

Chapitre 2

Hypothèse du continu

O. Thual, 9 septembre 2018

Sommaire

1	Vecteur flux	2
1.1	Nombre de Knusden et hypothèse du continu	2
1.2	Bilan global d'un constituant chimique	3
1.3	Linéarité du flux	4
2	Diffusion d'un champ scalaire	5
2.1	Du bilan global au bilan local	5
2.2	Loi de Fick	6
2.3	Solutions analytiques de l'équation de diffusion	6
3	Équation de la chaleur	7
3.1	Équation de bilan de l'énergie interne	8
3.2	Loi de Fourier et loi d'état	8
3.3	Conditions aux limites	9

Introduction

On définit ici les conditions qui permettent de décrire la matière de manière continue, sachant qu'elle ne l'est plus aux échelles microscopiques. Il faut pour cela que les échelles de variation macroscopiques des champs considérés soient grandes devant ces échelles microscopiques. Les phénomènes physiques résidant aux échelles microscopiques, comme par exemple la diffusion brownienne de constituants chimiques ou de la chaleur, doivent alors être modélisés par des champs continus.

1 Vecteur flux

Le nombre de Knusden mesure l'écart entre les échelles microscopiques et macroscopiques et doit être petit pour justifier l'approche continue. On montre que les champs de surface qui modélisent les phénomènes microscopiques de courte portée et qui interviennent dans les équations de bilan sont caractérisés par un vecteur flux.

1.1 Nombre de Knusden et hypothèse du continu

La modélisation de la mécanique des milieux continus repose sur l'utilisation de champs scalaires $B(\underline{x})$, de champs de vecteurs $V(\underline{x})$ ou de champs de tenseurs (d'ordre deux) $\underline{A}(\underline{x})$ supposés continus et différentiables, au moins par morceaux. Cependant, cette description continue n'est physiquement pas valable lorsqu'on s'approche des échelles microscopiques (10^{-9} m par exemple) où la matière est notoirement discontinue (atomes, molécules).

Pour justifier l'utilisation de fonctions continues pour décrire les solides et les fluides à l'échelle macroscopique, on considère une suite de sous-domaines emboîtés \mathcal{D}_h convergeant vers un point \underline{x}_0 lorsque h , une longueur caractéristique de \mathcal{D}_h , tend vers zéro (voir Figure 2.1). On considère alors les valeurs d'une grandeur physique extensive $\mathcal{F}(\mathcal{D}_h)$ lorsque h varie des échelles microscopiques h_{mic} aux échelles macroscopiques h_{mac} .

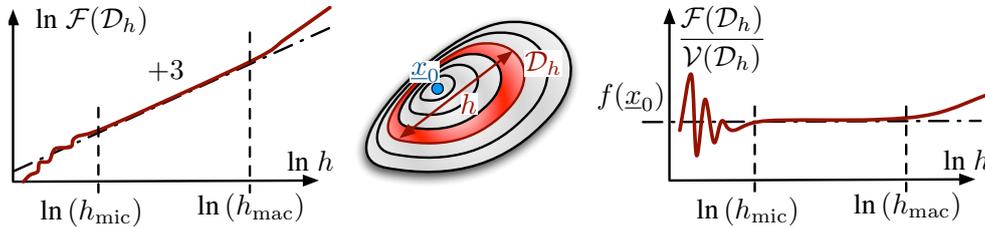


FIGURE 2.1 – Comportement $\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) \sim f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h)$ pour $h_{mic} \ll h \ll h_{mac}$ avec des domaines emboîtés \mathcal{D}_h convergeant vers \underline{x}_0 .

S'il existe une gamme d'échelles $h_{mic} \ll h \ll h_{mac}$ pour lesquelles

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) \sim f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h) \quad (2.1)$$

où $\mathcal{V}(\mathcal{D}_h)$ est le volume du domaine \mathcal{D}_h , on dit que la grandeur \mathcal{F} vérifie “l'hypothèse du continu”. On modélise alors la grandeur \mathcal{F} par un champ

continu à toutes les échelles, y compris infinitésimales, en écrivant

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) = f(\underline{x}_0) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h) + O(h^4) = O(h^3) \quad (2.2)$$

où $O(h^n)$ désigne un infiniment petit d'ordre n . On peut donc considérer que $f(\underline{x})$, la densité volumique de la grandeur \mathcal{F} , est continue et différentiable, en se souvenant que l'infiniment petit mathématique n'est qu'une modélisation et que le domaine du continu décrit des échelles supérieures à l'échelle microscopique h_{mic} . On désigne par le nom de "particule" du milieu continu un volume de taille caractéristique h_{mic} considéré comme infinitésimal pour l'échelle du continu mais suffisamment grand pour contenir un très grand nombre de molécules de matière.

Au-delà de h_{mac} , les fluctuations macroscopiques de \mathcal{F} deviennent visibles. On peut alors écrire

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} f(\underline{x}) d^3x, \quad (2.3)$$

pour tout domaine \mathcal{D} . L'hypothèse du continu ne peut être formulée pour une grandeur \mathcal{F} que si le rapport Kn entre les échelles microscopiques et macroscopiques, appelé le nombre de Knusden, est très petit devant un, ce que l'on écrit

$$Kn = \frac{h_{\text{mic}}}{h_{\text{mac}}} \ll 1. \quad (2.4)$$

Il existe cependant des phénomènes physiques comme la diffusion moléculaire où l'action des forces de contact dont la nature se situe aux échelles microscopiques. En effet, les particules considérées comme infinitésimales à l'échelle du continu échangent constamment des molécules entre elles ce qui induit des processus de mélange. Dans le cadre d'une approche "milieu continu", il est nécessaire de modéliser ces phénomènes par des champs surfaciques définis sur les frontières de domaines de tailles supérieures à h_{mic} . C'est par exemple le cas du flux d'un constituant chimique.

1.2 Bilan global d'un constituant chimique

On suppose que $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ est la masse d'un constituant chimique dilué dans un fluide occupant le domaine \mathcal{D} à l'instant t . On suppose que le nombre de Knusden Kn est petit devant un et que $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ ainsi que sa dérivée $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ vérifient l'hypothèse du continu. On peut alors écrire

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, t) = \iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (2.5)$$

où $c(\underline{x}, t)$ est la masse volumique du constituant chimique que l'on suppose variable avec le temps t . On dit aussi que $c(\underline{x}, t)$ est la "concentration" du constituant chimique.

On suppose que la masse du constituant qui traverse la frontière d'un domaine \mathcal{D} par unité de surface et de temps peut être modélisée par le flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ où \underline{n} est la normale à la frontière $\partial\mathcal{D}$. La loi de conservation de la concentration chimique $c(\underline{x}, t)$ consiste à énoncer que pour tout domaine \mathcal{D} fixe, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = 0. \quad (2.6)$$

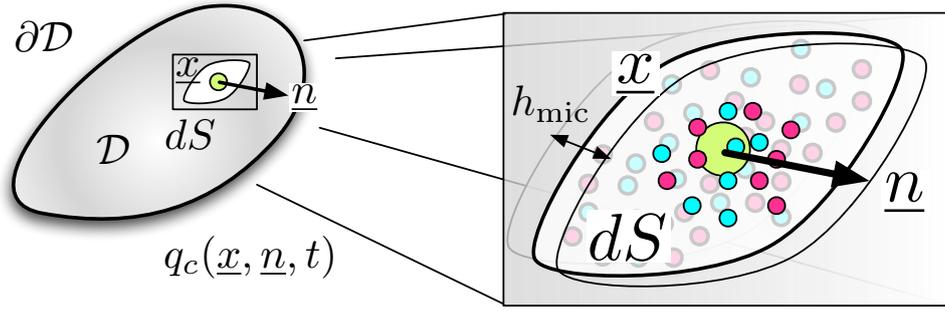


FIGURE 2.2 – Modélisation de la diffusion moléculaire d'un constituant chimique par le flux par unité de surface $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$.

Le flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ mesure la masse du constituant chimique qui sort du domaine \mathcal{D} par unité de surface et de temps. Ce flux provient de l'agitation moléculaire aux échelles microscopiques dont l'effet moyen, à l'échelle du continu, peut se traduire par un bilan positif ou négatif à travers une surface. Dans cette modélisation, on a supposé que ce flux ne dépendait que de la normale à la surface infinitésimale dS prise autour du point \underline{x} de la frontière de $\partial\mathcal{D}$.

1.3 Linéarité du flux

L'existence d'une loi de conservation pour la concentration $c(\underline{x}, t)$ entraîne la linéarité de son flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ par rapport au vecteur unitaire \underline{n} . Pour démontrer cette importante propriété, on considère une famille de tétraèdres \mathcal{T}_h convergeant de manière homothétique vers un point \underline{x}_0 lorsque h , par exemple la longueur d'une des arêtes, tend vers zéro.

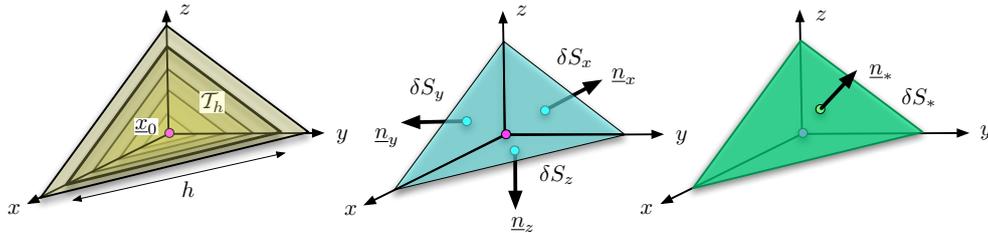


FIGURE 2.3 – Famille de tétraèdres \mathcal{T}_h convergeant vers un point \underline{x}_0 .

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$ et sa dérivée $\frac{d}{dt}[\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)]$ vérifient l'hypothèse du continu, on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = -\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{T}_h} c(\underline{x}, t) d^3x \right] = O(h^3) \quad (2.7)$$

où $O(h^3)$ désigne un infiniment petit d'ordre 3. En notant $\underline{n}_x, \underline{n}_y, \underline{n}_z$ et \underline{n}_* les normales sortantes aux faces d'aires respectives $\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z$ et δS_* (voir figure 2.3), on peut écrire

$$\iint_{\partial\mathcal{T}_h} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_x, t) \delta S_x + q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_y, t) \delta S_y + q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_z, t) \delta S_z$$

$$+q_c(\underline{x}_0, \underline{n}_*, t) \delta S_* + O(h^3). \quad (2.8)$$

En remarquant que $\delta S = O(h^2)$ pour $\delta S \in \{\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z, \delta S_*\}$ et en utilisant la relation géométrique

$$\delta S_x \underline{n}_x + \delta S_y \underline{n}_y + \delta S_z \underline{n}_z + \delta S_* \underline{n}_* = \underline{0}, \quad (2.9)$$

la comparaison des équations (2.7) et (2.8) montre que, en changeant \underline{x}_0 en \underline{x} ,

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}_x, t) \delta S_x + q_c(\underline{x}, \underline{n}_y, t) \delta S_y + q_c(\underline{x}, \underline{n}_z, t) \delta S_z + q_c(\underline{x}, \underline{n}_*, t) \delta S_* = 0. \quad (2.10)$$

On en déduit que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ dépend linéairement de \underline{n} . On peut donc l'écrire sous la forme

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \quad (2.11)$$

où $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ est le "vecteur flux sortant" du constituant chimique $c(\underline{x}, t)$.

2 Diffusion d'un champ scalaire

L'équation de bilan d'un champ scalaire représentant la concentration d'un constituant chimique met en évidence l'existence d'un vecteur flux. La loi de Fick, qui est une loi de comportement empirique, relie ce vecteur flux au gradient de la concentration. On en déduit une équation de diffusion qui admet des solutions analytiques.

2.1 Du bilan global au bilan local

On considère le champ de concentration chimique $c(\underline{x}, t)$ obéissant à l'équation de conservation (2.6) qui admet donc un vecteur flux vérifiant (2.11). Cette loi de conservation du champ scalaire $c(\underline{x}, t)$ indique que pour tout domaine fixe \mathcal{D} on peut écrire le bilan global

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (2.12)$$

On suppose ici que $c(\underline{x}, t)$ est continu et dérivable dans tout le domaine \mathcal{D} et non plus seulement continu par morceau. Dans ce cas et puisque les domaines \mathcal{D} ne dépendent pas du temps, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t) d^3x \right] = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) d^3x, \quad (2.13)$$

où $\frac{\partial c}{\partial t}$ est la dérivée partielle de $c(\underline{x}, t)$ par rapport au temps. On suppose de plus que le vecteur flux $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ est un champ dérivable, ce qui permet d'appliquer le théorème de la divergence

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) d^3x. \quad (2.14)$$

En appliquant le bilan global à des domaines de plus en plus petits, on déduit le bilan local valable pour tout point \underline{x} et tout temps t qui s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) + \operatorname{div} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) = 0. \quad (2.15)$$

2.2 Loi de Fick

La loi de Fick est une loi de comportement, c'est-à-dire basée sur des observations expérimentales, qui spécifie

$$\underline{Q}_c(\underline{x}, t) = -k_c \underline{\text{grad}} c(\underline{x}, t), \quad (2.16)$$

où $k_c \geq 0$ est le "coefficient de diffusion moléculaire" du constituant c .

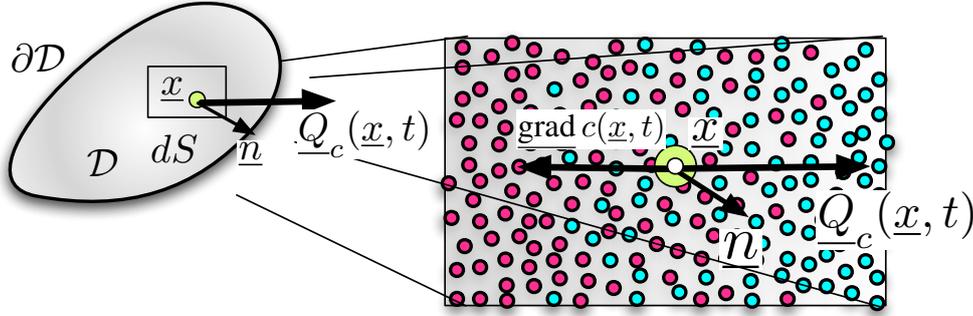


FIGURE 2.4 – Illustration de la loi de Fick avec $q_c = \underline{Q}_c \cdot \underline{n}$ et $\underline{Q}_c = -k_c \underline{\text{grad}} c$.

Si u_m est la vitesse caractéristique de l'agitation des molécules (très grande) et l_m leur libre parcours moyen (très petit), on peut écrire $k_c \sim l_m u_m$. Ce coefficient mesure donc l'efficacité avec laquelle le mouvement brownien des molécules transporte le constituant chimique des endroits où il est le plus abondant vers les endroits où il n'a pas encore complètement diffusé. Par exemple, le coefficient de diffusion moléculaire de la salinité dans l'eau de mer est $k_c \sim 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Si le milieu continu est inhomogène, on peut considérer que $k_c(\underline{x})$ dépend de l'espace et la loi de conservation du constituant chimique $c(\underline{x}, t)$ s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) = \text{div} [k_c(\underline{x}) \underline{\text{grad}} c(\underline{x}, t)]. \quad (2.17)$$

Dans le cas où le milieu continu est homogène, le coefficient k_c est constant et le champ scalaire c vérifie l'équation de diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) = k_c \Delta c(\underline{x}, t). \quad (2.18)$$

2.3 Solutions analytiques de l'équation de diffusion

On considère l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} \quad (2.19)$$

où $c(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ est un champ scalaire dans un espace affine de dimension n entier quelconque et $k_c > 0$ un coefficient positif constant. Cette équation admet une solution analytique valable pour tout temps $t > 0$ qui s'écrit

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi} l(t)]^n} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2 l^2(t)} \right], \quad l(t) = \sqrt{2 k_c t}, \quad (2.20)$$

et dont l'intégrale sur tout l'espace vaut un. Cette solution mathématique permet de générer plusieurs solutions de l'équation de diffusion tridimensionnelle $\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \Delta c$ dans le cas où k_c est constant, que l'on résume dans le tableau 2.1.

$l(t) = \sqrt{2k_c t}$	1D	2D	3D
$t > 0, c(\underline{x}, t) =$	$\frac{C_{tot}}{\sqrt{2\pi} l(t)} e^{-\frac{x^2}{2l^2(t)}}$	$\frac{C_{tot}}{2\pi l^2(t)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2l^2(t)}}$	$\frac{C_{tot}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} l^3(t)} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2(t)}}$
$t = 0, c(\underline{x}, 0) =$	$C_{tot} \delta(x)$	$C_{tot} \delta(x) \delta(y)$	$C_{tot} \delta(x) \delta(y) \delta(z)$

TABLE 2.1 – Solution exacte de l'équation de diffusion $\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \Delta c$.

Pour toutes ces solutions, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} c(\underline{x}, t) d^n x = C_{tot} \quad \text{et} \quad l(t) = \sqrt{2k_c t}. \quad (2.21)$$

Ces solutions ont des formes de gaussiennes respectivement unidimensionnelles (1D), bidimensionnelles (2D) ou tridimensionnelles (3D). Leur écart type $l(t)$ suit la même "loi de diffusion" en \sqrt{t} . Lorsque t tend vers zero, les valeurs de $c(x, y, z, t)/C_{tot}$ tendent respectivement vers $\delta(x)$, $\delta(x)\delta(y)$ et $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ où $\delta(x)$, $\delta(y)$ et $\delta(z)$ sont les distributions de Dirac. On voit donc que ces solutions analytiques correspondent à des concentrations initiales localisées dans un plan (diffusion 1D), sur une ligne (diffusion 2D) ou en un point (diffusion 3D), comme l'illustre la figure 2.5.

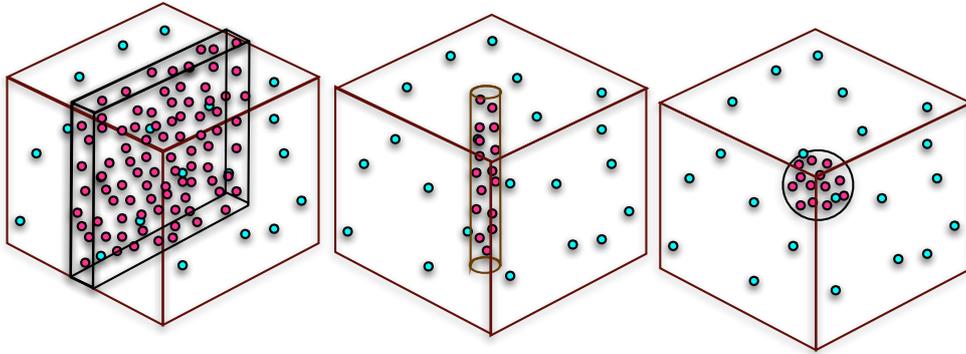


FIGURE 2.5 – Diffusion 1D, 2D ou 3D.

3 Équation de la chaleur

L'équation de bilan de l'énergie interne met en évidence l'existence d'un flux de chaleur. La loi de Fourier relie ce flux au gradient de température. On en déduit l'équation de la chaleur qui se résout en imposant des conditions aux limites aux frontières.

3.1 Équation de bilan de l'énergie interne

Une hypothèse très courante pour la modélisation des milieux continus consiste à dire que pour des domaines de taille caractéristique h tels que $h_{\text{mic}} \ll h \ll h_{\text{mac}}$, le milieu est en équilibre thermodynamique. On peut donc définir une densité volumique d'énergie interne e_{int} telle que l'énergie interne totale d'un domaine \mathcal{D} s'écrivent

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}}(\underline{x}, t) d^3x . \quad (2.22)$$

En l'absence de forces et de mouvement à l'échelle macroscopique, le premier principe de la thermodynamique s'énonce à travers l'équation de bilan qui spécifie, pour tout domaine \mathcal{D} , la relation

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}}(\underline{x}, t) d^3x \right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x \quad (2.23)$$

où $q(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est le flux de chaleur, par unité de surface et de temps, sortant et $r(\underline{x}, t)$ l'apport de chaleur volumique par unité de volume et de temps. Comme l'apport de chaleur vérifie l'hypothèse du continu, le champ surfacique q est une fonction linéaire du vecteur unitaire \underline{n} et on peut définir le vecteur flux de chaleur par la relation

$$q(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \quad (2.24)$$

On définit alors la puissance thermique \mathcal{P}_{the} par la relation

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t)] = \mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x . \quad (2.25)$$

On déduit, de ce bilan global, l'équation de bilan local

$$\frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} + \text{div } \underline{Q} = r , \quad (2.26)$$

que l'on nomme "équation de bilan de l'énergie interne".

3.2 Loi de Fourier et loi d'état

La loi de Fourier est une loi de comportement pratiquement toujours utilisée pour décrire la diffusion de la chaleur dans tout type de milieu continu. Elle s'écrit

$$\underline{Q}(\underline{x}, t) = -k \text{grad } T(\underline{x}, t) \quad (2.27)$$

où k est la "conductivité thermique". Par exemple, la conductivité thermique est de l'ordre de $k = 0.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ dans l'eau de mer, plus de cent fois plus petite dans l'air et dix fois plus grande dans les métaux.

L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local que nous avons faite dans le cadre de l'hypothèse du continu permet de relier entre elles les grandeurs thermodynamiques par des lois d'état. À titre d'exemple, nous supposons que cette loi d'état est de la forme simple

$$e_{\text{int}} = \rho c T , \quad (2.28)$$

où ρ est la masse volumique, $T(\underline{x}, t)$ la température et c la “chaleur spécifique” ou “capacité thermique massique”. Cette loi d’état simplifiée est utilisée en choisissant la chaleur spécifique à volume constant $c = c_v$ ou à pression constante $c = c_p$ selon les cas. Ces coefficients valent par exemple $4\,000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l’eau et quatre à cinq fois moins pour l’air ou pour certains solides. On suppose ici que ρ et c sont constant.

L’équation de bilan de l’énergie interne conduit donc à “l’équation de la chaleur” qui s’écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{r}{\rho c} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{k}{\rho c}, \quad (2.29)$$

où κ est le coefficient de “diffusivité thermique”. Ce coefficient vaut par exemple $\kappa = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour l’eau de mer.

3.3 Conditions aux limites

On s’intéresse ici à l’évolution du champ de température, obéissant à l’équation de la chaleur avec κ constant, dans un domaine Ω . Pour résoudre ce problème de thermique il faut spécifier une condition initiale $T(\underline{x}, 0)$ si le problème est instationnaire et, surtout, des conditions aux limites.

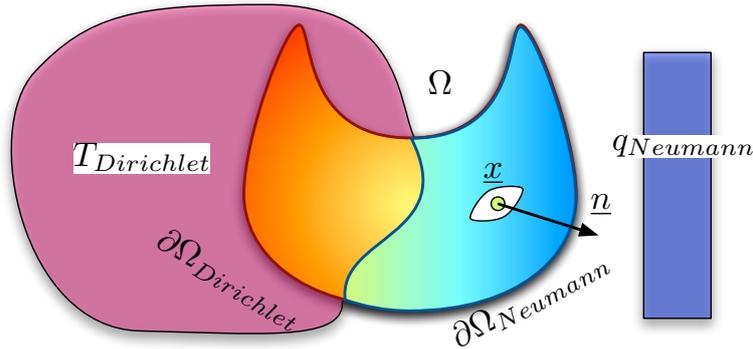


FIGURE 2.6 – Condition aux limites en température sur $\partial\Omega_{Dirichlet}$ et en flux sur $\partial\Omega_{Neumann}$.

Un premier type de conditions aux limites consiste à imposer le flux $q(\underline{x}, \underline{n}, t) = q_{Neumann}(\underline{x}, t)$ sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ que l’on notera $\partial\Omega_{Neumann}$. Comme $q = \underline{Q} \cdot \underline{n} = -k \text{ grad } T \cdot \underline{n}$, ces conditions aux limites s’écrivent

$$-k \text{ grad } T(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) = q_{Neumann}(\underline{x}, t), \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Neumann}. \quad (2.30)$$

Dans la mesure où cette condition aux limites fait intervenir la dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad } T \cdot \underline{n}$, on dit qu’il s’agit d’une condition aux limites de “Neumann”. Cette condition aux limites se rencontre en pratique s’il l’on injecte ou retire un flux de chaleur donné.

Un deuxième type de conditions aux limites consiste à imposer la température $T(\underline{x}, t) = T_{Dirichlet}(\underline{x}, t)$ sur de la frontière $\partial\Omega$ que l’on notera $\partial\Omega_{Dirichlet}$. Ces conditions aux limites s’écrivent

$$T(\underline{x}, t) = T_{Dirichlet}(\underline{x}, t), \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Dirichlet}. \quad (2.31)$$

Dans la mesure où cette condition aux limites fait intervenir la température T et non pas sa dérivée normale, on dit qu'il s'agit d'une condition aux limites de "Dirichlet". Cette condition aux limites se rencontre en pratique lorsque la frontière en question est plongée dans un bain thermostaté à forte inertie thermique ou en présence de régulation thermique.

En conclusion l'équation de la chaleur avec ses conditions aux limites s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(\underline{x}, t) &= \kappa \Delta T(\underline{x}, t) + \frac{r(\underline{x}, t)}{\rho c} && \text{pour } \underline{x} \in \Omega \\ \text{avec } -k \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) &= q_{Neumann}(\underline{x}, t) && \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Neumann} \\ \text{et } T(\underline{x}, t) &= T_{Dirichlet}(\underline{x}, t) && \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega_{Dirichlet} . \end{aligned} \quad (2.32)$$

On remarque que si $\partial\Omega_{Neumann} = \partial\Omega$, c'est-à-dire si les conditions aux limites sont uniquement des conditions de flux, et si $q_{Neumann}$ et r sont indépendants du temps, le problème n'admet de solution stationnaire que si la relation de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\iint_{\partial\Omega} q_{Neumann}(\underline{x}) dS = \iiint_{\Omega} r(\underline{x}) d^3x . \quad (2.33)$$