

Chapitre 4

Tenseur des contraintes

O. Thual, 9 septembre 2018

Sommaire

1	Loi de conservation de la masse	2
1.1	Intégrales triples	2
1.2	Formulation lagrangienne du mouvement	3
1.3	Mouvements de petites perturbations	4
2	Modélisation des efforts	5
2.1	Forces extérieures de volumes	5
2.2	Forces de contact extérieures	6
2.3	Autres forces	6
3	Principe fondamental de la dynamique	7
3.1	Quantité de mouvement et moment cinétique	7
3.2	Symétrie du tenseur des contraintes	8
3.3	Tricercle de Mohr	10

Introduction

Les changements de variables dans les intégrales triples sont interprétés à l'aide de la notion de déformation. On peut alors formuler la loi de conservation de la masse dans le cadre de la représentation lagrangienne d'un mouvement. On se place ensuite dans le cadre des petites perturbations pour aborder une première modélisation des forces de volume et de contact ainsi qu'une première approche du principe fondamental de la dynamique. La loi de conservation de la quantité de mouvement permet alors de modéliser les forces de contact à l'aide d'un tenseur d'ordre deux appelé "tenseur des contraintes". Contrairement à la mécanique du point ou à la mécanique des solides indéformables, la conservation du moment cinétique n'est pas une conséquence de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Elle joue donc un rôle important dans l'énonciation du principe fondamental de la dynamique en apportant une information importante : la symétrie du tenseur des contraintes. Ce tenseur permet d'interpréter géométriquement les forces de contact, par exemple à l'aide de la construction du tricerle de Mohr.

1 Loi de conservation de la masse

Le passage de la représentation lagrangienne à la représentation eulérienne d'une déformation permet d'interpréter la formule de changement de variable d'une intégrale triple. On introduit ensuite la notion de mouvement à l'aide des représentations lagrangiennes des déformations successives. Dans le cas des petites perturbations, la définition de grandeur attachée à des domaines de particules sont approximées par des intégrales sur des domaines fixes.

1.1 Intégrales triples

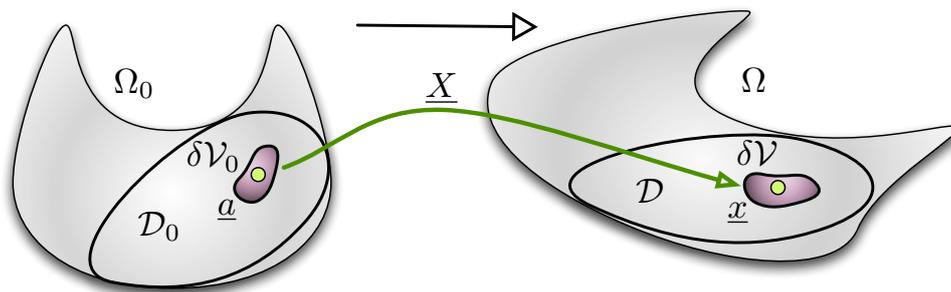


FIGURE 4.1 – Domaine \mathcal{D} image de \mathcal{D}_0 par la déformation \underline{X} .

On considère une déformation \underline{X} de la configuration de référence Ω_0 vers la configuration déformée Ω qui associe à un domaine \mathcal{D}_0 le domaine \mathcal{D} . Les représentations eulérienne $c^{(E)}$ et lagrangienne $c^{(L)}$ d'un champ c vérifient la relation $c^{(E)}[\underline{X}(a)] = c^{(L)}(a)$. D'autre part, l'image d'un petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ du

voisinage de \underline{a} est un petit volume $\delta\mathcal{V}$ du voisinage de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ qui vérifie $\delta\mathcal{V} = J(\underline{a}) \delta\mathcal{V}_0$ où $J(\underline{a})$ est le Jacobien de la déformation \underline{X} .

On peut ainsi énoncer la formule du changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ dans l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathcal{D}} c^{(E)}(\underline{x}) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3a . \quad (4.1)$$

1.2 Formulation lagrangienne du mouvement

On considère maintenant un mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ qui associe, à tout point \underline{a} de la configuration de référence Ω_0 et à tout temps t le point $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ de la configuration déformée $\Omega(t)$ image de Ω_0 au temps t . On suppose que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$ et on note $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ la trajectoire issue du point \underline{a} .

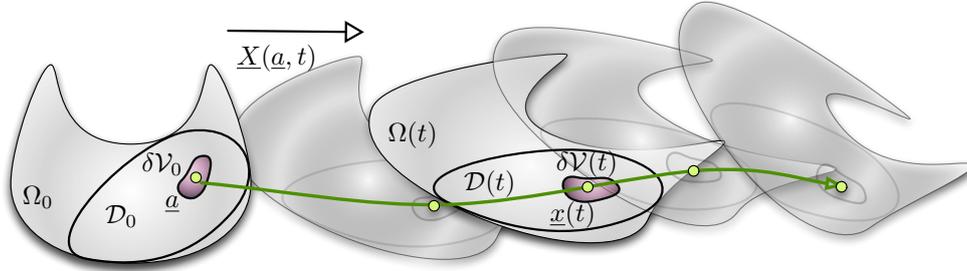


FIGURE 4.2 – Mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ et trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$.

Les représentations eulérienne et lagrangienne d'un champ B variable dans le temps vérifient

$$B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) . \quad (4.2)$$

La jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t)$, le Jacobien $J(\underline{a}, t)$ ou encore le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a}, t)$ dépendent maintenant du temps. Un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement et issu du petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ du voisinage de \underline{a} à l'instant $t = 0$ vérifie

$$\delta\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \delta\mathcal{V}_0 . \quad (4.3)$$

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement et issue du domaine $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(0)$ à $t = 0$. On note $m[\mathcal{D}(t)]$ la masse de ce domaine et $\rho^{(E)}(\underline{x}, t)$ la masse volumique en tout point de la configuration déformée $\Omega(t)$ au temps t . En effectuant le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$, cette masse s'exprime en fonction des intégrales triples

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho^{(E)}(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a . \quad (4.4)$$

La loi de conservation de la masse énonce que la masse $m[\mathcal{D}(t)]$ de tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement est indépendante du temps. En appliquant

la relation (4.4) à des domaines de plus en plus petits, on montre que cette loi est équivalente à

$$\forall \underline{a} \in \Omega_0, \quad \forall t : \quad \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) . \quad (4.5)$$

Si $\rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$, c'est-à-dire si la répartition de masse de la configuration de référence Ω_0 est homogène, la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\forall \underline{a} \in \Omega_0, \quad \forall t : \quad \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 . \quad (4.6)$$

Une autre démonstration de cette relation est obtenue en notant $\delta m_0 = \rho_0 \delta \mathcal{V}_0$ la masse du volume $\delta \mathcal{V}_0$ dans la configuration de référence et $\delta m = \rho \delta \mathcal{V}$ la masse de son image $\delta \mathcal{V}$ dans la configuration déformée. La relation $\delta \mathcal{V} = J \delta \mathcal{V}_0$ permet d'écrire

$$\delta m = \delta m_0 \iff \rho J \delta \mathcal{V}_0 = \rho_0 \delta \mathcal{V}_0 \iff \rho J = \rho_0 . \quad (4.7)$$

1.3 Mouvements de petites perturbations

On suppose maintenant que le mouvement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ vérifie l'hypothèse des petites perturbations, c'est-à-dire l'hypothèse des petites déformations ainsi que l'hypothèse des champs peu déformés. On suppose donc que le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$ est de l'ordre η avec $\eta \ll 1$ et que l'on peut confondre à l'ordre dominant en η les représentations eulériennes $B^{(E)}(\underline{x}, t)$ et lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de tout champ B d'intérêt pour la description mécanique du milieu continu considéré.

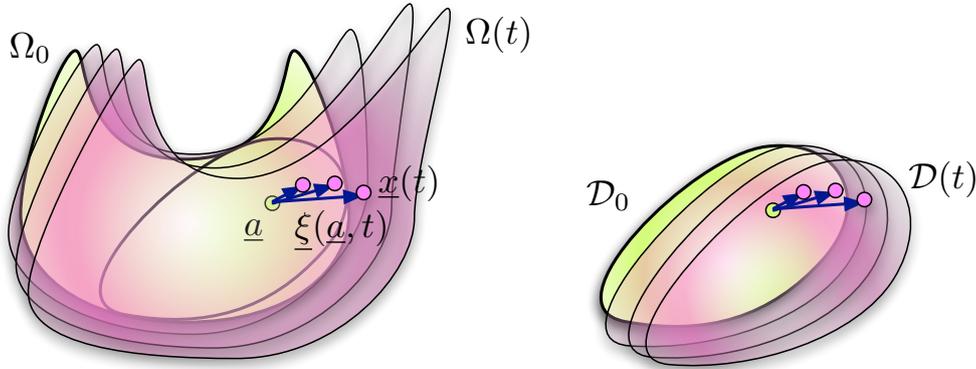


FIGURE 4.3 – Mouvement de petites déformations $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$.

L'hypothèse des petites déformations permet de développer le Jacobien du mouvement sous la forme

$$J(\underline{a}, t) = 1 + \text{tr} \underline{\epsilon}(\underline{a}, t) + O(\eta^2) . \quad (4.8)$$

On suppose que la masse volumique de la configuration de référence Ω_0 est homogène et vaut ρ_0 . La loi de conservation de la masse s'écrit alors

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 - \rho_0 \text{tr} \underline{\epsilon}(\underline{a}, t) + O(\eta^2) = \rho_0 [1 + O(\eta)] . \quad (4.9)$$

Le développement $J(\underline{a}, t) = 1 + O(\eta)$ permet d'approximer toute intégrale triple sous la forme

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} c^{(E)}(\underline{x}) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3a = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}) d^3a [1 + O(\eta)]. \quad (4.10)$$

On voit donc que l'on peut non seulement confondre les représentations eulérienne et lagrangienne des champs, mais aussi les domaines $\mathcal{D}(t)$ avec leur position \mathcal{D}_0 à l'instant $t = 0$.

Grâce à ces considérations, on peut définir, à l'ordre dominant en η , la quantité de mouvement $\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \underline{p}(\mathcal{D}_0) + O(\eta)$ du domaine $\mathcal{D}(t)$ par la relation

$$\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)]. \quad (4.11)$$

On définit de même le moment cinétique $\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)]$ en O , origine du repère, par la relation

$$\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)]. \quad (4.12)$$

2 Modélisation des efforts

On passe ici en revue la modélisation des efforts exercées sur un milieu continu en se plaçant dans le cadre des petites perturbations. Les forces à longue portée, supérieure à l'échelle microscopique du continu, sont modélisées par des densités volumiques. Les forces à courte portée sont modélisées par des densités surfaciques. On confond ici représentations eulérienne et lagrangienne ainsi que configuration déformée et configuration de référence.

2.1 Forces extérieures de volumes

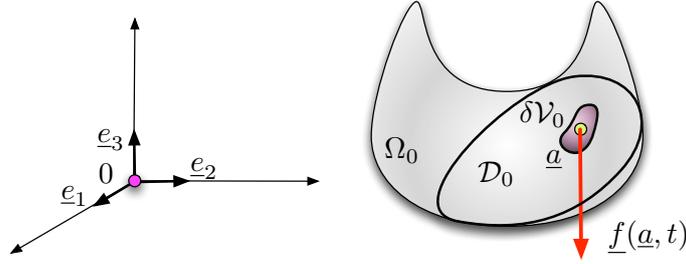
On modélise par $\underline{f}(\underline{a}, t)$ la densité volumique des forces à longue distance exercées par des objets extérieurs à la configuration déformée Ω que l'on approxime par Ω_0 dans le cadre des petites perturbations. Dans ce cadre, on ne distingue pas les représentations eulérienne $\underline{f}^{(E)}$ et lagrangienne $\underline{f}^{(L)}$ de \underline{f} . La résultante des forces extérieures de volume exercées sur un domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)]. \quad (4.13)$$

Le moment des forces extérieures de volume en O , origine du repère, est défini par la relation

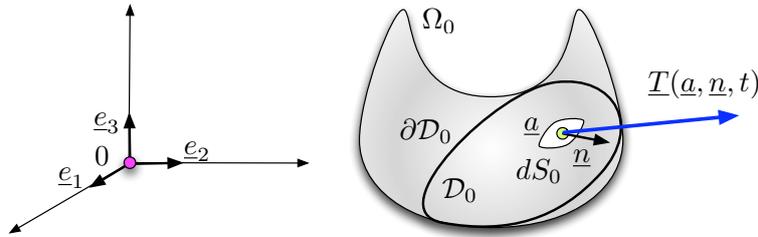
$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f}(\underline{a}, t) d^3a [1 + O(\eta)]. \quad (4.14)$$

Très souvent, la densité volumique des forces à longue distance se résume aux forces de gravité qui s'écrivent $\underline{f} = -\rho_0 g \underline{e}_z$ où g est l'intensité de la gravité et \underline{e}_z le vecteur unitaire vertical.

FIGURE 4.4 – Forces extérieures de volume $f(\underline{a}, t)$.

2.2 Forces de contact extérieures

On modélise par $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ la densité surfacique des forces à courte portée exercées par son extérieur sur le sous-domaine $\mathcal{D}(t)$, que l'on approxime par \mathcal{D}_0 . Ces “forces de contact” modélisent les interactions entre particules à des échelles inférieures à l'échelle microscopique de l'approximation de milieu continu. On a supposé que cette densité de forces ne dépendait que de la normale \underline{n} à \mathcal{D}_0 au point \underline{a} .

FIGURE 4.5 – Forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ extérieures au domaine \mathcal{D}_0 .

La résultante des forces de contact extérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{F}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 [1 + O(\eta)]. \quad (4.15)$$

Le moment en O des forces de contact extérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{M}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 [1 + O(\eta)]. \quad (4.16)$$

À titre d'exemple, on peut considérer les forces de pression $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = -p(\underline{a}, t) \underline{n}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0 = - \iint_{\partial\mathcal{D}_0} p(\underline{a}, t) \underline{n} dS_0 = - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{\text{grad}} p d^3 a. \quad (4.17)$$

L'équilibre entre les forces extérieures de volume dues à la gravité et ces forces de pression conduit alors à la relation hydrostatique $\underline{0} = -\underline{\text{grad}} p + \rho_0 g \underline{e}_z$.

2.3 Autres forces

Les forces intérieures de volume rassemblent les forces d'interaction à longue portée, supérieure à l'échelle microscopique du continu, entre les particules

de matière de la configuration de référence Ω_0 . Il peut s'agir, par exemple de forces électromagnétiques. On supposera ici qu'elles sont négligeables, ce qui entraîne la nullité de leur résultante et de leur moment en O pour tout domaine, c'est-à-dire

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}. \quad (4.18)$$

Les forces intérieures de contact rassemblent les forces d'interaction à courte portée entre les particules de matière d'un même domaine \mathcal{D}_0 . Ces forces ne sont pas négligeables, mais le principe de l'action et de la réaction implique que leur résultante et leur moment en O , sommés sur un domaine quelconque \mathcal{D}_0 sont nuls, ce qui s'écrit

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}. \quad (4.19)$$

Même si la résultante et le moment de ces forces sont nulles, elles se manifestent, par exemple, par le travail qu'elles fournissent lors d'une déformation d'une configuration à une autre. La détermination de ce travail n'est pas abordée dans ce chapitre.

3 Principe fondamental de la dynamique

L'énoncé du principe fondamental de la dynamique entraîne la linéarité des forces de contact par rapport à la normale. On déduit l'existence du tenseur des contraintes symétrique qui permet une représentation géométrique intéressante de ces forces. La divergence de ce tenseur intervient dans la loi de conservation de la quantité de mouvement.

3.1 Quantité de mouvement et moment cinétique

Le principe fondamental de la dynamique est la réunion de la loi de conservation de la quantité de mouvement et de la loi de conservation du moment cinétique. Ces lois énoncent que pour tout domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{p}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \\ \frac{d}{dt} \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] &= \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

ce qui s'écrit, à l'ordre dominant en η ,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) d^3 a &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) dS_0, \\ \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} d^3 a &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f} d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{T} dS_0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement montre que $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ est une densité surfacique dont l'intégrale sur la frontière de tout domaine vérifie l'hypothèse du continu (chapitre 2, paragraphe 1.1). Par conséquent, cette

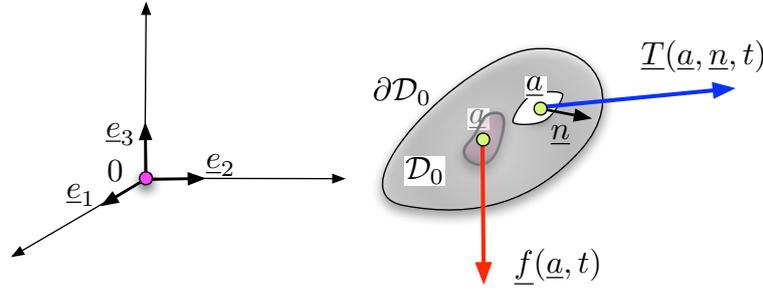


FIGURE 4.6 – Forces extérieures de volumes $\underline{f}(\underline{a}, t)$ et forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t)$ extérieures à \mathcal{D}_0 .

densité dépend linéairement des composantes de la normale \underline{n} et l'on peut écrire

$$\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n} \quad (4.22)$$

où $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est un tenseur d'ordre deux que l'on nomme "tenseur des contraintes". En appliquant le théorème de la divergence, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) d^3 a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) d^3 a + \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t) d^3 a. \quad (4.23)$$

En appliquant cette relation à des domaines de plus en plus petits, cette relation entraîne

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t). \quad (4.24)$$

On peut remarquer que la résultante des forces de contact $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ extérieures à un petit volume $\delta \mathcal{V}_0$ est égale à $\underline{f}_{\text{cont}} \delta \mathcal{V}_0$ où

$$\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}, t) = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \quad (4.25)$$

est la densité volumique "équivalente" aux forces de contact (figure 4.7).

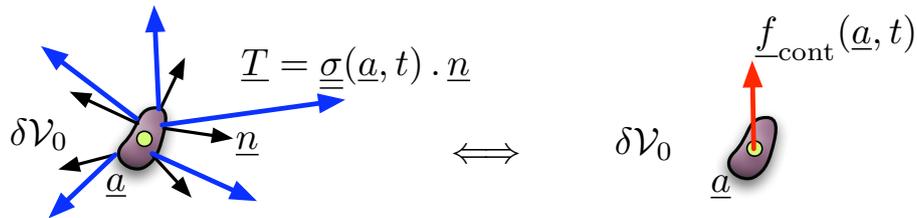


FIGURE 4.7 – Densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}, t)$ "équivalente" aux forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n}$.

3.2 Symétrie du tenseur des contraintes

Nous allons maintenant démontrer que la loi de conservation du moment cinétique entraîne la symétrie du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$. Cette loi s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a} \wedge \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d^3 a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f} d^3 a + \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS_0. \quad (4.26)$$

En reportant dans cette équation la loi de conservation de la quantité de mouvement écrite sous la forme $\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$, on montre que l'on a

$$\underline{C} = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d^3 a = \underline{0}. \quad (4.27)$$

On peut donc écrire, pour tout indice $i = 1, \dots, 3$ du vecteur \underline{C} , la relation

$$C_i = \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} a_j \sigma_{kl} n_l dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} a_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial a_l} d^3 a = 0. \quad (4.28)$$

En appliquant la formule de la divergence

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS_0 &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \text{div} \underline{Q} d^3 a \\ \iff \iint_{\partial \mathcal{D}_0} Q_l n_l dS_0 &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial Q_l}{\partial a_l} d^3 a, \end{aligned} \quad (4.29)$$

au cas où $Q_l = \epsilon_{ijk} a_j \sigma_{kl}$, pour i fixé, on obtient finalement

$$C_i = \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial (a_j \sigma_{kl})}{\partial a_l} - a_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial a_l} \right] d^3 a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} d^3 a = 0. \quad (4.30)$$

En écrivant $\epsilon_{1jk} \sigma_{kj} = \sigma_{23} - \sigma_{32}$, ainsi que les deux autres relations obtenues par permutations circulaires, et en prenant des domaines \mathcal{D}_0 de plus en plus petits, on démontre que $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est donc symétrique.

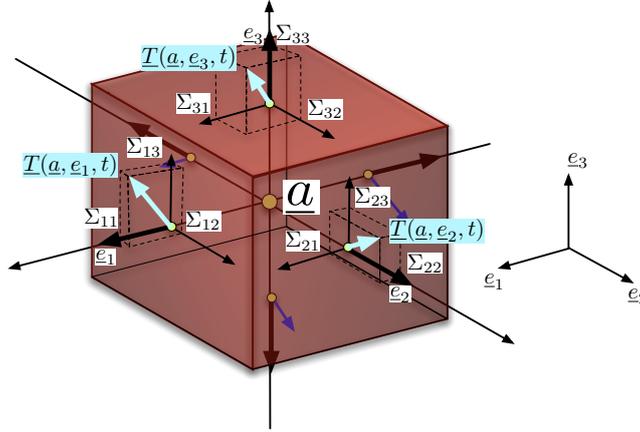


FIGURE 4.8 – Forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_i, t)$ exercées par l'extérieur d'un petit cube de centre \underline{a} dont les axes sont ceux du repère canonique.

On peut alors représenter graphiquement les forces de contact exercées sur un petit cube de centre \underline{a} par son extérieur (figure 4.8). La symétrie du tenseur des contraintes impose des liens entre les composantes des vecteurs $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_i, t) = \pm \underline{\sigma}(\underline{a}, t) \cdot \underline{e}_i$ s'exerçant sur les faces du cubes.

Dans la mesure où $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ est symétrique, il existe, pour chaque (\underline{a}, t) , une base orthonormée $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ de diagonalisation telle que

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_2 + \sigma_3 \underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3, \quad (4.31)$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les valeurs propres réelles du tenseur des contraintes. On peut alors représenter, sur la figure 4.9, les forces exercées sur un petit cube de centre \underline{a} et de normales \underline{n}_i par son extérieur.

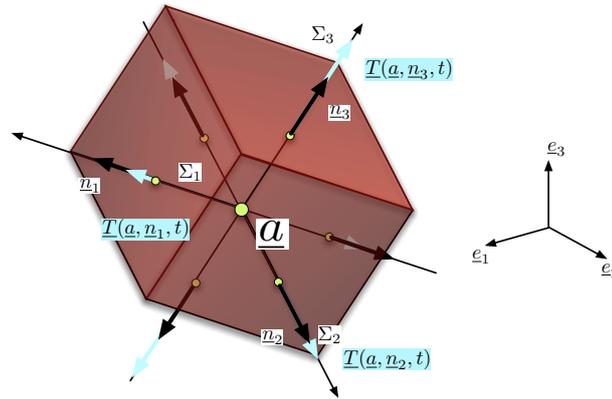


FIGURE 4.9 – Forces de contact $\underline{T}(a, \underline{n}_i, t)$ exercées par l'extérieur d'un petit cube de centre \underline{a} dont les axes sont les directions propres \underline{n}_i de $\underline{\sigma}$.

3.3 Tricercler de Mohr

La symétrie du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et donc l'existence de valeurs propres réelles ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) et d'une base orthonormée de diagonalisation ($\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$) permet de visualiser l'ensemble des forces de surface $\underline{T}(a, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(a, t) \cdot \underline{n}$ lorsque \underline{n} parcourt toutes les directions à l'aide de "tricercler de Mohr".

Étant donné un vecteur unitaire \underline{n} , que l'on considère comme la normale à une surface dS_0 prise dans la frontière $\partial\Omega_0$ d'un domaine Ω_0 (voir figure 4.10a), on appelle, respectivement, σ et τ les composantes normale et tangentielle du vecteur $\underline{T}(a, \underline{n}, t)$ définies par les relations

$$\sigma = \underline{T} \cdot \underline{n}, \quad \text{et} \quad \tau = \|\underline{T} - \sigma \underline{n}\|. \quad (4.32)$$

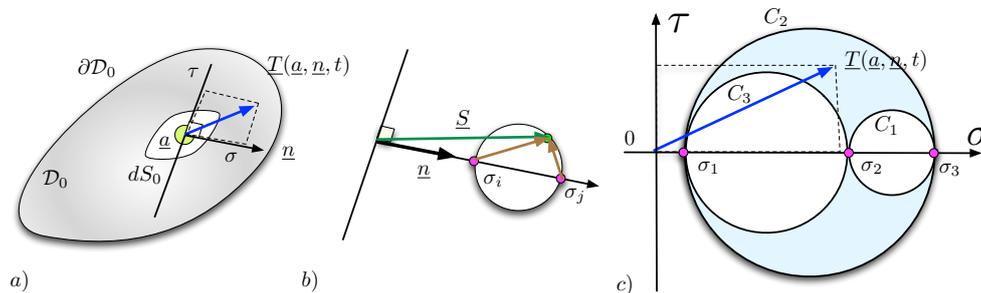


FIGURE 4.10 – Construction du tricercler de Mohr.

On cherche à représenter dans un plan l'ensemble des couples (σ, τ) décrits lorsque \underline{n} prend toutes les directions, connaissant les trois valeurs $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Pour cela, on exprime \underline{n} dans la base propre de $\underline{\sigma}$ sous la forme

$$\underline{n} = Y_1 \underline{n}_1 + Y_2 \underline{n}_2 + Y_3 \underline{n}_3. \quad (4.33)$$

On en déduit alors

$$\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_1 Y_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 Y_2 \underline{n}_2 + \sigma_3 Y_3 \underline{n}_3 . \quad (4.34)$$

Étant donné deux indices i et j distincts, on déduit, des deux expressions précédentes et de la relation $\underline{n}_i \cdot \underline{n}_j = \delta_{ij}$, l'égalité

$$(\underline{T} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{T} - \sigma_j \underline{n}) = (\sigma_k - \sigma_i) (\sigma_k - \sigma_j) Y_k^2 , \quad (4.35)$$

où k est le troisième indice, différent de i et j . Le signe de ce produit scalaire dépend de la position de la valeur propre σ_k par rapport aux deux autres valeurs propres σ_i et σ_j . On remarque de plus que Y_k^2 peut prendre toutes les valeurs de 0 à 1 lorsque \underline{n} prend toutes les directions possibles.

On remarque alors que lieu S_k des vecteurs \underline{S} tels que

$$S_k = \{ \underline{S} \quad : \quad (\underline{S} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{S} - \sigma_j \underline{n}) = 0 \} \quad (4.36)$$

est une sphère de centre $\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \underline{n}$ et de rayon $\frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2}$ (figure 4.10b). Le vecteur \underline{T} se situe à l'intérieur de cette sphère lorsque le signe de $(\underline{T} - \sigma_i \underline{n}) \cdot (\underline{T} - \sigma_j \underline{n})$ est négatif et à l'extérieur sinon.

On en déduit que l'ensemble des couples (σ, τ) est compris entre les trois cercles C_k , pour $k = 1, \dots, 3$ de la figure 4.10c.