Chapitre 1

Algèbre linéaire et tenseurs

O. Thual, 9 septembre 2018

Sommaire

Introduction

On introduit les outils mathématiques minimaux nécessaires pour une première approche de la mécanique des milieux continus. Des notions de base d'algèbre linéaire sont présentées en identifiant les vecteurs avec les matrices de leurs composantes à l'aide d'un repère orthonormé. Il en va de même pour les applications linéaires ou les formes quadratiques, appelées “tenseurs d'ordre deux”, que l'on identifie aux matrices carrées de leurs composantes. Comme la base canonique est orthonormée, les règles de changement de base sont identiques pour tous ces tenseurs. On introduit alors la notion de champs de vecteurs ou de champs de tenseurs en fonction d'une variable d'espace et on passe en revue les opérateurs de dérivations de base. On exprime alors ces opérateurs et coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

1 Algèbre linéaire

On indroduit ici les notations décrivant les produits scalaire, matriciel ou tensoriel en identifiant vecteurs ou tenseurs d'ordre deux avec les matrices de leurs composantes dans une base orthonormée. La convention d'Einstein permet d'exprimer ces produits à l'aide d'une notation très compacte.

1.1 Identification entre tenseurs et matrices

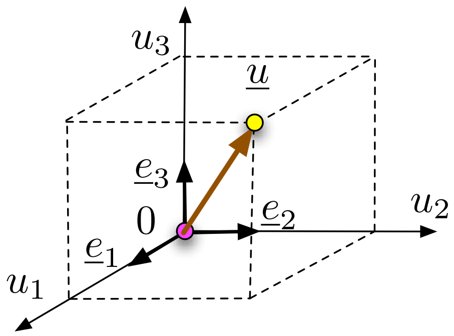

FIGURE **1**.1 – *Composantes du vecteur $\underline{u}$ dans le repère orthonormé.*

On considère un espace vectoriel E euclidien de dimension trois muni d'une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On identifie alors les vecteurs $\underline{u}$ de cet espace aux matrices colonne 3×1 en écrivant

$$\underline{u} = u_1\,\underline{e}_1 + u_2\,\underline{e}_2 + u_3\,\underline{e}_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \,{}^t(u_1, u_2, u_3)\;. \tag{1.1}$$

On peut ainsi considérer que le produit scalaire de deux vecteurs est le produit de deux matrices en écrivant

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \,{}^t\underline{u}\;\underline{v} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3\;. \tag{1.2}$$

On identifie ensuite une application linéaire de E dans E avec la matrice 3×3 de ses composantes en notant $\underline{v} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}$ le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\, u_1 + A_{12}\, u_2 + A_{13}\, u_3 \\ A_{21}\, u_1 + A_{22}\, u_2 + A_{23}\, u_3 \\ A_{31}\, u_1 + A_{32}\, u_2 + A_{33}\, u_3 \end{pmatrix} . \quad (\mathbf{1}.3)$$

De même, on identifie une forme bilinéaire $\mathcal{C}(\underline{u}, \underline{v})$ sur E à la matrice 3×3 de ses composantes en écrivant

$$\mathcal{C}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{v} = {}^t\underline{u}\; \underline{\underline{C}}\; \underline{v} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} . \quad (\mathbf{1}.4)$$

On a utilisé le produit "à gauche" $\underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} = {}^t\underline{u}\; \underline{\underline{C}}$, une matrice ligne, que l'on ne doit pas confondre avec le produit "à droite" $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{C}}\; \underline{v}$, une matrice colonne.

Étant donnée une matrice 3×3, on peut la considérer indifférement comme étant identifiée à une application linéaire ou à une forme bilinéaire. En effet, un changement de base $\underline{v} = \underline{\underline{P}}\; \underline{v}'$ et $\underline{u} = \underline{\underline{P}}\; \underline{u}'$ conduit au changement de matrice $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{P}}^{-1}\; \underline{\underline{A}}\; \underline{\underline{P}}$ pour une application linéaire et au changement de matrice $\underline{\underline{A}}' = {}^t\underline{\underline{P}}\; \underline{\underline{C}}\; \underline{\underline{P}}$ pour une forme bilinéaire. En se restreignant aux changements de base orthonormées, la relation $\underline{\underline{P}}^{-1} = {}^t\underline{\underline{P}}$ entraine que les composantes des deux types de matrices changent de la même manière.

On dira donc qu'une application linéaire ou une forme bilinéaire sont des "tenseurs d'ordre deux" sur l'espace E que l'on identifiera à une matrice 3×3 dans le cadre de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Avec les mêmes arguments de changement de base, on peut définir le produit tensoriel de deux vecteurs par la relation

$$\underline{\underline{B}} = \underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{u}\; {}^t\underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_{ij} = u_i\; v_j \; . \quad (\mathbf{1}.5)$$

Un vecteur peut être vu comme un "tenseur d'ordre 1". De même que les composantes d'un tenseur d'ordre 1 comportent un seul indice et celles d'un tenseur d'ordre deux en comportent deux, on peut définir des tenseurs d'ordre quelconque en considérant que leurs composantes comportent une nombre d'indice plus élevé.

1.2 Convention d'Einstein

La convention d'Einstein consiste à omettre le signe somme $\sum_{j=1}^{3}$ lorsque l'indice j est répété dans une expression comme par exemple

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_j\, v_j \; , \qquad \underline{v} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} \;\Leftrightarrow\; v_i = A_{ij}\, u_j \; , \qquad \underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{v} = u_i\, C_{ij}\, v_j \; . \quad (\mathbf{1}.6)$$

Ces sommations traduisent les produits entre tenseurs d'ordres quelconques que l'on nomme, de manière générique, "produit contracté" comme par exemple $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}$, $\underline{v} \cdot \underline{\underline{A}}$ et $\underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{v}$ de composantes d'expressions respectives $u_j\, v_j$, $A_{ij}\, u_j$, $v_j\, A_{ji}$ et $u_i\, C_{ij}\, v_j$. De même, le produit contracté de deux tenseurs d'ordre deux est le produit $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ de composantes $C_{ij} = A_{il}\, B_{lj}$ vérifiant donc

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{1}.7)$$

On pourra aussi considérer le produit "doublement contracté" entre deux tenseurs d'ordre deux défini par la relation

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij}\, B_{ji} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \; . \qquad (\mathbf{1}.8)$$

Si $\underline{\underline{D}}$ est symétrique (${}^t\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} \Leftrightarrow D_{ij} = D_{ji}$) et $\underline{\underline{\Omega}}$ est antisymétrique (${}^t\underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}} \Leftrightarrow \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$), on vérifie facilement que

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Omega}} = D_{ij}\, \Omega_{ji} = -D_{ji}\, \Omega_{ij} = -\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0 \; . \qquad (\mathbf{1}.9)$$

Le symbole de Kroenecker δ_{ij} constitue les composantes du tenseur identité $\underline{\underline{I}}$. On peut par exemple écrire

$$\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{A}} = \delta_{ij}\, A_{ji} = A_{ii} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}}) \; . \qquad (\mathbf{1}.10)$$

On pourra également utiliser la convention de sommation d'Einstein pour exprimer les vecteurs ou les tenseurs en fonction des vecteurs de base en écrivant

$$\underline{u} = u_j\, \underline{e}_j \;, \quad \underline{\underline{A}} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \; . \qquad (\mathbf{1}.11)$$

En remarquant que $(\underline{v} \otimes \underline{w}) \cdot \underline{u} = (\underline{w} \cdot \underline{u})\, \underline{v}$ et $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$, on peut écrire

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot u_k\, \underline{e}_k = A_{ij}\, \underline{e}_i\, \delta_{jk}\, u_k = A_{ij}\, u_j\, \underline{e}_i \; . \qquad (\mathbf{1}.12)$$

Le pseudo-tenseur fondamental alterné ϵ_{ijk} défini par les relations $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ et $\epsilon_{ijk} = 0$ si au moins deux indices sont égaux. Ces composantes ne définissent qu'un "pseudo-tenseur" plutôt qu'un tenseur d'ordre 3 dans la mesure où cette définition n'est pas invariante par changement de l'orientation de la base orthonormée. Le pseudo-tenseur fondamental alterné permet d'écrire le produit vectoriel de deux vecteurs avec la convention d'Einstein à l'aide de la relation

$$\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_i = \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k \; . \qquad (\mathbf{1}.13)$$

Si $\underline{\underline{\Omega}}$ est une matrice antisymétrique (${}^t\underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}$), on montre qu'il existe un unique vecteur $\underline{\omega}$ tel que pour tout vecteur $\underline{u}$ on puisse écrire

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Omega_{ij}\, u_j = \epsilon_{ijk}\, \omega_j\, u_k = \epsilon_{ilj}\, \omega_l\, u_j \; . \qquad (\mathbf{1}.14)$$

On en déduit que $\Omega_{ij} = \epsilon_{ilj}\, \omega_l$ et donc que $\omega_i + \Omega_{jk} = \Omega_{ij} + \omega_k = 0$ si $\epsilon_{ijk} = 1$.

Le produit mixte de trois vecteurs est défini par les relations équivalentes

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_3 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \epsilon_{ijk}\, u_i\, v_j\, w_k \; . \qquad (\mathbf{1}.15)$$

Comme $\underline{u} \wedge \underline{v} = S\, \underline{n}$ où S est l'aire du parallélogramme engendré par le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ et $\underline{n}$ un vecteur unitaire normal à leur plan, on voit que $|(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})| = A\, h$ où $h = |\underline{n} \cdot \underline{w}|$ est la hauteur du parallélépipède engendré par les trois vecteurs. Si $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ engendrent un repère direct, leur produit mixte est donc le volume $V = A\, h$ du petit parallélépipède engendré.

On déduit de ce qui précède que le déterminant d'un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{F}}$ identifié à une matrice de composantes F_{ij} s'écrit $\det \underline{\underline{F}} = \epsilon_{ijk}\, F_{1i}\, F_{2j}\, F_{3k}$.

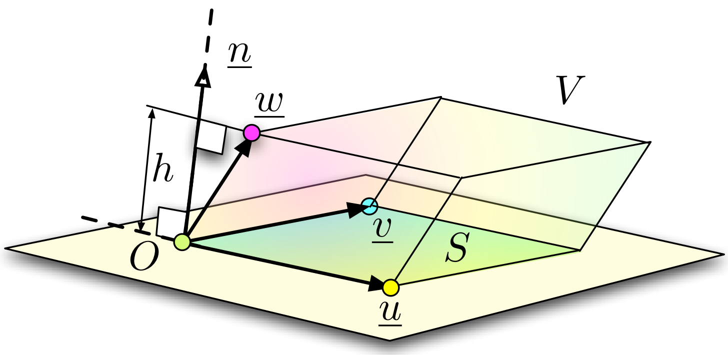

FIGURE 1.2 – Calcul du volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs.

1.3 Décompositions de tenseurs

Tout tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{K}}$ se décompose de manière unique en une partie antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ et une partie $\underline{\underline{D}}$ symétrique en écrivant

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}}\right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}\right) . \qquad (1.16)$$

Cette décomposition correspond à des projections sur des sous-espaces vectoriels de l'espace des tenseurs d'ordre deux, de dimensions respectives 3 et 6.

On peut aussi décomposer, de manière unique, un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{\sigma}}$ (pour varier les notations) en une partie "sphérique" $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ proportionnelle au tenseur identité $\underline{\underline{I}}$ et une partie "déviatorique" $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}$ de trace nulle. En effet, on peut écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{I}} . \qquad (1.17)$$

On a bien $\mathrm{tr}\,[\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}] = 0$. Cette décomposition correspond à des projections sur des sous-espaces vectoriels de l'espace des tenseurs d'ordre deux, de dimensions respectives 1 et 8.

2 Champs de tenseurs

Lorsqu'on associe à tout point de l'espace un vecteur ou un tenseur d'ordre deux à l'aide de fonctions différentiables, on parle de champs de tenseurs. On présente ici les principaux opérateurs de dérivation des champs de tenseurs ainsi que quelques unes de leurs principales propriétés.

2.1 Opérateurs de dérivation

On repère les points M d'un espace affine de dimension 3 muni d'une origine O par le vecteur $\underline{x} = \underline{OM}$. On considère une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et on note

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_j\,\underline{e}_j , \qquad (1.18)$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein. On se place ici en coordonnées cartésiennes en repérant tous les vecteurs ou tenseurs à l'aide de leurs composantes dans la même base orthonomée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ indépendante de $\underline{x}$.

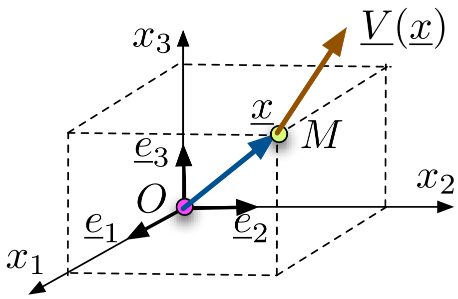

FIGURE **1**.3 – *Point $\underline{x}$ et vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ dans le repère orthonormé.*

On souhaite différentier des champs scalaires $B(\underline{x})$, des champs de vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ ou des champs de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$. On introduit pour cela les notations équivalentes

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = B_{,i} \ , \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_{i,j} \ , \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = A_{ij,k} \ , \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \, \partial x_j} = B_{,ij} \ , \quad \text{etc.} \tag{1.19}$$

On considère des champs scalaires $B(\underline{x})$ différentiables par rapport aux variables d'espace. Le gradient du champ $B(\underline{x})$ est défini par la relation

$$\underline{\text{grad}}\ B = \frac{\partial B}{\partial x_i}\, \underline{e}_i = B_{,i}\, \underline{e}_i \ . \tag{1.20}$$

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut écrire

$$B(\underline{x} + \underline{\delta x}) = B(\underline{x}) + \underline{\text{grad}}\ B(\underline{x}) \cdot \underline{\delta x} + O\left(\delta x^2\right) \tag{1.21}$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ et $O\left(\delta x^2\right)$ est un terme d'ordre deux en δx. On s'affranchit de ce terme d'ordre deux en considérant des variations "infinitésimales" $\underline{dx}$ pour désigner un petit vecteur $\underline{\delta x}$ "infiniment petit" et dB pour désigner une variation $\delta B = B(\underline{x} + \underline{\delta x}) - B(\underline{x})$ "infiniment petite". On peut ainsi écrire

$$dB = \underline{\text{grad}}\ B(\underline{x}) \cdot \underline{dx} \ . \tag{1.22}$$

On définit la divergence de $\underline{V}(\underline{x}) = V_j(\underline{x})\, \underline{e}_j$ par la relation

$$\text{div}\ \underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = V_{j,j} \ . \tag{1.23}$$

Le Laplacien d'un champ scalaire est défini, de manière intrinsèque, par

$$\Delta B = \text{div}\ \left(\underline{\text{grad}}\ B\right) \ . \tag{1.24}$$

Comme la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ne dépend pas de $\underline{x}$, on peut écrire

$$\Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial x_j \, \partial x_j} = B_{,jj} \ , \tag{1.25}$$

où l'utilisation de la convention d'Enstein nécessite de dupliquer la variable au dénominateur. L'opérateur rotationnel est défini par les relations

$$\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\ \underline{e}_i = \epsilon_{ijk}\, V_{k,j}\ \underline{e}_i\ , \tag{1.26}$$

où la convention d'Einstein et le pseudo-tenseur fondamental alterné sont utilisés.

2.2 Différentielle d'un champ de vecteurs

La différentielle en $\underline{x}$ d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ est la Jacobienne en $\underline{x}$ de l'application de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ qui à $\underline{x}$ associe $\underline{V}(\underline{x})$. Cette Jacobienne s'écrit

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = V_{i,j}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\ . \tag{1.27}$$

La valeur absolue du déterminant $|\det(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V})|$ de cette Jacobienne est le Jacobien et sa trace vérifie $\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}) = \mathrm{div}\ \underline{V}$.

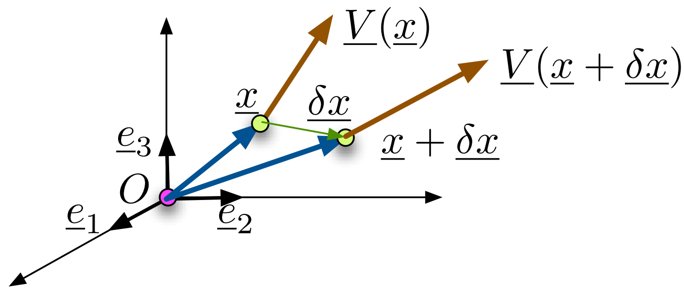

FIGURE **1**.4 – *Vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ et $\underline{V}(\underline{x}+\underline{\delta x})$ en deux points voisins $\underline{x}$ et $\underline{x}+\underline{\delta x}$.*

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut écrire

$$\begin{aligned} V_i(\underline{x}+\underline{\delta x}) &= V_i(\underline{x}) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\underline{x})\ \delta x_j + O\left(\delta x^2\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \underline{V}(\underline{x}+\underline{\delta x}) &= \underline{V}(\underline{x}) + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\delta x} + \underline{O}\left(\delta x^2\right) \end{aligned} \tag{1.28}$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ et $O\left(\delta x^2\right)$ est un terme d'ordre deux en δx. En considérant des variations infinitésimales, on peut écrire

$$d\underline{V} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{dx}\ . \tag{1.29}$$

On définit l'opérateur de dérivation “le long de $\underline{V}$” par la relation

$$\underline{V} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ = V_j\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ . \tag{1.30}$$

On vérifie que $(\underline{V} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ )\ B = \underline{V} \cdot (\underline{\mathrm{grad}}\ B)$ ce que l'on écrit $\underline{V} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ B$ sans se préoccuper du placement des parenthèses. Il en va de même pour la relation

$$\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{V} = (\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ )\underline{V} = (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}) \cdot \underline{U} = U_j\, \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\ \underline{e}_i = U_j\, V_{i,j}\ \underline{e}_i\ . \tag{1.31}$$

Étant donné un champ de tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, on définit sa divergence par la relation

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\,\underline{e}_i = A_{ij,j}\,\underline{e}_i\ . \tag{1.32}$$

Cette définition n'est valable que dans le cas où les composantes de $\underline{\underline{A}}$ sont exprimées dans une base indépendante du point $\underline{x}$. Dans le cas général des coordonnées curvilignes, pour lesquelles les tenseurs sont exprimées dans des bases variant avec $\underline{x}$, la définition intrinsèque de la divergence d'un tenseur est obtenue à l'aide du produit doublement contracté de sa différentielle avec l'identité. Mais par souci de simplicité, nous avons choisi de ne pas définir ici la différentielle d'un champ de tenseur d'ordre deux.

Le Laplacien d'un champ de vecteur est défini par la relation intrinsèque

$$\Delta\underline{V} = \underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{V})\ . \tag{1.33}$$

Lorsque la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ne dépend pas de $\underline{x}$, on peut écrire

$$\Delta\underline{V} = \Delta V_i\,\underline{e}_i = {}^t(\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)\ . \tag{1.34}$$

2.3 Théorème de dérivation

L'utilisation de la convention de sommation d'Einstein permet de retrouver facilement les règles usuelles de dérivation de produit comme par exemple

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{grad}}\,(B\,B') = B\,\underline{\mathrm{grad}}\,B' + B'\,\underline{\mathrm{grad}}\,B &= \left(B\,\frac{\partial B'}{\partial x_i} + B'\,\frac{\partial B}{\partial x_i}\right)\underline{e}_i \\ &= \left(B\,B'_{,i} + B'\,B_{,i}\right)\underline{e}_i\ . \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\tag{1.36}$$

Il en va de même pour les identités remarquables

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,(B\,\underline{V}) &= \underline{\mathrm{grad}}\,B\cdot\underline{V} + B\,\mathrm{div}\,\underline{V}\ , \\ \underline{\mathrm{div}}\,(\underline{U}\otimes\underline{V}) &= \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{U}\cdot\underline{V} + (\mathrm{div}\,\underline{V})\,\underline{U}\ , \\ \underline{\mathrm{rot}}\,(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{V}) &= \underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{V}) - \Delta\underline{V}\ , \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{1.37}$$

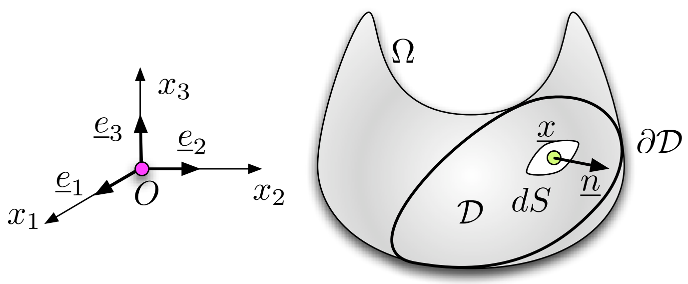

FIGURE 1.5 – *Sous-domaine $\mathcal{D}$ de Ω et sa frontière $\partial\mathcal{D}$.*

On considère un sous-domaine $\mathcal{D}$ d'un domaine Ω et on note $\partial\mathcal{D}$ sa frontière. Si dS est un petit élément de surface de cette frontière pris autour du point

$\underline{x}$, on note $\underline{n}$ sa normale dirigée vers l'extérieur. Étant donné un champ de vecteur $\underline{Q}(\underline{x})$, la formule de la divergence s'écrit

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{Q} \; d^3x \;\Leftrightarrow\; \iint_{\partial\mathcal{D}} Q_j \, n_j \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \; d^3x \; . \quad (\mathbf{1}.38)$$

Cette formule se généralise au cas des champs de tenseur d'ordre deux à travers la relation

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\operatorname{div}} \, \underline{\underline{\sigma}} \; d^3x \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} \, n_j \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \; d^3x \; . \quad (\mathbf{1}.39)$$

3 Coordonnées curvilignes

On indique ici l'expression des principaux opérateurs différentiels des champs de tenseurs en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Seule l'expression de la divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux est admise sans démonstration, les autres formules découlant des définitions des paragraphes précédents.

3.1 Coordonnées cartésiennes

On note $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ la base orthonormée du système de coordonnées cartésiennes et on écrit

$$\underline{x} = x \; \underline{e}_x + y \; \underline{e}_y + z \; \underline{e}_z \; . \quad (\mathbf{1}.40)$$

Un vecteur infinitésimal $\underline{dx}$ s'écrit alors

$$\underline{dx} = dx \; \underline{e}_x + dy \; \underline{e}_y + dz \; \underline{e}_z \; . \quad (\mathbf{1}.41)$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x} \, dx + \frac{\partial B}{\partial y} \, dy + \frac{\partial B}{\partial z} \, dz = B_{,x} \, dx + B_{,y} \, dy + B_{,z} \, dz \; . \quad (\mathbf{1}.42)$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\operatorname{grad}} \; B(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\operatorname{grad}} \; B(\underline{x}) = B_{,x} \, \underline{e}_x + B_{,y} \, \underline{e}_y + B_{,z} \, \underline{e}_z \quad (\mathbf{1}.43)$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_x \; \underline{e}_x + V_y \; \underline{e}_y + V_z \; \underline{e}_z \; . \quad (\mathbf{1}.44)$$

Une variation infinitésimale de $\underline{V}(\underline{x})$ s'écrit

$$d\underline{V} = dV_x \; \underline{e}_x + dV_y \; \underline{e}_y + dV_z \; \underline{e}_z \quad (\mathbf{1}.45)$$

La définition intrinsèque de $d\underline{V} = \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \; \underline{V}(\underline{x}) \; \underline{dx}$ du gradient de $\underline{V}$ permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions, la relation

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \; V \;\; = \;\; & V_{x,x} \; \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + V_{x,y} \; \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + V_{x,z} \; \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z \\ + \;\; & V_{y,x} \; \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + V_{y,y} \; \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + V_{y,z} \; \underline{e}_y \otimes \underline{e}_z \\ + \;\; & V_{z,x} \; \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x + V_{z,y} \; \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y + V_{z,z} \; \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \; , \end{aligned} \quad (\mathbf{1}.46)$$

ce que l'on résume par la relation matricielle

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{x,x} & V_{x,y} & V_{x,z} \\ V_{y,x} & V_{y,y} & V_{y,z} \\ V_{z,x} & V_{z,y} & V_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{1}.47)$$

Comme $\text{div}\,\underline{V} = \text{tr}\,(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{V})$, on obtient directement

$$\text{div}\,\underline{V} = V_{x,x} + V_{y,y} + V_{z,z}\ . \qquad (\mathbf{1}.48)$$

Comme $\Delta B = \text{div}\,(\underline{\text{grad}}\,B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{,xx} + B_{,yy} + B_{,zz}\ . \qquad (\mathbf{1}.49)$$

L'expression de $\Delta\underline{V} = \underline{\text{div}}\,(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{V})$ s'écrit

$$\Delta\underline{V} = \Delta V_x\,\underline{e}_x\ + \Delta V_y\,\underline{e}_y\ + \Delta V_z\,\underline{e}_z\ . \qquad (\mathbf{1}.50)$$

La divergence d'un champ de tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} &= (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z})\ \underline{e}_x \\ &+ (\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z})\ \underline{e}_y \\ &+ (\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z})\ \underline{e}_z\ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{1}.51)$$

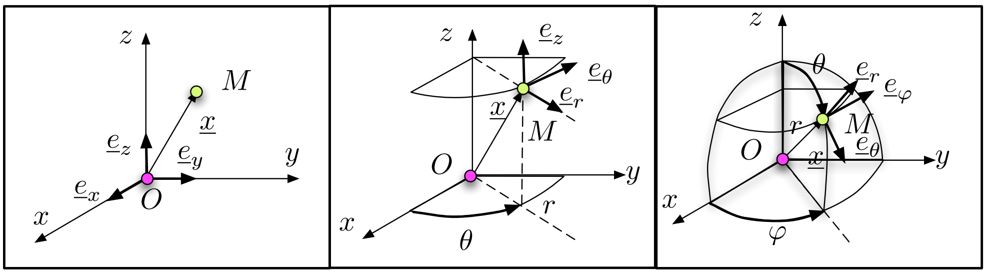

FIGURE **1**.6 – *Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*

3.2 Coordonnées cylindriques

Le système des coordonnées cylindriques est défini par les relations

$$\underline{x} = r\,\cos\theta\,\underline{e}_x + r\,\sin\theta\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z = r\,\underline{e}_r(\theta) + z\,\underline{e}_z\ . \qquad (\mathbf{1}.52)$$

On considère alors la base orthonormée $[\underline{e}_r(\theta), \underline{e}_\theta(\theta), \underline{e}_z]$ telle que

$$\underline{e}_r = \cos\theta\,\underline{e}_x + \sin\theta\,\underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{e}_\theta = \frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\theta} = \underline{e}_{r,\theta} = -\sin\theta\,\underline{e}_x + \cos\theta\,\underline{e}_y\ . \quad (\mathbf{1}.53)$$

Un vecteur infinitésimal $\underline{dx}$ s'écrit alors, en dérivant l'équation (**1**.52),

$$\underline{dx} = dx\ \underline{e}_x + dy\ \underline{e}_y + dz\ \underline{e}_z = dr\ \underline{e}_r + r\,d\theta\ \underline{e}_\theta + dz\ \underline{e}_z\ . \qquad (\mathbf{1}.54)$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial r}\,dr + \frac{\partial B}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial B}{\partial z}\,dz = B_{,r}\ dr + B_{,\theta}\ d\theta + B_{,z}\ dz\ . \qquad (\mathbf{1}.55)$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\text{grad}}\ B(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\text{grad}}\ B(\underline{x}) = B_{,r}\ \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta}\ \underline{e}_\theta + B_{,z}\ \underline{e}_z\ . \tag{1.56}$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_r\ \underline{e}_r + V_\theta\ \underline{e}_\theta + V_z\ \underline{e}_z\ . \tag{1.57}$$

En tenant compte de $d[\underline{e}_r(\theta)] = d\theta\ \underline{e}_\theta$ et $d[\underline{e}_\theta(\theta)] = -d\theta\ \underline{e}_r$, une variation infinitésimale de $\underline{V}(\underline{x})$ s'écrit

$$d\underline{V} = (dV_r - V_\theta\, d\theta)\ \underline{e}_r + (dV_\theta + V_r\, d\theta)\ \underline{e}_\theta + dV_z\ \underline{e}_z\ . \tag{1.58}$$

La définition intrinsèque de $d\underline{V} = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V}(\underline{x})\ \underline{dx}$ du gradient de $\underline{V}$ permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{grad}}}\ V \quad = \quad & V_{r,r}\ \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\left(V_{r,\theta} - V_\theta\right)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{r,z}\ \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z \\ & + V_{\theta,r}\ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\left(V_{\theta,\theta} + V_r\right)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{\theta,z}\ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z \\ & + V_{z,r}\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\, V_{z,\theta}\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{z,z}\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\ ,\end{aligned} \tag{1.59}$$

ce que l'on résume par la relation matricielle

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{r,r} & \frac{1}{r}\left(V_{r,\theta} - V_\theta\right) & V_{r,z} \\ V_{\theta,r} & \frac{1}{r}\left(V_{\theta,\theta} + V_r\right) & V_{\theta,z} \\ V_{z,r} & \frac{1}{r}\, V_{z,\theta} & V_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \\ dz \end{pmatrix}\ . \tag{1.60}$$

Comme div $\underline{V} = \text{tr}\ (\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V})$, on obtient directement

$$\text{div}\ \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r}\, V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}\, V_r + V_{z,z}\ . \tag{1.61}$$

Comme $\Delta B = \text{div}\ (\underline{\text{grad}}\ B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r}\, B_{,r} + \frac{1}{r^2}\, B_{,\theta\theta} + B_{,zz}\ . \tag{1.62}$$

Pour calculer l'expression de $\Delta\underline{V} = \underline{\text{div}}\,(\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V})$, il faut définir la divergence d'un champ de tenseur de manière intrisèque à partir de la différentielle du champ de tenseur $\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V}(\underline{x})$ qui est un tenseur d'ordre trois. Sans entrer dans ces considérations, nous admettrons ici l'expression

$$\Delta\underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2\, V_{\theta,\theta}}{r^2} - \frac{V_r}{r^2}\right)\ \underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2\, V_{r,\theta}}{r^2} - \frac{V_\theta}{r^2}\right)\ \underline{e}_\theta + \Delta V_z\ \underline{e}_z\ . \tag{1.63}$$

On voit que les composantes de $\Delta\underline{V}$ ne sont pas les Laplaciens des composantes de $\underline{V}$ comme c'est le cas pour les coordonnées cartésiennes. On admettra de même que la divergence d'un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} \quad = \quad & \left(\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}\right)\ \underline{e}_r \\ & + \left(\sigma_{\theta r,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{2\,\sigma_{r\theta}}{r}\right)\ \underline{e}_\theta \\ & + \left(\sigma_{zr,r} + \frac{\sigma_{z\theta,\theta}}{r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{zr}}{r}\right)\ \underline{e}_z\ .\end{aligned} \tag{1.64}$$

3.3 Coordonnées sphériques

Le système des coordonnées sphériques est défini par les relations

$$\underline{x} = r \,\sin\theta \,(\cos\varphi \,\underline{e}_x + \sin\varphi \,\underline{e}_y) + r \,\cos\theta \,\underline{e}_z \,. \tag{1.65}$$

On considère alors la base orthonormée $[\underline{e}_r(\varphi,\theta), \underline{e}_\theta(\varphi,\theta), \underline{e}_\varphi(\varphi,\theta)]$ telle que

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r &= \sin\theta \,(\cos\varphi \,\underline{e}_x + \sin\varphi \,\underline{e}_y) + \cos\theta \,\underline{e}_z \\
\underline{e}_\theta &= \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial\theta} = \cos\theta(\cos\varphi \,\underline{e}_x + \sin\varphi \,\underline{e}_y) - \sin\theta \,\underline{e}_z \\
\underline{e}_\varphi &= \frac{1}{\sin\theta} \,\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi \,\underline{e}_x + \cos\varphi \,\underline{e}_y
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Un vecteur infinitésimal $\underline{dx}$ s'écrit alors

$$\underline{dx} = dr \,\underline{e}_r + r \,d\theta \,\underline{e}_\theta + r \,\sin\theta \,d\varphi \,. \tag{1.67}$$

Une variation infinitésimale du champ scalaire $B(\underline{x})$ s'écrit

$$dB = \frac{\partial B}{\partial r} \,dr + \frac{\partial B}{\partial \theta} \,d\theta + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \,d\varphi = B_{,r} \,dr + B_{,\theta} \,d\theta + B_{,\varphi} \,d\varphi \,. \tag{1.68}$$

La définition intrinsèque $dB = \underline{\mathrm{grad}} \;B(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$ du gradient de $B(\underline{x})$ permet d'écrire

$$\underline{\mathrm{grad}} \;B(\underline{x}) = B_{,r} \,\underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta} \,\underline{e}_\theta + \frac{1}{r \,\sin\theta} B_{,\varphi} \,\underline{e}_\varphi \,. \tag{1.69}$$

On considère maintenant un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ défini par

$$\underline{V} = V_r \,\underline{e}_r + V_\theta \,\underline{e}_\theta + V_\varphi \,\underline{e}_\varphi \,. \tag{1.70}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned}
d[\underline{e}_r(\varphi,\theta)] &= d\theta \,\underline{e}_\theta + \sin\theta \,d\varphi \,\underline{e}_\varphi \,, \\
d[\underline{e}_\theta(\varphi,\theta)] &= -d\theta \,\underline{e}_r - \cos\theta \,d\varphi \,\underline{e}_\varphi \,, \\
d\underline{e}_\varphi(\varphi,\theta)] &= -\sin\theta \,d\varphi \,\underline{e}_r - \cos\theta \,d\varphi \,\underline{e}_\theta \,,
\end{aligned} \tag{1.71}$$

on peut écrire

$$d\underline{V} = \begin{pmatrix} V_{r,r} & \frac{1}{r}\,(V_{r,\theta} - V_\theta) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta} V_{r,\varphi} - V_\theta\right) \\ V_{\theta,r} & \frac{1}{r}\,(V_{\theta,\theta} + V_r) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta} V_{\theta,\varphi} - V_\varphi \,\mathrm{cotg}\,\theta\right) \\ V_{\varphi,r} & \frac{1}{r}\,V_{\varphi,\theta} & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta} V_{\varphi,\varphi} + V_\theta \,\mathrm{cotg}\,\theta + V_r\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\,\sin\theta\,d\varphi \end{pmatrix} . \tag{1.72}$$

Comme div $\underline{V} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;\underline{V})$, on obtient directement

$$\mathrm{div}\;\underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r}\,V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}\,V_r + \frac{1}{r\,\sin\theta} V_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{r} V_\theta \,\mathrm{cotg}\,\theta + \frac{1}{r} V_r \,. \tag{1.73}$$

Comme $\Delta B = \mathrm{div}\;(\underline{\mathrm{grad}}\;B)$, on obtient alors

$$\Delta B = B_{,rr} + \frac{2}{r}\,B_{,r} + \frac{1}{r^2}\,B_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2}\,\mathrm{cotg}\,\theta\,B_{,\theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta} B_{,\varphi\varphi} \,. \tag{1.74}$$

Pour calculer l'expression de $\Delta \underline{V} = \underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V})$, il faut définir la divergence d'un champ de tenseur de manière intrisèque à partir de la différentielle du champ de tenseur $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}(\underline{x})$ qui est un tenseur d'ordre trois. Sans entrer dans ces considérations, nous admettrons ici l'expression

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{V} \quad &= \quad \left[\Delta V_r - \frac{2}{r^2}\left(V_r + V_{\theta,\theta} + V_\theta \operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\, V_{\varphi,\varphi}\right)\right]\ \underline{e}_r \\
&+ \quad \left[\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2}\left(V_{r,\theta} - \frac{V_\theta}{2\,\sin^2\theta} - \frac{\operatorname{cotg}\theta}{\sin\theta}\, V_{\varphi,\varphi}\right)\right]\ \underline{e}_\theta \\
&+ \quad \left[\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2\,\sin^2\theta}\left(V_{r,\varphi} + \operatorname{cotg}\theta\, V_{\theta,\varphi} - \frac{V_\varphi}{2\,\sin\theta}\right)\right]\ \underline{e}_\varphi \qquad (\mathbf{1}.75)
\end{aligned}$$

On voit que les composantes de $\Delta \underline{V}$ ne sont pas les Laplaciens des composantes de $\underline{V}$ comme c'est le cas pour les coordonnées cartésiennes. On admettra de même que la divergence d'un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \quad &= \quad \left[\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{r\,\sin\theta} + \frac{1}{r}\,(2\,\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\,\operatorname{cotg}\theta)\right]\ \underline{e}_r \\
&+ \quad \left[\sigma_{\theta r,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{r\,\sin\theta} + \frac{1}{r}\,(\sigma_{\theta\theta}\operatorname{cotg}\theta - \sigma_{\varphi\varphi}\operatorname{cotg}\theta + 3\,\sigma_{r\theta})\right]\ \underline{e}_\theta \\
&+ \quad \left[\sigma_{\varphi r,r} + \frac{\sigma_{\varphi\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{r\,\sin\theta} + \frac{1}{r}\,(3\,\sigma_{r\varphi} + 2\,\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{cotg}\theta)\right]\ \underline{e}_\varphi\ . \qquad (\mathbf{1}.76)
\end{aligned}$$