premier principe de la thermodynamique. L'introduction du champ d'entropie au moyen de l'équation de Gibbs permet de décrire les ondes sonores, adiabatiques. On explique alors comment l'approximation de fluide incompressible se justifie dans la limite des nombres de Mach très petits.

1 Fluides newtoniens

La loi de comportement rhéologique d'un fluide newtonien exprime le tenseur des contraintes en fonction d'un champ de pression et d'un tenseur des contraintes visqueuses fonction du tenseur des taux de déformation. La loi de conservation de la quantité de mouvement constitue alors une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesse que l'on complète par des conditions aux limites aux frontières du domaine étudié. Dans le cas incompressible, la contrainte isochore permet de déterminer le champ de pression.

1.1 Rhéologie des fluides newtoniens

Un fluide newtonien est défini par sa loi de comportement rhéologique

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}} = \lambda_n (\text{tr } \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}, \quad (8.1)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ est le tenseur des contraintes, $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression, $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t)$ le "tenseur des contraintes visqueuses", $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ le tenseur des taux de déformation et (λ_n, μ_n) deux coefficients de Lamé. Le coefficient μ_n est appelé "viscosité dynamique".

Cette loi est obtenue en observant que le tenseur de contrainte est un tenseur de pression lorsque λ_n et μ_n sont négligeables et que le tenseur des contraintes visqueuses dépend de manière linéaire, homogène et isotrope des gradients de vitesses locaux, et donc de $\underline{\underline{D}}$, en spécifiant que la loi de comportement ne dépend pas du choix du repère (indifférence matérielle).

La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho(\underline{x}, t) \frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}, t) + \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \quad (8.2)$$

fait intervenir la divergence du tenseur des contraintes dont les composantes s'écrivent

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda_n \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} + 2 \mu_n D_{ij} \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.3)$$

Un calcul similaire au cas de la loi de Hooke des solides élastiques permet de résumer le comportement rhéologique des fluides newtoniens par les relations

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= -p \underline{\underline{I}} + \lambda_n (\text{div } \underline{U}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}, \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} &= -\text{grad } p + (\lambda_n + \mu_n) \text{grad } (\text{div } \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

À titre d'exemple, on mesure $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour l'eau et $\mu_n = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour l'air. Pour tous les fluides, "l'hypothèse de Stokes" $3\lambda_n + 2\mu_n = 0$ est expérimentalement valide.

1.2 Conditions aux limites

La loi de conservation de la quantité de mouvement des fluides newtoniens s'écrit

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} - \text{grad } p + (\lambda_n + \mu_n) \text{grad } (\text{div } \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.5)$$

C'est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en espace pour les fluides visqueux et d'ordre un pour les fluides inviscides ($\lambda_n = \mu_n = 0$) aussi appelés "fluides parfaits" (à ne pas confondre avec les gaz parfaits). Il faut donc lui adjoindre trois conditions aux limites dans le cas général, une seule étant requise dans le cas inviscide (fluide parfait).

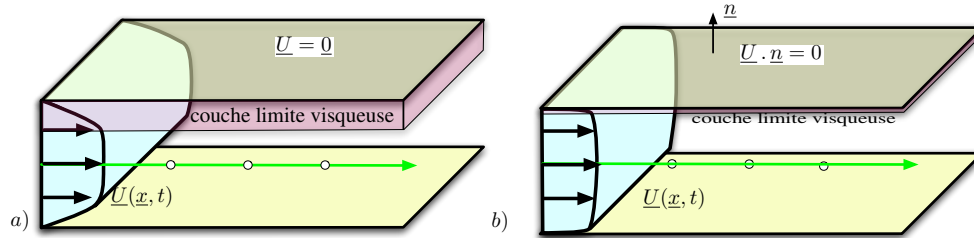


FIGURE 8.1 – Conditions aux limites sur une paroi solide. a) Fluide visqueux. b) Fluide parfait.

Si les frontières qui délimitent l'écoulement sont solides, la vitesse du fluide doit être égale à celle des parois. On considère ici le cas particulier où ces parois sont immobiles, le cas général s'en déduisant facilement. Dans le cas visqueux, les conditions aux limites s'écrivent

$$\underline{U} = \underline{0}, \quad \text{sur les parois solides.} \quad (8.6)$$

Dans le cas inviscide (fluide parfait), seule la vitesse normale à la paroi peut être imposée et les conditions aux limites s'écrivent, dans le cas d'une paroi immobile,

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = 0, \quad \text{sur les parois solides de normale } \underline{n}. \quad (8.7)$$

Le passage entre le cas visqueux et le cas inviscide peut être compris en considérant la couche limite visqueuse qui existe au voisinage des parois. Lorsque les coefficients λ_n et ν_n tendent vers zéro, l'épaisseur de la couche limite, où les effets visqueux sont influents, tend également vers zéro. La vitesse y varie très rapidement en espace et on observe des vitesses tangentielles non nulles très près des parois, c'est-à-dire sur les parois d'un point de vue mathématique dans le cas inviscide (figure 8.1).

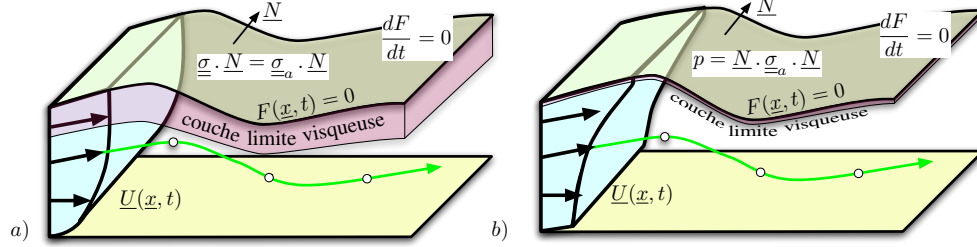


FIGURE 8.2 – Conditions aux limites sur une surface libre. a) Fluide visqueux. b) Fluide parfait.

Une partie des frontières de l'écoulement peut être constituée d'une surface libre en contact avec un autre fluide, par exemple l'air. Dans ce cas, l'équation $F(\underline{x}, t) = 0$ de la surface libre fait partie des inconnues du problème. Cette nouvelle inconnue doit être compensée par une condition aux limites que l'on obtient en spécifiant que les trajectoires $\underline{x}(t)$ des particules fluides de la surface vérifient $F[\underline{x}(t), t] = 0$. En dérivant par rapport au temps cette relation, on obtient la condition aux limites cinématiques qui s'écrit

$$\frac{dF}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } F = 0, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0. \quad (8.8)$$

Cette condition aux limites peut aussi s'écrire $\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N}$ où $\underline{W} = -\frac{\partial F}{\partial t} / \|\text{grad } F\| \underline{N}$ et $\underline{N} = \text{grad } F / \|\text{grad } F\|$ sont respectivement la vitesse et la normale de la surface libre.

Les conditions aux limites dynamiques s'obtiennent en écrivant les relations de saut à travers la surface libre considérée comme une surface de discontinuité. Comme $\underline{U} \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N}$, ces relations de saut s'écrivent, dans le cas visqueux,

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{N} = \underline{\sigma}_a \cdot \underline{N}, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0, \quad (8.9)$$

où $\underline{\sigma}_a$ est le tenseur des contraintes du fluide extérieur au domaine considéré. Dans le cas inviscide, le tenseur des contraintes du fluide considéré est un tenseur de pression $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$ et la condition aux limites dynamique se réduit à la relation scalaire

$$-p = \underline{N} \cdot \underline{\sigma}_a \cdot \underline{N}, \quad \text{sur la surface libre } F(\underline{x}, t) = 0, \quad (8.10)$$

l'existence d'une couche limite infiniment mince permettant de justifier qu'une seule des relations de saut soit vérifiée.

1.3 Équations de Navier-Stokes incompressibles

Lorsque l'écoulement est suffisamment lent, le fluide peut être considéré comme étant incompressible et la contrainte d'écoulement isochore

$$\operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0 \quad (8.11)$$

peut être imposée en tout point $\underline{x}$ et pour tout temps t . Dans ce cas, la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (8.12)$$

ce qui signifie que la masse volumique reste constante le long des trajectoires. En supposant $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$, c'est-à-dire que la masse volumique du fluide est homogène, la loi de comportement rhéologique et la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu_n \underline{D} \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} - \operatorname{grad} p + \mu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.13)$$

En notant $\nu_n = \mu_n / \rho_0$ la "viscosité cinématique", la contrainte d'incompressibilité et l'équation de conservation de la masse constituent le système des **équations de Navier-Stokes incompressibles** qui s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{1}{\rho_0} \underline{f} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu_n \Delta \underline{U}. \quad (8.14)$$

Lorsque le fluide est parfait, c'est-à-dire si l'on peut négliger ν_n , les équations inviscides correspondantes sont appelées ici les **équations d'Euler incompressibles**.

En ajoutant les conditions aux limites et en spécifiant une condition initiale pour le champ de vitesse, ce système d'équation est fermé, c'est-à-dire qu'il ne nécessite pas d'information supplémentaire pour trouver une solution. En particulier, la pression n'est pas reliée à la thermodynamique du fluide, l'approximation d'incompressibilité l'obligeant à s'adapter instantanément à la dynamique, c'est-à-dire au champ de vitesse.

On peut se convaincre du rôle asservi de la pression, dont le rôle est de s'adapter pour maintenir la contrainte d'incompressibilité, en faisant abstraction des conditions aux limites et en prenant respectivement la divergence l'équation de quantité de mouvement ce qui conduit, en tenant compte de la relation $\operatorname{div} \underline{U}$, à l'expression

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta p = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \underline{f} - \operatorname{div} (\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U}). \quad (8.15)$$

En inversant l'opérateur Δ (opération mathématique classique), on voit que la pression dépend uniquement du forçage $\underline{f}$ et du champ de vitesse $\underline{U}$. La pression peut être éliminée en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement ce qui conduit à la relation (après quelques manipulations algébriques) :

$$\frac{d(\operatorname{rot} \underline{U})}{dt} = [(\operatorname{rot} \underline{U}) \cdot \operatorname{grad}] \underline{U} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \underline{f} + \nu_n \Delta (\operatorname{rot} \underline{U}). \quad (8.16)$$

En écrivant que les solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles minimisent une fonctionnelle (non détaillée ici) sous la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \underline{U}$, on peut aussi interpréter p comme un “multiplicateur de Lagrange” associé à cette contrainte. Il est surtout important de retenir que, contrairement au cas compressible, la pression n'est pas un champ thermodynamique dans le cas incompressible.

2 Équations de Navier-Stokes compressibles

Le “théorème” de l'énergie cinétique, qui est en fait un axiome de base pour la mécanique des milieux continus, permet de déterminer l'expression de la puissance des forces de contact intérieures à un domaine transporté par le mouvement. On peut alors formuler le premier principe de la thermodynamique qui conduit à l'équation de bilan de l'énergie interne. L'ajout de deux lois d'état permet de compléter le système des équations de Navier-Stokes compressible.

2.1 “Théorème” de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique $\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$ d'un ensemble de particules fluides contenue dans le domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est définie par la relation

$$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x. \quad (8.17)$$

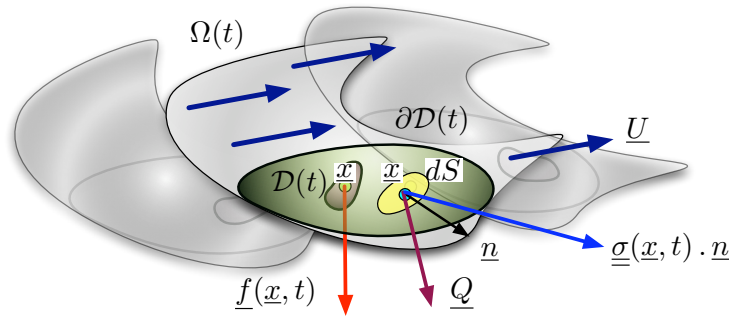


FIGURE 8.3 – Domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{U}$.

Par extrapolation du cas des masses ponctuelles ou des solides indéformables, le théorème de l'énergie cinétique, qui est ici, pour le cas des milieux continus, un postulat, s'écrit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] \quad (8.18)$$

où seule la puissance $\mathcal{P}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces intérieures de volumes, que l'on suppose négligeables, est absente. En explicitant les expressions des puissances

de tous les systèmes de forces, l'équation de bilan de l'énergie cinétique s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} dS \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x, \end{aligned} \quad (8.19)$$

où $\pi_{\text{int}}(\underline{x}, t)$ est la densité volumique de la puissance des forces de contact intérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$. La modélisation $\mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x$ sous la forme d'une intégrale de volume est moins riche qu'une éventuelle modélisation sous la forme d'une intégrale de surface dans la mesure où elle ne nécessite qu'un champ scalaire π_{int} au lieu du champ vectoriel que constituerait un éventuel vecteur flux. Cette modélisation volumique est suffisante ici.

L'application du théorème de Reynolds à $\frac{d\mathcal{K}}{dt}[\mathcal{D}(t)]$ et le rappel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, s'écrivent respectivement

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\underline{U}}{dt} \cdot \underline{U} d^3x \quad \text{et} \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \text{div} \underline{\sigma}. \quad (8.20)$$

En reportant ces relations dans l'équation (8.19) et en simplifiant le terme $\underline{f} \cdot \underline{U}$, on obtient la relation

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} (\text{div} \underline{\sigma}) \cdot \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n} dS \quad (8.21)$$

où l'on a utilisé la relation $(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{U} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n}$ qui découle de la symétrie de $\underline{\sigma}$ à travers l'égalité $\sigma_{ij} n_j U_i = n_i \sigma_{ij} U_j$. En appliquant la formule de la divergence à cette dernière relation, on obtient finalement

$$\pi_{\text{int}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} U_i - \frac{\partial (\sigma_{ij} U_i)}{\partial x_j} = -\sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\underline{\sigma} : {}^t \underline{K} = -\underline{\sigma} : \underline{D}, \quad (8.22)$$

où $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ sont les composantes du gradient du champ de vitesse qui se décompose sous la forme $\underline{K} = \underline{\Omega} + \underline{D}$. On a utilisé la nullité $\underline{\sigma} : \underline{\Omega} = \sigma_{ij} \Omega_{ji} = -\sigma_{ji} \Omega_{ij} = -\underline{\sigma} : \underline{\Omega} = 0$ du produit contracté d'un tenseur symétrique $\underline{\sigma}$ et d'un tenseur antisymétrique $\underline{\Omega}$.

2.2 Premier principe de la thermodynamique

Une hypothèse essentielle de la mécanique des milieux continus consiste à supposer que les particules fluides, à l'échelle h_{mic} de l'hypothèse du continu, sont localement en équilibre thermodynamique. Cette hypothèse d'équilibre thermodynamique local permet de définir le champ d'énergie interne spécifique $e(\underline{x}, t)$ et l'énergie interne d'une domaine $\mathcal{D}(t)$ de particules par la relation

$$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) d^3x. \quad (8.23)$$

Le premier principe de la thermodynamique relie alors l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$ à la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)]$ et à la puissance des forces extérieures à travers la relation

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] \} = \mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \quad (8.24)$$

la puissance thermique étant définie par la relation

$$\mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} r(\underline{x}, t) d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS \quad (8.25)$$

où $r(\underline{x}, t)$ est le taux de chauffage volumique (par exemple dû au rayonnement électromagnétique) et $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ le flux de chaleur sortant du domaine. En soustrayant le “théorème” de l’énergie cinétique (8.18) à la loi de conservation de l’énergie totale (8.24) on obtient l’équation $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{the}} - \mathcal{P}_{\text{intcont}}$ qui s’écrit

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho e d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} r d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x. \quad (8.26)$$

En remplaçant la densité volumique par son expression $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D}$, le bilan local d’énergie interne s’écrit finalement

$$\rho \frac{de}{dt} = r - \text{div } \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}. \quad (8.27)$$

On peut alors rassembler les équations de bilans dans la table 8.1 en les écrivant sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x. \quad (8.28)$$

	$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \phi$	$\underline{Q}_c$	f_c
	Grandeur	Densité	Flux	Production
C	$m[\mathcal{D}(t)]$	ρ	$\underline{0}$	0
C	$p[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \underline{U}$	$-\underline{\sigma}$	$\underline{f}$
B	$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$	ρe	$\underline{Q}$	$r + \underline{\sigma} : \underline{D}$
B	$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$-\underline{\sigma} \cdot \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}$
C	$\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)] = (\mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{K})[\mathcal{D}(t)]$	$\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$\underline{Q} - \underline{\sigma} \cdot \underline{U}$	$r + \underline{f} \cdot \underline{U}$

TABLE 8.1 – Équations de bilan (B) ou lois de conservation (C).

Cette table indique que les équations concernant la masse (m), la quantité de mouvement (p) et l’énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ sont des lois de conservation (C) tandis que celles concernant l’énergie interne $\mathcal{E}_{\text{int}}$ et l’énergie cinétique $\mathcal{K}$ sont de simples équations de bilan (B). Une équation de bilan est une loi de conservation si la grandeur $\mathcal{C}$ considérée est invariante dans le temps lorsque le système est isolé de son extérieur, ce qui signifie que les termes de production $\underline{f} = \underline{0}$ et $r = 0$ sont nuls et que les flux $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ et $\underline{Q} \cdot \underline{n}$ sont nuls sur les frontières. On voit que dans ce cas, seul le terme $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D}$ subsiste et permet un échange entre l’énergie interne et l’énergie cinétique. Par exemple, les effets de compressibilité peuvent être responsables d’un échange entre les énergies cinétique et interne d’un fluide, en l’absence de toute interaction avec l’extérieur. Même en l’absence d’effets compressibilité, les forces de frottements peuvent diminuer l’énergie cinétique au profit de l’énergie interne par échauffement interne.

2.3 Lois de conservation, de comportement et d'état

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que l'équation de bilan de l'énergie cinétique s'écrivent respectivement

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{dU}{dt} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}, \quad \rho \frac{de}{dt} = r - \operatorname{div} \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}. \quad (8.29)$$

La loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens et la loi de Fourier s'écrivent respectivement

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U}) \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}, \quad \underline{Q} = -k \operatorname{grad} T. \quad (8.30)$$

Contrairement au cas incompressible, la pression est ici une variable thermodynamique qu'il convient de relier aux autres variables thermodynamiques que sont la température T et la masse volumique ρ . On complète donc le système d'équations par les deux lois d'état

$$p = \mathcal{P}_T(\rho, T), \quad e = \mathcal{E}_T(\rho, T), \quad (8.31)$$

qui expriment la pression et l'énergie interne en fonction de la masse volumique et de la température.

En reportant l'expression des lois de comportement dans les équations de bilan, on obtient un système fermé pour les quatre champs scalaires (ρ, T, e, p) et le champ vectoriel $\underline{U}$ constitué des quatre équations scalaires et d'une équation vectorielle qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U}, & p &= \mathcal{P}_T(\rho, T), & e &= \mathcal{E}_T(\rho, T), \\ \rho \frac{dU}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \underline{f} + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U}, \\ \rho \frac{de}{dt} &= r + k \Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2\mu_n \underline{D} : \underline{D}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Ces **équations de Navier-Stokes compressibles** sont appelées les **équations d'Euler compressibles** lorsque le fluide est parfait. Dans tous les cas doivent être complétées par une condition initiale pour les cinq champs et par des conditions aux limites aux frontières. Les conditions aux limites en vitesse ou en contraintes sur des parois rigides ou des surfaces libres ont été détaillées ci-dessus. Le couplage avec la thermodynamique à travers l'équation de bilan de l'énergie interne requiert des conditions aux limites thermiques aux frontières.

On peut par exemple spécifier le flux $\underline{Q} \cdot \underline{n} = q_{Neumann}$ sur une partie $\partial\Omega_{Neumann}$ de la frontière et la température $T = T_{Dirichlet}$ sur une autre partie $\partial\Omega_{Dirichlet}$. Ces conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet s'écrivent alors

$$\begin{aligned} -k \operatorname{grad} T(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} &= q_{Neumann}(\underline{x}, t) & \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Neumann} \\ T(\underline{x}, t) &= T_{Dirichlet}(\underline{x}, t) & \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Dirichlet}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Lorsque la conductivité thermique k est négligeable (fluide parfait), ces conditions aux limites disparaissent, ce que l'on explique par l'existence d'une couche limite thermique dont l'épaisseur tend vers zéro.

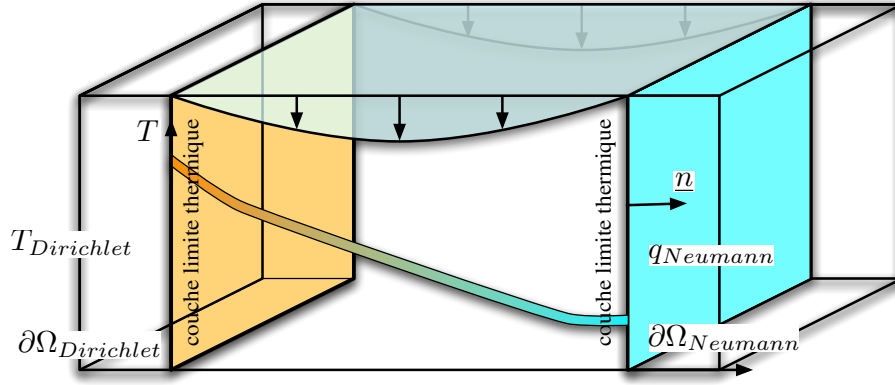


FIGURE 8.4 – Conditions aux limites en température sur $\partial\Omega_{Dirichlet}$ et en flux sur $\partial\Omega_{Neumann}$.

3 Du compressible à l'incompressible

La relation de Gibbs permet de définir l'entropie en fonction des autres variables thermodynamiques. On peut alors utiliser cette grandeur dans l'expression des lois d'état pour décrire les mouvements adiabatiques. On examine alors l'exemple des ondes sonores à partir des petites oscillations autour de l'équilibre, régies par les équations de Navier-Stokes compressibles. La comparaison entre la vitesse du son et la vitesse du fluide permet d'expliquer le passage à la limite de fluide incompressible.

3.1 Relation de Gibbs et entropie

Le champ d'entropie $s(\underline{x}, t)$ est une grandeur thermodynamique définie par l'intermédiaire de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme

$$de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \iff ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho. \quad (8.34)$$

Plutôt que de considérer les lois d'état $p = \mathcal{P}_T(\rho, T)$ et $e = \mathcal{E}_T(\rho, T)$ en choisissant ρ et T comme variables de base, il est utile ici de considérer les lois d'état $p = \mathcal{P}_e(\rho, e)$ et $T = \mathcal{T}_e(\rho, e)$ en choisissant ρ et e comme variables de base. La d'état $s = \mathcal{S}(\rho, e)$ est alors définie par

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\right)_\rho(\rho, e) = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)_e(\rho, e) = -\frac{p}{\rho^2 T}. \quad (8.35)$$

L'entropie étant ainsi définie, on peut considérer finalement les lois d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}_s(\rho, s)$ et $T = \mathcal{T}_s(\rho, s)$ où ρ et s sont les variables de base. L'équation de bilan de l'entropie qui s'écrit sous la forme

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (8.36)$$

En écrivant le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$, où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses, et en utilisant la loi de conservation de

la masse et l'équation de bilan de l'énergie interne du système (8.29), on en déduit

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{r}{T} - \frac{\operatorname{div} \underline{Q}}{T} + \frac{\underline{\tau} : \underline{D}}{T} . \quad (8.37)$$

Le second principe de la thermodynamique stipule que la production d'entropie d'une particule transportée par le mouvement est supérieure à celle qui serait produite par une transformation réversible recevant la même puissance thermique. On en déduit (non développé ici) des contraintes sur les lois de comportement comme par exemple $k \geq 0$ pour la loi de Fourier ou $\mu_n \geq 0$ et $3\lambda_n + 2\mu_n \geq 0$ pour la loi des fluides newtoniens.

Dans le cas d'un écoulement adiabatique ($r = 0$, $\underline{Q} = \underline{0}$) et inviscide ($\underline{\tau} = \underline{0}$), les équations de d'Euler (fluide parfait) peuvent se réduire au système

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} , & p &= \mathcal{P}_s(\rho, s) , \\ \rho \frac{dU}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \underline{f} , & \rho \frac{ds}{dt} &= 0 . \end{aligned} \quad (8.38)$$

où seule la loi d'état $\mathcal{P}_s$ de la pression, exprimée en fonction de ρ et s est nécessaire pour fermer les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de l'entropie qui est équivalente à l'équation de bilan de l'énergie interne.

3.2 Ondes sonores

En l'absence de forces extérieures $\underline{f} = \underline{0}$, on considère l'état d'équilibre $\underline{U} = \underline{0}$ de masse volumique ρ_0 , d'entropie s_0 et de pression $p_0 = \mathcal{P}_s(\rho_0, s_0)$.

On s'intéresse aux petites oscillations autour de ces équilibres, que l'on appelle "ondes sonores". On pose alors

$$p = p_0 + \tilde{p} \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad s = s_0 + \tilde{s} \quad (8.39)$$

et on suppose que $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{s}$ et $\underline{U}$ sont petits. On suppose que ces petites oscillations sont adiabatiques ($r = 0$, $\underline{Q} = \underline{0}$) et inviscides ($\underline{\tau} = \underline{0}$). En reportant cette décomposition dans les équations de d'Euler (8.38) et en négligeant les termes d'ordre deux $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho$, $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U}$, $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} s$, on obtient le système

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{U} , \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \tilde{p} , \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0 , \quad \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho} \quad (8.40)$$

où l'on a linéarisé l'équation d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ autour du couple de valeur (ρ_0, s_0) en définissant c_0 par la relation

$$c_0^2(\rho_0, s_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial \rho} \right)_s . \quad (8.41)$$

En éliminant $\tilde{s}$, $\tilde{p}$ et $\underline{U}$ du système d'équations, on obtient une équation d'évolution pour $\tilde{\rho}$ qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{\rho} = 0 . \quad (8.42)$$

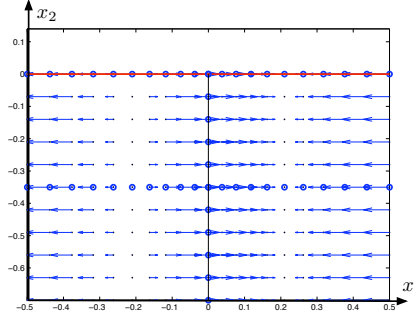


FIGURE 8.5 – Ondes sonores, donc longitudinales.

Cette équation admet des solutions de la forme

$$\tilde{\rho}(\underline{x}, t) = 2 \rho_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = c_0 \|\underline{k}\| \quad (8.43)$$

où ρ_m est une amplitude quelconque mais petite et $\underline{k}$ un vecteur d'onde quelconque. Les champs de pressions et de vitesse associés sont alors

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= 2 c_0^2 \rho_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - c_0 \|\underline{k}\| t + \varphi) , \\ \underline{U} &= 2 c_0 \frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\underline{k}}{\|\underline{k}\|} \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - c_0 \|\underline{k}\| t + \varphi) \underline{k} . \end{aligned} \quad (8.44)$$

On voit que ces ondes planes sont longitudinales (figure 8.5) et on démontre facilement que les trajectoires parcourent des segments de droites dans la direction du vecteur d'onde $\underline{k}$.

3.3 Filtrage des ondes sonores

On cherche maintenant à justifier le recours à l'approximation de fluide incompressible pour certains écoulements. Si c_0 et U_0 sont respectivement les vitesses caractéristiques du son et de l'écoulement, on définit le nombre de Mach par la relation

$$M = \frac{U_0}{c_0} . \quad (8.45)$$

Si le nombre de Mach $M \ll 1$ est très petit devant un, on peut considérer que la vitesse du son devient infinie. La pente de la loi d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$ à s fixée devient infinie (figure 8.6). On voit qu'il n'est alors plus possible de déterminer p à partir de ρ qui ne peut pas s'écarter d'une valeur constante ρ_0 . La pression, qui n'est alors plus une grandeur thermodynamique, devient un champ dépendant uniquement du champ de vitesse qui satisfait alors la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \underline{U} = 0$.

En pratique, un écoulement incompressible est tel que des ondes sonores infiniment rapides et donc d'amplitude toujours très faibles, se propagent constamment pour maintenir la masse volumique ρ à la valeur constante ρ_0 . Les équations d'Euler incompressibles ne décrivent pas explicitement ces ondes sonores, contrairement aux équations d'Euler compressibles. On dit que l'approximation incompressible a permis de "filtrer" les ondes sonores. Cette approximation permet en effet de se concentrer sur les échelles de temps lents de l'écoulement de vitesse caractéristique U_0 en laisse de côté les ondes sonores de vitesses c_0 très grandes.

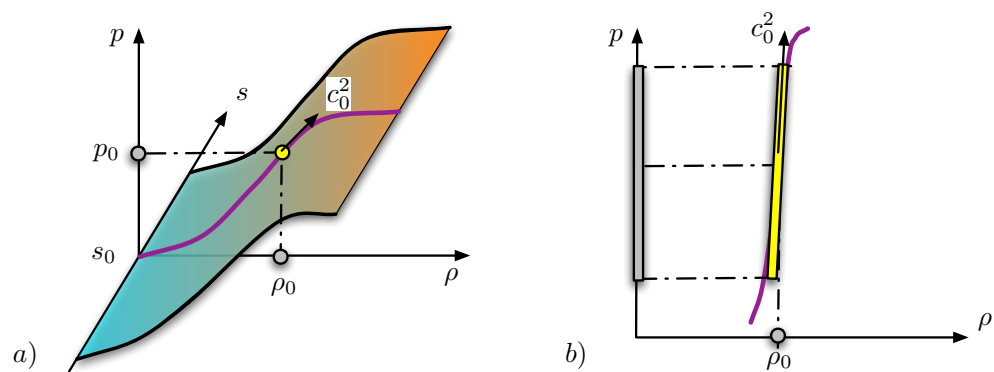


FIGURE 8.6 – a) Vitesse du son c_0 et loi d'état $p = \mathcal{P}_s(\rho, s)$. b) Limite c_0 infinie et absence de loi d'état pour la pression.