

Chapitre 7

Équations de bilan

O. Thual, 9 septembre 2018

Sommaire

1	Théorèmes de transport	2
1.1	Domaine transporté par le mouvement	2
1.2	Conservation de la masse	3
1.3	Théorèmes de transport complémentaires	4
2	Formulation des équations de bilan	5
2.1	Formulation intégrale	6
2.2	Formulations en bilan locaux	6
2.3	Relations de saut	7
3	Principe fondamental de la dynamique	8
3.1	Modélisation des efforts	9
3.2	Tenseur des contraintes	10
3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	11

Introduction

On appelle théorèmes de transport les relations qui permettent de dériver par rapport au temps des intégrales sur des domaines transportés par le mouvement. Ces théorèmes permettent de formuler la loi de conservation de la masse pour la représentation eulérienne de la masse volumique. Elles permettent également de dériver les équations de bilan locaux à partir des lois de bilan exprimés en formulation intégrales. Dans le cas d'une surface de discontinuité mobile, le bilan global permet de dériver des relations de saut. On peut ensuite formuler le principe fondamental de la dynamique en considérant la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un ensemble de particules transportées par le mouvement. On montre comment l'existence d'une équation de bilan entraîne celle d'un vecteur flux et celle du tenseur des contraintes dans le cas de la loi de conservation de la quantité de mouvement.

1 Théorèmes de transport

La dérivation d'une intégrale triple sur un domaine transporté par le mouvement conduit à rajouter au terme de dérivée partielle du champ intégré un terme de flux cinématique intégrée sur la frontière. Ce résultat, complété par d'autres théorèmes de transport, permet de formuler la loi de conservation de la masse et de préparer la formulation d'autres équations de bilan.

1.1 Domaine transporté par le mouvement

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ constitué de particules transportées par le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$. Ces particules décrivent des trajectoires de la forme $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ avec $\underline{x}(0) = \underline{a}$, issues d'un ensemble de positions initiales formant le domaine $\mathcal{D}_0$. On peut donc écrire $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$. On dit que le domaine $\mathcal{D}(t)$ est transporté par le mouvement.

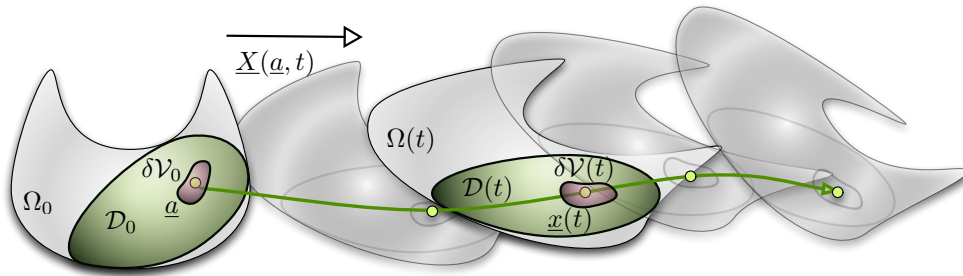


FIGURE 7.1 – Domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$.

On considère un champ $c(\underline{x}, t)$, en représentation eulérienne, intégrable sur le domaine $\mathcal{D}(t)$. Sa représentation lagrangienne $c^{(L)}(\underline{a}, t)$ vérifie donc $c[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = c^{(L)}(\underline{a}, t)$. On peut alors considérer le changement de variable

$\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ à l'instant t dans l'intégrale

$$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (7.1)$$

où $J(\underline{a}, t)$ est le Jacobien de l'application $\underline{X}$ de Ω_0 dans $\mathbb{R}^3$ au temps t . Si $c(\underline{x}, t)$ et donc $c^{(L)}(\underline{a}, t)$ sont dérivables par rapport à l'espace et au temps, on peut dériver cette intégrale par rapport au temps en écrivant

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t} J + c^{(L)} \frac{\partial J}{\partial t} \right] (\underline{a}, t) d^3a. \quad (7.2)$$

La dérivée par rapport au temps du Jacobien $J(\underline{a}, t)$ se calcule en considérant la variation d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement autour de la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ qui obéit aux relations

$$\delta\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \delta\mathcal{V}_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \delta\mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \quad (7.3)$$

où $\delta\mathcal{V}_0 = \delta\mathcal{V}(0)$ est la position du petit volume dans la configuration de référence Ω_0 . En éliminant $\delta\mathcal{V}(t)$ entre ces deux relations, on obtient

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t). \quad (7.4)$$

En reportant cette expression dans l'intégrale de l'équation (7.2), on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) + c^{(L)}(\underline{a}, t) \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \right] J(\underline{a}, t) d^3a. \quad (7.5)$$

En rappelant que $\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ est la représentation lagrangienne $\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)}$ de la dérivée particulaire, on peut faire le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ inverse pour obtenir finalement

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{dc}{dt}(\underline{x}, t) + c(\underline{x}, t) \text{div } \underline{U}(\underline{x}, t) \right] d^3x. \quad (7.6)$$

Les relations $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } c$ et $\text{div}(c \underline{U}) = \underline{U} \cdot \text{grad } c + c \text{div } \underline{U}$, permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \underline{U}) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

1.2 Conservation de la masse

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement et on définit sa masse par l'intégrale

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x \quad (7.8)$$

où $\rho(\underline{x}, t)$ est le champ de masse volumique. La loi de conservation de la masse stipule que cette quantité est invariante en temps pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$, ce que l'on traduit par la relation

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} \right) (\underline{x}, t) d^3x = 0. \quad (7.9)$$

En appliquant cette relation sur des domaines de plus en plus petits, on en déduit le bilan local

$$\frac{d\rho}{dt}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0 \quad (7.10)$$

valable pour tout point $\underline{x}$ et tout temps t . En développant l'expression de la dérivée particulaire, on peut écrire cette loi de conservation de la masse sous les formes suivantes

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0, \quad (7.11)$$

où l'on a utilisé la relation $\operatorname{div}(\rho \underline{U}) = \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U}$.

On voit que si le mouvement est isochore, c'est-à-dire si $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, la loi de conservation de la masse entraîne que ρ est constant le long d'une trajectoire quelconque dans la mesure où $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Réciproquement, si le milieu est incompressible, c'est-à-dire si ρ reste constant le long des trajectoires, alors l'écoulement est isochore.

1.3 Théorèmes de transport complémentaires

On généralise facilement le théorème de dérivation des intégrales sur des domaines transportés par le mouvement au cas des champs de vecteurs $\underline{V}(\underline{x}, t)$ à l'aide de la relation

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\underline{V}}{dt} + \underline{V} \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x \quad (7.12)$$

en explicitant ses composantes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} V_i d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dV_i}{dt} + V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i U_j) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (7.13)$$

En considérant le tenseur d'ordre deux $\underline{V} \otimes \underline{U}$ de composantes $V_i U_j$, produit tensoriel de $\underline{V}$ et $\underline{U}$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}(\underline{V} \otimes \underline{U}) \right] d^3x. \quad (7.14)$$

En utilisant les formules de la divergence

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q} d^3x \quad \text{et} \quad \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\operatorname{div}} \underline{\sigma} d^3x \quad (7.15)$$

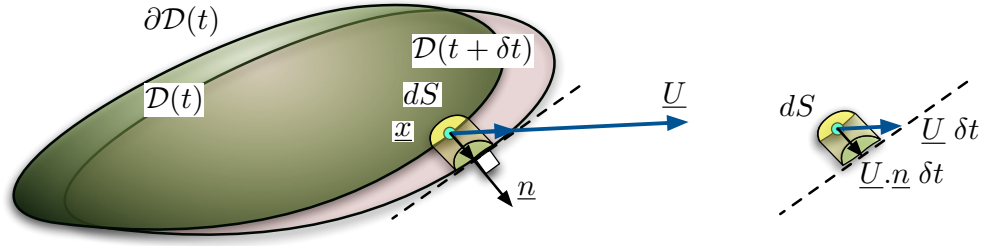


FIGURE 7.2 – Interprétation géométrique du terme $\underline{U} \cdot \underline{n}$ dans l'intégrale de surface du flux cinématique.

valables pour un champ de vecteur $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ ou un champ de tenseur $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$, on peut écrire les théorèmes de transport sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c \, d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} c \, \underline{U} \cdot \underline{n} \, dS, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{V} \, d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{V} (\underline{U} \cdot \underline{n}) \, dS. \end{aligned} \quad (7.16)$$

On peut interpréter les termes $c \, \underline{U}$ et $\underline{V} \otimes \underline{U}$, dont les produits avec la normale $\underline{n}$ sont respectivement $c (\underline{U} \cdot \underline{n})$ et $\underline{V} (\underline{U} \cdot \underline{n})$, comme des flux cinématiques à l'aide de la figure 7.2. Pendant le temps δt , les longueurs $\underline{U} \cdot \underline{n} \, \delta t$ permettent de définir les éléments de volume $dS \, \underline{U} \cdot \underline{n} \, \delta t$ qui expliquent la différence due au mouvement entre les intégrales sur $\mathcal{D}(t + \delta t)$ et $\mathcal{D}(t)$ pendant le temps δt , en plus de la différence due à la variation $\frac{\partial c}{\partial t}$ ou $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}$ du champ considéré.

Cette série de théorèmes de transport se termine ici par le théorème de Reynolds qui suppose que la loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$ est vérifiée. Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \, \phi \, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \, \frac{d\phi}{dt} \, d^3x, \quad (7.17)$$

où $\phi(\underline{x}, t)$ est un champ scalaire dérivable quelconque. Pour démontrer ce résultat, il suffit de développer l'expression $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \text{div}(\rho \phi \underline{U}) = 0$ et d'appliquer la loi de conservation de la masse. On peut aussi se ramener à un domaine fixe par changement de variable et utiliser l'invariance dans le temps du produit $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t)$ qui constitue la formulation lagrangienne de la conservation de la masse.

2 Formulation des équations de bilan

Une équation de bilan consiste à exprimer la variation temporelle d'une grandeur intégrée sur une domaine transporté par le mouvement en fonction de l'intégrale d'un flux sur sa frontière et de l'intégrale d'un terme de production dans son intérieur. Ce bilan global permet de dériver des bilans locaux lorsque le champ intégré est dérivable et des relations de saut en présence de surfaces de discontinuité mobiles.

2.1 Formulation intégrale

Un équation de bilan est la donnée d'un champ $c(\underline{x}, t)$, d'un champ de surface $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ et d'un champ volumique $f_c(\underline{x}, t)$ tels que pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (7.18)$$

où $\underline{n}$ est la normale sortante de la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ du domaine $\mathcal{D}(t)$.

Si $c(\underline{x}, t)$ est une fonction dérivable, on peut appliquer la formule de dérivation d'une intégrale sur un domaine transporté par le mouvement et écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[f_c - \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(c \underline{U}) \right] d^3x. \quad (7.19)$$

En appliquant cette relation à l'instant t pour une famille de domaine tétraèdres $\mathcal{T}_h$ de taille caractéristique h tendant vers zéro, on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = O(h^3) \quad (7.20)$$

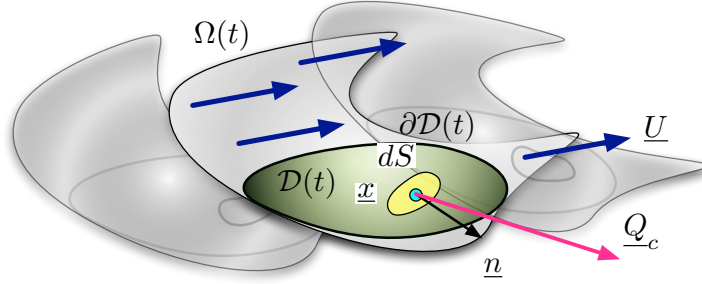


FIGURE 7.3 – Flux $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ d'une équation de bilan.

On montre alors, en faisant tendre la famille de tétraèdres vers un point fixe $\underline{x}$, que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ dépend linéairement de $\underline{n}$ et qu'il existe donc un vecteur flux (sortant) $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ tel que l'on puisse écrire

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}. \quad (7.21)$$

En appliquant le théorème de la divergence, la formulation intégrale de l'équation de bilan s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x. \quad (7.22)$$

2.2 Formulations en bilan locaux

En supposant que $c(\underline{x}, t)$ est une fonction dérivable, on déduit de la formulation intégrale du bilan global deux formulations en bilan locaux. La première,

appelée “bilan local en formulation conservative” consiste à écrire, pour tout point x et tout temps t , la relation

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c . \quad (7.23)$$

Pour déduire ce bilan local du bilan global, il suffit pour d’appliquer la formule de la divergence pour transformer l’intégrale surfacique en intégrale volumique puis de faire tendre le domaine $\mathcal{D}$ vers $\underline{x}$ au temps t .

La deuxième formulation suppose que la loi de conservation de la masse est vérifiée. On définit alors le champ $\phi(\underline{x}, t)$ par la relation $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t)$ ce qui est toujours possible dans le mesure où la masse volumique $\rho(\underline{x}, t)$ ne s’annule pas. En remplaçant c par $\rho \phi$ dans l’équation de bilan (7.23) et en utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{U}) = 0$, on peut écrire

$$\rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c . \quad (7.24)$$

Nous appellerons “formulation avec masse conservée” cette écriture de l’équation de bilan.

En résumé, l’expression d’une équation de bilan pour la grandeur $c = \rho \phi$, dans le cas où c est dérivable et où la masse est conservée, peut se faire par l’une des trois formulations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{intégrale :} \quad & \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x \\ \text{conservative :} \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \operatorname{div} (\rho \phi \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c \\ \text{avec masse conservée :} \quad & \rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c . \end{aligned} \quad (7.25)$$

Il est à noter que dans le cas où $c(\underline{x}, t)$ admet des discontinuités en espace (choc), la formulation intégrale du bilan est plus riche que les bilans locaux dans la mesure où elle contient également les relations de saut.

2.3 Relations de saut

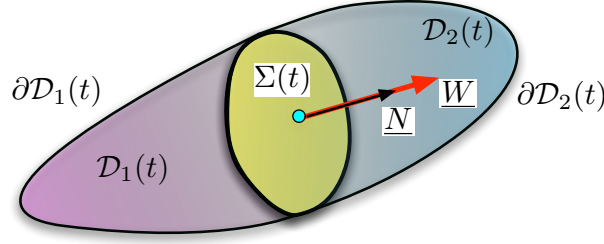
On considère maintenant le cas où $c(\underline{x}, t)$ est dérivable sur le domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement, sauf sur une surface mobile $\Sigma(t)$ qui partage le domaine en deux sous-domaines $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$ tels que $\mathcal{D}_1(t) \cup \mathcal{D}_2(t) = \mathcal{D}(t)$ (voir figure 7.4). On note $\underline{W}(\underline{x}, t) = W(\underline{x}, t) \underline{N}(\underline{x}, t)$ la vitesse de la surface mobile $\Sigma(t)$ où $\underline{N}(\underline{x}, t)$ est la normale pointant du domaine $\mathcal{D}_1$ vers le domaine $\mathcal{D}_2$. On note alors le saut de $\underline{c}$ et le saut de $\underline{Q}_c$ de la manière suivante :

$$[[c]] = c^{(2)} - c^{(1)} \quad \text{et} \quad [[\underline{Q}_c]] = \underline{Q}_c^{(2)} - \underline{Q}_c^{(1)} \quad (7.26)$$

où les exposants ⁽¹⁾ et ⁽²⁾ désignent respectivement les valeurs dans les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ au voisinage de Σ .

Si $c(\underline{x}, t)$ est régi par l’équation de bilan

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x , \quad (7.27)$$

FIGURE 7.4 – Surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ de vitesse $\underline{W} = W \underline{N}$.

il est intéressant de développer le premier terme sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{(\partial\mathcal{D}_1-\Sigma)(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} c^{(1)} \underline{W} \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{(\partial\mathcal{D}_2-\Sigma)(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} c^{(2)} \underline{W} \cdot \underline{N} dS \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}_1(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} c^{(1)} (\underline{W} - \underline{U}^{(1)}) \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}_2(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} c^{(2)} (\underline{W} - \underline{U}^{(2)}) \cdot \underline{N} dS, \end{aligned}$$

le second sous la forme

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS &= \iint_{\partial\mathcal{D}_1(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS - \iint_{\Sigma(t)} \underline{Q}_c^{(1)} \cdot \underline{N} dS \\ &\quad + \iint_{\partial\mathcal{D}_2(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} \underline{Q}_c^{(2)} \cdot \underline{N} dS, \end{aligned}$$

ainsi que le troisième sous la forme

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} f_c d^3x + \iiint_{\mathcal{D}_2(t)} f_c d^3x.$$

En écrivant que l'équation de bilan est vérifiée sur les domaines $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$ on obtient la relation

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma(t)} \left[c^{(2)} (\underline{U}^{(2)} - \underline{W}) - c^{(1)} (\underline{U}^{(1)} - \underline{W}) \right] \cdot \underline{N} dS \\ + \iint_{\Sigma(t)} \left[\underline{Q}_c^{(2)} - \underline{Q}_c^{(1)} \right] \cdot \underline{N} dS = 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

En considérant des domaines de plus en plus petits, on aboutit finalement à l'équations de saut

$$\llbracket c (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} \rrbracket + \llbracket \underline{Q}_c \cdot \underline{N} \rrbracket = 0, \quad (7.29)$$

pour tout point $\underline{x}$ de la surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ et pour tout temps.

3 Principe fondamental de la dynamique

La loi de conservation de la quantité de mouvement, qui constitue la première loi du principe fondamental de la dynamique, entraîne que les forces surfaciques de contact dépendent linéairement de la normale à la frontière ce

qui conduit à la définition du tenseur des contraintes. La loi de conservation du moment cinétique, qui complète le principe, entraîne que ce tenseur est symétrique.

3.1 Modélisation des efforts

Les forces extérieures de volumes, qui représentent les interactions à longue portée avec l'extérieur de la configuration déformée $\Omega(t)$, sont définies par leur résultante, leur moments en O et leur puissance dans un mouvement $\underline{U}$ à travers les relations respectives

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x , \\ \mathcal{M}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x , \\ \mathcal{P}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) d^3x ,\end{aligned}\quad (7.30)$$

où $\underline{f}(\underline{x}, t)$ est la densité volumique des forces de volumes.

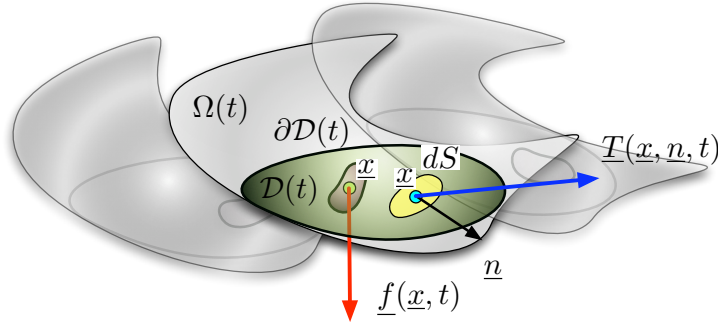


FIGURE 7.5 – Forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ et forces de contacts $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ extérieures à $\mathcal{D}(t)$.

Les forces de contact extérieures à $\mathcal{D}(t)$, qui représentent les interactions à courte portée exercées sur la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ par son voisinage extérieur situées à une distance microscopique inférieure à celle du continu, sont également définies par trois grandeurs à travers les relations

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS , \\ \mathcal{M}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS , \\ \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) dS ,\end{aligned}\quad (7.31)$$

où $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est la densité surfacique des forces de contact.

On suppose que les forces intérieurs de volumes, qui représentent les interactions à longue portée entre les particules situées à l'intérieur de $\Omega(t)$, sont

identiquement nulles, ce que l'on traduit par les relations

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \mathcal{P}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = 0. \quad (7.32)$$

Enfin, les forces de contact intérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$, qui représentent les interactions à courte portée entre les particules de ce domaine, vérifient, à cause du principe de l'action et de la réaction, les relations

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}, \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}. \quad (7.33)$$

Cependant, leur puissance $\mathcal{P}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)]$ pour le champ de vitesse $\underline{U}$ n'est en général pas nulle. Son expression est donnée par le "théorème de l'énergie cinétique", comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur.

3.2 Tenseur des contraintes

Pour exprimer le principe fondamental de la dynamique on définit la quantité de mouvement et le moment cinétique en O d'un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement qui s'écrivent respectivement

$$\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{x} \wedge \underline{U} d^3x. \quad (7.34)$$

Le principe fondamental de la dynamique stipule que la dérivée de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O d'un domaine de particules transporté par le mouvement sont respectivement égales à la résultante de toutes les forces et au moment en O de toutes les forces. Ces deux lois de conservation s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{p}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \\ \frac{d}{dt} \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Seules les forces extérieures apparaissent dans ces équations dans la mesure où la résultante et le moment en O des autres forces sont nuls. La loi de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O s'écrivent donc respectivement, en formulation intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{T} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} d^3x, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{T} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Si ρ et $\underline{U}$ sont dérivables, la loi de conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme

$$\iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t) d^3x - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) d^3x, \quad (7.37)$$

ce qui permet de démontrer, à l'aide de la construction des petits tétraèdres emboîtés, que la densité surfacique de forces $\underline{T}$ dépend linéairement de la

normale $\underline{n}$. Cette propriété permet de définir le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ à travers la relation

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \quad (7.38)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} d^3x , \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x . \end{aligned} \quad (7.39)$$

À partir de la loi de conservation de la quantité de mouvement, on peut interpréter le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ comme le flux entrant de la quantité de mouvement.

3.3 Symétrie du tenseur des contraintes

La formulation avec masse conservée de la loi de conservation de la quantité de mouvement se traduit par le bilan local

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma} . \quad (7.40)$$

D'autre part, en l'absence de discontinuité, la loi de conservation du moment cinétique en O s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \rho \frac{d\underline{U}}{dt} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x . \quad (7.41)$$

En reportant le bilan local de quantité de mouvement (7.40) dans ce bilan global (7.41), on obtient la relation

$$\underline{C} = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d^3x = \underline{0} . \quad (7.42)$$

En appliquant le théorème de la divergences, composantes de $\underline{C}$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} C_i &= \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial (x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} - x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right] d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} d^3x = 0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

On en déduit que $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ est un tenseur symétrique vérifiant donc ${}^t \underline{\sigma} = \underline{\sigma}$. Pour tout point x et tout point t , on peut trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice des composantes de $\underline{\sigma}$ est diagonale.

On voit que la loi conservation du moment cinétique n'apporte pas d'autre information que d'imposer à $\underline{\sigma}$ d'être symétrique par rapport à la loi de conservation de la quantité de mouvement que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{f}_{\text{cont}} \quad \text{avec} \quad \underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma} . \quad (7.44)$$

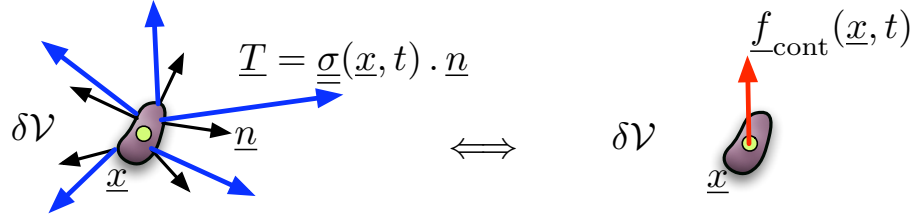


FIGURE 7.6 – Densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}$ “équivalente” aux forces de contact $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$.

On peut interpréter $\underline{f}_{\text{cont}}$ comment étant la densité volumique équivalente aux forces de contact $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ appliquée à un petit volume.

Pour conclure, les relations de saut issues de la formulation intégrale de la loi de conservation de la quantité de mouvement s’écrivent

$$[[\rho \underline{U} (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N}]] - [[\underline{\sigma} \cdot \underline{N}]] = \underline{0}, \quad (7.45)$$

pour tout point $\underline{x}$ d’une surface de discontinuité mobile $\Sigma(t)$ et pour tout temps.