

Olivier Thual

---

**Banque publique d'exercices**  
pour le cours de  
**mécanique des milieux continus**

**Évaluation Par Contrat de Confiance**

**INP Toulouse - ENSEEIHT**

Département "Hydraulique - Mécanique des Fluides"

Année 2018-2018, version du 9 septembre 2018



# Table des matières

<b>PARTIELS</b>	<b>5</b>
<u>P.1</u> Parallélépipède rectangle . . . . .	5
<u>P.2</u> Tenseur des contraintes . . . . .	6
<u>P.3</u> Contraintes de cisaillement . . . . .	7
<u>P.4</u> Cisaillement triple . . . . .	7
<u>P.5</u> Cube (partie 1) . . . . .	8
<u>P.6</u> Équilibre thermique d'un cylindre . . . . .	10
<b>EXAMENS</b>	<b>13</b>
<u>E.1</u> Étirement d'un cylindre . . . . .	13
<u>E.2</u> Cube (partie 2) . . . . .	14
<u>E.3</u> Torsion d'un arbre métallique . . . . .	15
<u>E.4</u> Solide élastique sur un plan incliné . . . . .	17
<u>E.5</u> Solide élastique encastré et comprimé . . . . .	19
<u>E.6</u> Comportement thermoélastique d'un cylindre . . . . .	20
<u>E.7</u> Mouvement 2D . . . . .	22
<u>E.8</u> Mouvement de déformation affine . . . . .	23
<u>E.9</u> Tourbillon dans une boîte . . . . .	28
<u>E.10</u> Relation de saut et conservation de la masse . . . . .	32
<u>E.11</u> Écoulements de Poiseuille - Couette . . . . .	33
<u>E.12</u> Rotation d'axe vertical . . . . .	35
<u>E.13</u> Écoulements cisailés instationnaires . . . . .	38
<u>E.14</u> Perte de charge . . . . .	41

<b>E.15</b> Mouvement gravitaire sur un plan incliné . . . . .	44
<b>E.16</b> Relation de Gibbs . . . . .	46

## Préambule

Le présent recueil est une banque publique d'exercices associée au photocopie du cours [1-2]. Les exercices de la partie "PARTIELS" portent sur les chapitres 1 à 4 tandis que les exercices de la partie "EXAMENS" portent sur les huit chapitres. Au moins la moitié du sujet de partiel et du sujet d'examen sera constituée d'un ou plusieurs exercices issus de cette banque publique, dans le cadre d'un programme d' "Évaluation Par Contrat de Confiance" [3-4].

## Références

- [1] O. Thual, Mécanique des milieux continus, photocopie de l'ENSEEIH, 2017-2018.
- [2] O. Thual, Mécanique des Milieux Continus, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT 1018* (2012) 48h, <http://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018>  
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018>
- [3] A. Antibi, L'évaluation par contrat de confiance, pour en finir avec la constante macabre, Actes du colloque du Sénat, Actes XVII, Nathan 2006.
- [4] A. Antibi, Pour en finir avec la constante macabre, ou la fin du cauchemar, Nathan Math'adore 2007.

# Évaluation par Contrat de Confiance

<http://mclcm.free.fr>



Illustration de Stéphane Luciani

# PARTIELS

---

---

## P.1 Parallélépipède rectangle

On considère un matériau ayant, en l'absence de contraintes, la forme du parallélépipède rectangle  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a_i \leq l_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$  où  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont les longueurs de ses arêtes. Sa masse volumique  $\rho_0$  est homogène dans cette configuration de référence. On suppose que la loi rhéologique du matériau est régie par la loi de Hooke avec les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

### Grande déformation

Étant donnée la constante  $0 < \alpha$ , on considère la grande déformation

$$\underline{X}(\underline{a}) = (a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) \underline{e}_1 + (a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha) \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 .$$

- 1) Calculer le tenseur des dilatations  $\underline{C}(\underline{a})$  associé à cette déformation.
- 2) En déduire les dilatations relatives  $\Lambda_i$  et les angles de glissements  $\gamma_{ij}$  pour les directions de la base canonique.
- 3) Dessiner l'image  $\Omega = \underline{X}(\Omega_0)$  par la déformation.
- 4) On considère la représentation eulérienne  $B^{(E)}(\underline{x}) = \beta (x_1^2 + x_2^2)$  du champ  $B$ . Exprimer sa représentation lagrangienne  $B^{(L)}(\underline{a})$  et dessiner les isolignes de  $B$  dans le plan  $(a_1, a_2)$ .
- 5) On considère la champ de vecteur  $\underline{V}(\underline{a}) = \beta a_1 a_2 (a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ . Calculer

$$F = \iint_{\partial\Omega_0} \underline{V}(\underline{a}) \cdot \underline{n} dS_0$$

où  $\underline{n}$  est la normale sortante du domaine.

### Petite rotation

Étant donnée la constante  $0 < \alpha \ll 1$  petite devant 1, on considère le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a}) = -\alpha a_2 \underline{e}_1 + \alpha a_1 \underline{e}_2$ .

- 6) Calculer le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}(\underline{a})$ .
- 7) En déduire les allongements relatifs  $\Delta_i$  et les angles de glissements  $\gamma_{ij}$  pour les directions de la base canonique.

- 8) En notant  $\underline{H}(\underline{a})$  la Jacobienne du champ de déplacement au point  $\underline{a}$ , montrer que l'on peut écrire  $\underline{H}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a} = \underline{h}(\underline{a}) \wedge \underline{\delta a}$  pour tout vecteur  $\underline{\delta a}$  où  $\underline{h}(\underline{a})$  est un vecteur dont on explicitera les composantes.

### Petite déformation de cisaillement

Étant donné la constante  $0 < \alpha \ll 1$  petite devant 1, on considère le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a}) = 2\alpha a_1 \underline{e}_2$ .

- 9) Calculer le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}(\underline{a})$ .  
 10) En déduire les allongements relatifs  $\Delta_i$  et les angles de glissements  $\gamma_{ij}$  pour les directions de la base canonique.  
 11) Même question pour le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha(a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ . Comparer ce résultat avec celui des questions précédentes et commenter.

### Corrigé Parallélépipède rectangle

#### Grande déformation

1) On a  $F_{11} = F_{22} = \cos \alpha$ ,  $F_{12} = -F_{21} = \sin \alpha$ ,  $F_{33} = 1$  et  $F_{ij} = 0$  sinon. On calcule  $\underline{C} = {}^t \underline{F} \cdot \underline{F} = \underline{I}$ . La matrice  $\underline{F}$  est orthogonale. C'est la rotation d'angle  $\alpha$  et d'axe  $\underline{e}_3$ . 2) On a  $\Lambda_i = 1$  et  $\gamma_{ij} = 0$ . La rotation laisse invariante les longueurs et les angles. 3) L'image  $\Omega$  est la rotation de  $\Omega_0$ . 4) En remplaçant  $x_1 = a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha$  et  $x_2 = a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha$ , on obtient  $B^{(L)}(\underline{a}) = \beta(a_1^2 + a_2^2)$ . Les isolignes de  $B$  sont donc des cercles concentriques. 5) Comme  $\text{div } \underline{V} = \beta(a_1^2 + a_2^2)$ , le théorème de la divergence entraîne que  $F = \beta \iiint_{\Omega_0} (a_1^2 + a_2^2) d^3 a = \frac{1}{3} \beta l_1 l_2 l_3 (l_1^2 + l_2^2)$ .

#### Petite rotation

6) On a  $\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \underline{0}$ . 7) Les longueurs et les angles sont conservés. 8) On a  $\underline{h} = \alpha \underline{e}_3$ .

#### Petite déformation de cisaillement

9) On a  $\underline{\epsilon} = \alpha(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ . 10) Les allongements relatifs dans les directions de la base canonique sont nuls. L'angle de glissement des directions 1 et 2 est  $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = 2\alpha$ . Les angles de glissement des autres couples de directions sont nuls. 11) On obtient les mêmes résultats pour ce champ de déplacement. Les deux champs de déplacement diffèrent de la petite rotation  $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha(-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$  étudiée précédemment.

## P.2 Tenseur des contraintes

En un point  $\underline{a}$  donné d'un milieu continu, on mesure les forces de contact  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$  exercées sur un élément de surface de normale  $\underline{n}$ . On suppose que  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  est un repère orthonormé et que l'on a obtenu les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) &= \sigma_0(-\underline{e}_1 + \gamma \underline{e}_3) \\ \underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 &= -\sigma_0 \\ \underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_3) \wedge \underline{e}_1 &= -\sigma_0 \underline{e}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

- 1) Quelle est la dimension de  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$  (unités SI).
- 2) Donner les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a})$ .
- 3) Calculer les valeurs propres de  $\underline{\sigma}(\underline{a})$
- 4) Calculer ses directions propres.

**Corrigé**    **Tenseur des contraintes**

**1)** La force de contact  $\underline{T}$  est en Newton par  $m^2$ , c'est-à-dire en Pascal. **2)** On trouve que  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\sigma_0$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \gamma \sigma_0$  et  $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ . **3)** L'ensemble des valeurs propres est  $\{-\sigma_0, (-1 + \gamma)\sigma_0, (-1 - \gamma)\sigma_0\}$  **4)** L'ensemble des vecteurs propres normés correspondant est  $\{\underline{e}_2, \underline{e}^{(+)}, \underline{e}^{(-)}\}$  avec  $\underline{e}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$  et  $\underline{e}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_3)$ .

**P.3**    **Contraintes de cisaillement**

On considère la densité surfacique  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$  des forces extérieures de contacts exercées sur une petite surface de normale  $\underline{n}$  par le milieu continu situé du côté vers lequel pointe  $\underline{n}$ . On suppose que l'on a les relations suivantes :

$$\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}^+) = \sigma^+ \underline{n}^+ \quad , \quad \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}^-) = \sigma^- \underline{n}^- \quad \text{et} \quad \underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \underline{0} \quad (2)$$

avec  $\underline{n}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$  et  $\underline{n}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$  et où  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  sont des constantes.

- 1) Exprimer le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a})$  dans le cas  $\sigma^+ = \sigma_0$  et  $\sigma^- = -\sigma_0$ .
- 2) Dessiner dans ce cas les forces surfaciques exercées sur les faces d'un petit cube de centre  $\underline{a}$  et dont les côtés sont parallèles aux directions de la base canonique. Interpréter ce système de contraintes.
- 3) Re-itérer cette question dans le cas où  $\sigma^+ = 4 \sigma_0$  et  $\sigma^- = -2 \sigma_0$ .

**Corrigé**    **Contraintes de cisaillement**

**1)** On a  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-)$  et  $\sigma_{ij} = 0$  sinon. Dans le cas  $\sigma^+ = \sigma_0$  et  $\sigma^- = -\sigma_0$ , on a  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$  et  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_0$ . **2)** Les forces surfaciques sont parallèles aux côtés du cube. Elles exercent un cisaillement. En effet,  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \underline{e}_3$  et  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \underline{e}_1$  **3)** Dans le cas  $\sigma^+ = 4 \sigma_0$  et  $\sigma^- = -2 \sigma_0$ , on a  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_0$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 3 \sigma_0$ . Les contraintes exercées sur les faces de normales  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_3$  sont respectivement  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \sigma_0(\underline{e}_1 + 3 \underline{e}_3)$  et  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \sigma_0(3 \underline{e}_1 + \underline{e}_3)$ .

**P.4**    **Cisaillement triple**

On considère un petit cube de centre  $\underline{a}$  dans un milieu continu soumis à des contraintes. On effectue trois expériences (a), (b) et (c) respectivement caractérisées par les forces de contacts suivantes,  $\sigma_0$  étant une constante :

(a)	$\underline{T}^{(a)}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \underline{0}$	$\underline{T}^{(a)}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \sigma_0 \underline{e}_3$	$\underline{T}^{(a)}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \sigma_0 \underline{e}_2$
(b)	$\underline{T}^{(b)}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \sigma_0 \underline{e}_3$	$\underline{T}^{(b)}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \underline{0}$	$\underline{T}^{(b)}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \sigma_0 \underline{e}_1$
(c)	$\underline{T}^{(c)}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \sigma_0 \underline{e}_2$	$\underline{T}^{(c)}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \sigma_0 \underline{e}_1$	$\underline{T}^{(c)}(\underline{a}, \underline{e}_3) = \underline{0}$

- 1) Exprimer les trois tenseurs des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{(a)}(\underline{a})$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{(b)}(\underline{a})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{(c)}(\underline{a})$  correspondant aux trois expériences.
- 2) On effectue les trois expériences simultanément en superposant les trois systèmes de forces. Exprimer le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$  correspondant à cette nouvelle expérience.
- 3) Calculer les forces de contact exercées sur une petite surface normale à  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$  pour cette nouvelle expérience.
- 4) Calculer les forces de contact exercées sur une petite surface de normale  $\underline{n}$  si  $\underline{n}$  est normal à  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$ .

### Corrigé Cisaillement triple

1) On a  $\underline{\underline{\sigma}}^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . 2) On a  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(a)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(b)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$ . 3) Pour  $\underline{m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{m}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) \underline{m} = 2\sigma_0 \underline{m}$ . C'est un vecteur propre de  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$ . 4) Les valeurs propres  $s$  de  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$  sont les racines du polynôme  $s^3 - 3s\sigma_0^2 - 2\sigma_0^3 = (s + \sigma_0)^2(s - 2\sigma_0)$ . On retrouve la valeur propre  $2\sigma_0$  associée à la direction  $\underline{m}$ . Comme  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$  est symétrique, le plan perpendiculaire à  $\underline{m}$  est un espace propre, donc associée à la racine double  $s = -\sigma_0$ . Si  $\underline{n}$  est dans ce plan, on a  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = -\sigma_0 \underline{n}$ .

## P.5 Cube (partie 1)

On considère le cube  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : |a_i| < l/2, i = 1, 2, 3\}$  de volume  $V_0 = l^3$ . Sa masse volumique  $\rho_0$  est homogène dans la configuration de référence.

### Intégrales doubles sur la frontière d'un cube

Étant donnée une constante  $\alpha$ , on considère le champ de tenseur d'ordre deux

$$\underline{\underline{A}}(\underline{a}) = a_1 a_2 [a_1 \underline{e}_1 \otimes (2a_1 \underline{e}_1 - 3a_2 \underline{e}_2) + \alpha a_2 \underline{e}_2 \otimes (2a_2 \underline{e}_2 - 3a_1 \underline{e}_1)] .$$

- 1) Calculer  $\underline{\text{div}} \underline{\underline{A}}(\underline{a})$ .
- 2) Calculer  $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} dS_0$  où  $\underline{n}$  est la normale sortante à la frontière  $\partial\Omega_0$  de  $\Omega_0$ .
- 3) Trouver une valeur de  $\alpha$  qui annule la fonction  $f(\alpha) = \left\| \iint_{\partial\Omega_0} \underline{a} \wedge \underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} dS_0 \right\|$ .

### Petite déformation d'un cube

On considère le champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = k_1 a_1 \underline{e}_1 + (k_0 a_3 + k_2 a_2) \underline{e}_2 + (k_0 a_2 + k_3 a_3) \underline{e}_3$$

où les  $|k_i|$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  sont bornés par un paramètre  $\eta \ll 1$ .

- 4) Calculer la jacobienne  $\underline{H}(\underline{a})$  de ce champ de déplacement. En déduire que l'on est dans le cadre des petites déformations.

- 5) Exprimer le tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . En déduire les allongements relatifs  $\Delta_i$  dans les directions  $\underline{e}_i$  ainsi que les angles de glissement  $\gamma_{ij}$  des couples de directions orthogonales  $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ .
- 6) Exprimer le Jacobien  $J(\underline{a})$  de la déformation  $\underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \xi(\underline{a})$  puis calculer son développement limité à l'ordre 1 en  $\eta$ . Comparer avec  $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$ .
- 7) Exprimer, à l'ordre dominant, la représentation eulérienne  $\rho^{(E)}(\underline{x}) - \rho_0$  de la variation de masse volumique après déformation, sous l'hypothèse  $\eta \ll 1$ .

### Cube sous contraintes

On suppose que le tenseur des contraintes dans le cube  $\Omega_0$  s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) = \sigma_0 [\underline{e}_2 \otimes (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2] .$$

- 8) Calculer les forces de contact  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2)$  exercées par l'extérieur du cube sur la face de normale  $\underline{e}_2$ .
- 9) Représenter, sur un schéma représentant le cube, les forces de contact exercées sur chacune des autres faces.
- 10) Déterminer le repère orthonormé  $(\underline{n}_0, \underline{n}_+, \underline{n}_-)$  dans lequel  $\underline{\underline{\sigma}}$  est diagonal. Représenter, sur un schéma, les forces de contact exercées sur des surfaces orthogonales aux directions de ce repère.

### Corrigé Cube (partie 1)

#### Intégrales doubles sur la frontière d'un cube

1) On a  $\text{div } \underline{\underline{A}} = \underline{0}$ . 2) En appliquant le théorème de la divergence, on obtient  $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} \, dS_0 = \iiint_{\Omega_0} \text{div } \underline{\underline{A}} \, d^3a = \underline{0}$ . 3) Comme on a démontré dans le cours que  $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{a} \wedge \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} \, dS_0 = \iiint_{\Omega_0} \underline{a} \wedge \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) \, d^3a$  lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$  est symétrique, on a  $f(1) = 0$ . En effet,  $\underline{\underline{A}}$  est symétrique pour  $\alpha = 1$  et  $\text{div } \underline{\underline{A}} = \underline{0}$ .

#### Petite déformation d'un cube

4) On a  $\underline{\underline{H}} = k_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + k_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + k_0 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ . Comme toutes les composantes de  $\underline{\underline{H}}$  sont petites, on est dans le cadre des petites déformations. 5) Comme  $\underline{\underline{H}}$  est symétrique, on a  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{H}}$ . On a donc  $\Delta_i = k_i$ ,  $\gamma_{23} = 2k_0$  et  $\gamma_{ij} = 0$  sinon. 6) Comme  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}}$ , on a  $J(\underline{a}) = |\det \underline{\underline{F}}| = (1+k_1)[(1+k_2)(1+k_3) - k_0^2] = 1 + (k_1 + k_2 + k_3) + O(\eta^2)$ . On a bien  $J(\underline{a}) = 1 + \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} + O(\eta^2)$ . 7) la conservation de la masse  $\rho J(\underline{a}) = \rho_0$  entraîne  $\rho = [1 - \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} + O(\eta^2)] \rho_0$ . On a donc  $\rho - \rho_0 = -(k_1 + k_2 + k_3) \rho_0$  à l'ordre 1 en  $\eta$ . On a  $\rho^{(E)} = \rho^{(L)} = \rho$  parcequ'on est dans le cadre des petites déformations et, plus simplement, parce que ce champ est constant.

#### Cube sous contraintes

8) On a  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2 = \sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ . 9) Les forces de contact  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  exercées sur les faces du cube sont représentées sur la figure 1a. On a  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \underline{T}(\underline{a}, -\underline{e}_1) = \underline{0}$ . 10) Les valeurs propres de  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont  $s_0 = 0$ ,  $s_+ = \sigma_0 (1 + \sqrt{5})/2 \sim 1.61 \sigma_0$  et  $s_- = \sigma_0 (1 - \sqrt{5})/2 \sim -0.61 \sigma_0$ . Les vecteurs propres associés sont respectivement  $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ ,

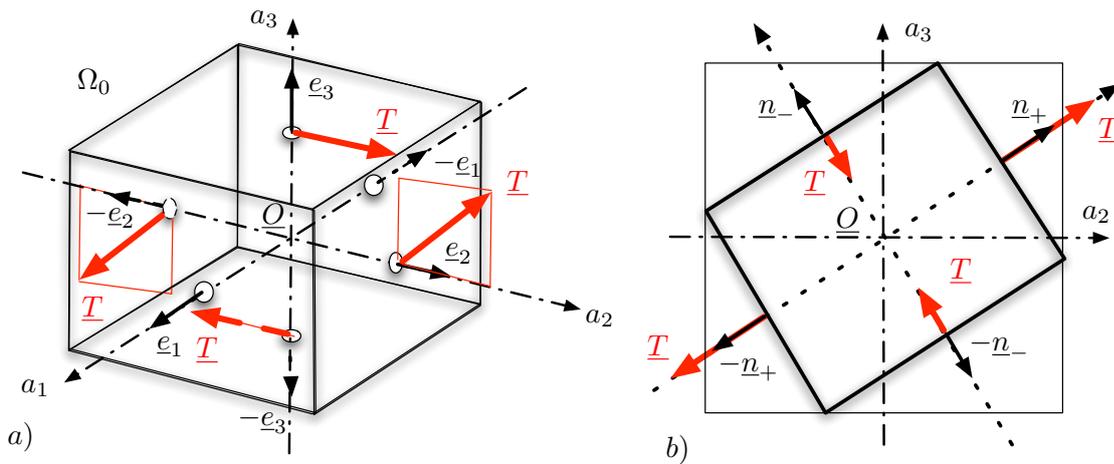


FIGURE 1 – a) Forces de surface exercées sur les faces du cube. b) Directions principales et diagonalisation de  $\underline{\sigma}$ .

$\underline{n}_+ = (1 + s_+^2)^{-1/2}(s_+ \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$  et  $\underline{n}_- = (1 + s_-^2)^{-1/2}(s_- \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ . Les forces de contact  $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{n}_+) = \pm s_+ \underline{n}_+$  et  $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{n}_-) = \pm s_- \underline{n}_-$  sont représentées sur la figure 1b, les forces  $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_1) = \underline{0}$  étant nulles.

## P.6 Équilibre thermique d'un cylindre

On note  $(\underline{0}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  le repère orthonormé canonique et  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point  $\underline{x}$ . On considère une pastille d'oxyde d'uranium dont la forme  $\Omega$  est le cylindre d'axe  $Oz$ , de longueur  $2l$  et dont la section est un cercle de rayon  $b$ . On choisit l'origine des axes au centre du cylindre (voir figure). On note  $S_-$  et  $S_+$  les disques de rayon  $b$  et de cotes respectives  $z = \pm l$  et  $S_l$  la face  $\partial\Omega - (S_- \cup S_+)$ .

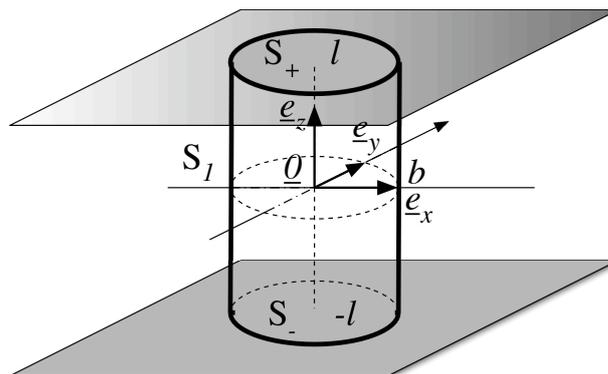


FIGURE 2 – Cylindre en équilibre thermique.

Les faces  $S_-$  et  $S_+$  de la pastille sont en contact avec un matériau conducteur de chaleur et le dispositif est placé dans un réacteur nucléaire, ce qui provoque l'échauffement de la pastille avec un taux de production volumique de chaleur  $r(\underline{x})$ . On suppose que l'équilibre est atteint et que le champ de température dans la pastille s'écrit  $T(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{A}{2}z^2$

où  $T_0$ ,  $\tau_0$  et  $A$  sont des constantes. On note  $k$  le coefficient de diffusivité thermique de la pièce supposée obéir à la loi de Fourier.

- 1) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face  $S_+$ .
- 2) Comparer ce flux avec celui qui sort de la face  $S_-$ .
- 3) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face  $S_1$ .
- 4) Écrire l'équation de bilan de l'énergie interne dans la pastille.
- 5) En déduire le taux de production volumique de chaleur  $r(\underline{x})$ .
- 6) Calculer la puissance fournie à la pastille par la réaction nucléaire.
- 7) Comparer avec le flux de chaleur sortant à travers  $\partial\Omega$ .

### Corrigé Équilibre thermique d'un cylindre

**1)** Le vecteur flux de chaleur est  $\underline{Q} = -k \text{grad } T = k A z \underline{e}_z$ . Il sort de  $S_+$  le flux de chaleur  $\mathcal{Q}_+ = \iint_{S_+} \underline{Q} \cdot \underline{e}_z dS = \pi b^2 l k A$ . **2)** Il sort de  $S_-$  le même flux de chaleur  $\mathcal{Q}_+ = \mathcal{Q}_-$ . **3)** Il sort de  $S_1$  le flux nul  $\mathcal{Q}_1 = 0$ , car  $\underline{Q} \cdot \underline{e}_r = 0$  pour toute normale horizontale  $\underline{e}_r$ . **4)** Le bilan d'énergie interne s'écrit  $0 = r - \text{div } \underline{Q} = r + k \Delta T = r - k A$ . **5)** On a donc  $r = k A$  qui est constant. **6)** La réaction nucléaire fournit la puissance  $\mathcal{P} = \iiint_{\Omega} r d^3x = 2\pi b^2 l r = \pi b^2 l k A$ . **7)** On vérifie que l'on a bien  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_+ + \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_1$ . La puissance thermique  $\mathcal{P}_{\text{the}}(\Omega) = \iiint_{\Omega} r d^3x - \iint_{\partial\Omega} \underline{Q} \cdot \underline{n} dS = 0$  est bien nulle car on est à l'équilibre.



# EXAMENS

---

---

## E.1 Étirement d'un cylindre

On considère un solide élastique homogène de masse volumique  $\rho_0$  dont la configuration de référence est le cylindre  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a_3 \leq L_3 \text{ et } a_1^2 + a_2^2 \leq R^2\}$  où  $L_3$  et  $R$  sont des longueurs. On suppose que ses déformations sont petites et que le système est à l'équilibre (pas de mouvement). On confond alors la configuration déformée  $\Omega$  avec la configuration de référence. On note  $E$  le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. On impose les forces de contact  $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = (F a_1/R) \underline{e}_1$  sur la surface  $\Sigma_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a_3 \leq L_3 \text{ et } a_1^2 + a_2^2 = R^2\}$  où  $\underline{n}$  est la normale sortante à  $\Sigma_0$  et  $F$  une constante. Les deux faces perpendiculaires à l'axe du cylindre sont libres de contraintes.

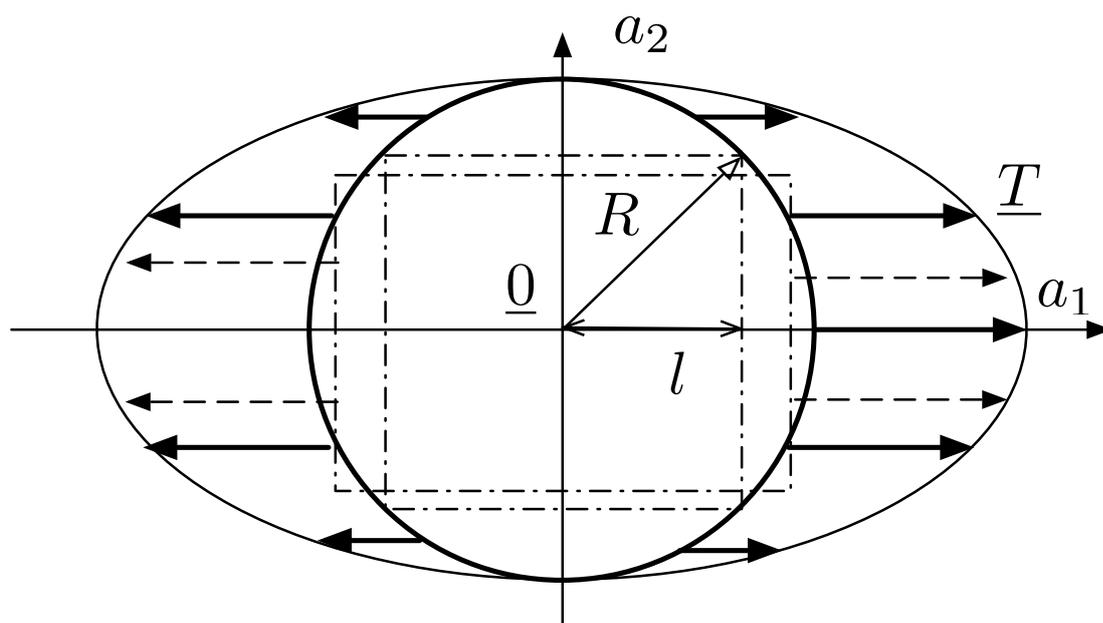
- 1) Dessiner, dans un plan  $(\underline{0}, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , les forces de contact appliquées à la section de  $\Sigma_0$  par un plan normal à  $\underline{e}_3$ .
- 2) On suppose que le tenseur des contraintes est de la forme  $\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$  où les  $\sigma_i$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont des constantes. Donner l'expression de ces constantes en fonction de  $F$  et  $R$ .
- 3) En déduire l'expression du tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}(\underline{a})$  en fonction de  $F$ ,  $\nu$  et  $E$ .
- 4) On considère  $\mathcal{D}_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a_3 \leq L_3, |a_1| \leq R/\sqrt{2} \text{ et } |a_2| \leq R/\sqrt{2}\}$ , le parallélépipède rectangle inscrit dans  $\Omega_0$ . Dessiner dans un plan  $(\underline{0}, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , les sections de  $\mathcal{D}_0$  et  $\Omega_0$  et représenter graphiquement les forces de contact sur la frontière de  $\mathcal{D}_0$ .
- 5) Dessiner les configurations déformées  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}_0$  et  $\Omega$  de  $\Omega_0$  en exagérant l'amplitude des déplacements.

## Corrigé Étirement d'un cylindre

**1)** Les forces de contact sur la surface  $\Sigma_0$  sont représentées sur la figure 3. **2)** Les normales à  $\Sigma_0$  sont  $\underline{n} = (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2)/R$ . On a donc, sur cette surface,  $\underline{\sigma} \underline{n} = \sigma_1 (a_1/R) \underline{e}_1 + \sigma_2 (a_2/R) \underline{e}_2 = F (a_1/R) \underline{e}_1$ . On en déduit  $\sigma_1 = F$  et  $\sigma_2 = 0$ . Comme  $\underline{\sigma} \underline{e}_3 = \sigma_3 \underline{e}_3 = \underline{0}$  pour les autres faces, on a donc  $\sigma_3 = 0$ . **3)** Le tenseur des petites déformation est donc  $\underline{\epsilon} = (F/E)[\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)]$ . **4)** Les forces de contact valent  $\underline{T} = \pm F \underline{e}_1$  sur les faces de normales  $\pm \underline{e}_1$  et  $\underline{T} = \underline{0}$  sur les autres faces, comme représenté sur la figure 3. **5)** Le champ de déplacement est  $\underline{\xi} = (F/E)[a_1 \underline{e}_1 - \nu(a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3)]$  à une petite rotation près. L'étirement uniaxial de  $\mathcal{D}_0$  est représenté sur la figure 3.

---

---

FIGURE 3 – Forces de contact à la frontière  $\Sigma_0$  du cylindre.

## E.2 Cube (partie 2)

On considère le cube  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : |a_i| < l/2, i = 1, 2, 3\}$  de volume  $V_0 = l^3$ . Sa masse volumique  $\rho_0$  est homogène dans la configuration de référence.

### Loi de Hooke

On néglige les forces extérieures de volumes  $\underline{f}(\underline{a}) = 0$  et on impose les conditions aux limites suivantes sur la frontière  $\partial\Omega_0$  du cube :  $\underline{T}_{limit} = \underline{0}$  pour  $|a_1| = l/2$ ,  $\underline{T}_{limit} = \sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$  pour  $a_2 = l/2$ ,  $\underline{T}_{limit} = -\sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$  pour  $a_2 = -l/2$ ,  $\underline{T}_{limit} = \sigma_0 \underline{e}_2$  pour  $a_3 = l/2$  et  $\underline{T}_{limit} = -\sigma_0 \underline{e}_2$  pour  $a_3 = -l/2$ . On suppose que le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a})$  résultant de ces contraintes est stationnaire et que le comportement rhéologique du cube obéit à la loi de Hooke de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ .

- 1) Quel tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  peut-on deviner pour résoudre ce problème aux conditions aux limites ?
- 2) Dédire de ce choix de  $\underline{\sigma}$  le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}$ .
- 3) En déduire un champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a})$  solution du problème.
- 4) Quelles sont les directions principales du tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}$  ?
- 5) Quels sont les allongements relatifs  $(\Delta_0, \Delta_+, \Delta_-)$  dans les directions respectives de ce repère ?

### Vibrations élastiques

On néglige toujours les forces extérieures de volume  $\underline{f}(\underline{a})$  et on suppose maintenant que le cube est animé d'un mouvement décrit par le champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \xi_m \sin(k a_1) \sin(k c t) \underline{e}_1,$$

où  $\xi_m$  est une amplitude réelle,  $k = \pi/l$  un nombre d'onde et  $c$  une vitesse.

- 6) Calculer  $c$  pour que  $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$  soit une solution non nulle des équations de Lamé.
- 7) En déduire les forces de contact exercées par l'extérieur du cube sur les faces de  $\partial\Omega_0$  de normales parallèles à  $\underline{e}_1$ .
- 8) Décrire le dispositif permettant d'observer ces vibrations.

**Corrigé**    **Cube (partie 2)**

**Loi de Hooke**

1) Le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a}) = \sigma_0 [\underline{e}_2 \otimes (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2]$  étudié précédemment satisfait les conditions aux limites. Comme il est constant, on a  $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$ . Il satisfait donc les équations de Lamé stationnaires sans forces extérieures de volume. 2) La loi de Hooke  $\underline{\epsilon} = \frac{-\nu}{E} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}$  entraîne

$$\underline{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{E} [\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1 + \nu) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)] .$$

3) Le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a}) = k_1 a_1 \underline{e}_1 + (k_0 a_3 + k_2 a_2) \underline{e}_2 + (k_0 a_3 + k_3 a_3) \underline{e}_3$  avec  $k_0 = (1 + \nu) \frac{\sigma_0}{E}$ ,  $k_1 = k_3 = -\nu \frac{\sigma_0}{E}$ , et  $k_2 = \frac{\sigma_0}{E}$  admet  $\underline{\epsilon}$  comme tenseur des petites déformations. 4) Les directions principales de  $\underline{\epsilon}$  sont celles de  $\underline{\sigma}$ , c'est-à-dire  $(\underline{n}_0, \underline{n}_+, \underline{n}_-)$ . 5) En appliquant la loi de Hooke dans ce repère, on trouve facilement que  $\Delta_0 = -\nu \frac{\sigma_0}{E}$ ,  $\Delta_+ = \frac{\sigma_0}{E} [(1 + \nu) s_+ - \nu]$  et  $\Delta_- = \frac{\sigma_0}{E} [(1 + \nu) s_- - \nu]$ .

**Vibrations élastiques**

- 6) On a  $\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = -c^2 \underline{\xi}$ ,  $\text{grad } (\text{div } \underline{\xi}) = -k^2 \underline{\xi}$  et  $\Delta \underline{\xi} = -k^2 \underline{\xi}$ . En reportant dans les équations de Lamé, on obtient  $[\rho_0 c^2 k^2 - (\lambda + 2\mu) k^2] \underline{\xi} = \underline{0}$ . On en déduit  $c = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ .
- 7) Le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$  associé au champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$  est  $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t) = k \xi_m \cos(k a_1) \sin(k c t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$ . Comme on a  $\underline{\epsilon}(\pm l/2, a_2, a_3) = \underline{0}$  pour  $|a_1| = l/2$ , on en déduit, par la loi de Hooke, que l'on a  $\underline{\sigma}(\pm l/2, a_2, a_3) = \underline{0}$ . Les forces de contact exercées sur les faces du cube de normale  $\underline{e}_1$ , donc situées en  $|a_1| = l/2$ , sont donc nulles.
- 8) Le déplacement est nul sur les autres faces. Pour observer ces vibrations, le cube est placé dans un cylindre d'axe  $Oa_1$  dont la section carrée empêche tout déplacement dans le plan  $Oa_2a_3$ . Les faces de normales  $\pm \underline{e}_1$  sont libres de contraintes.

**E.3 Torsion d'un arbre métallique**

On considère une pièce métallique homogène contenue dans le domaine

$$\Omega_0 = \{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1^2 + a_2^2) \leq R^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq L \} . \tag{3}$$

On note  $\rho_0$  sa masse volumique. On note  $\lambda$  et  $\mu$  ses coefficients de Lamé. Dans tout ce qui suit, on suppose que la section circulaire  $S_0$  d'équation  $a_3 = 0$  est immobile (déplacement nul), car encastrée dans un matériau indéformable. On néglige les forces de volume (gravité). On se place dans le cadre des petites perturbations.

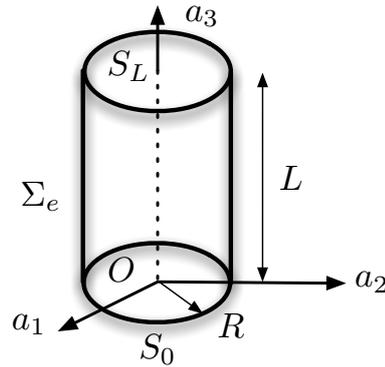


FIGURE 4 – Arbre métallique de forme cylindrique.

### Équilibre en torsion

On suppose que le système est à l'équilibre et que le déplacement s'écrit

$$\xi_1 = -\alpha a_2 a_3, \quad \xi_2 = \alpha a_1 a_3, \quad \xi_3 = 0. \quad (4)$$

avec  $\alpha > 0$  et  $\eta = \alpha \max(R, L) \ll 1$ .

- 1) Calculer le tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$  et justifier l'hypothèse des petites déformations.
- 2) Calculer le tenseur des dilatations  $\underline{\underline{C}}(\underline{a})$  et le comparer à  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$  au premier ordre du petit paramètre  $\eta$ .
- 3) Donner l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$ . En déduire la résultante des forces extérieures de contact exercées sur la surface  $S_L$  d'équation  $a_3 = L$ .
- 4) Montrer que la surface latérale  $\Sigma_e$ , d'équation  $(a_1^2 + a_2^2) = R^2$ , est libre de contraintes.
- 5) Calculer le moment résultant en  $\underline{0}$  des forces extérieures de contact exercées sur la surface  $S_0$ .
- 6) On suppose que le seuil de rupture du solide est atteint lorsque

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \geq k_e^2 \quad \text{où} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (5)$$

est la partie déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $k_e > 0$  une constante (critère de résistance de Von Mises). Au-delà de quelle valeur critique  $\alpha_c$  de  $\alpha$ , fonction de  $R$ ,  $k_e$  et  $\mu$  la pièce casse-t-elle ?

### Mouvement de torsion

On suppose maintenant que l'arbre est animé du mouvement

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{a}, t) = \xi_m \sin(k a_3) \sin(\omega t) (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\pi}{2L}. \quad (6)$$

- 7) Quelle condition vérifier la pulsation  $\omega$  pour que  $\underline{\underline{\xi}}(\underline{a}, t)$  soit une solution des équations de Lamé ?
- 8) Exprimer le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t)$ .
- 9) Calculer les forces de surface exercées sur  $S_L$  lors de ce mouvement.

- 10) Montrer que le moment des forces de contact exercées par la partie  $a_3 \geq l$  du cylindre sur un disque intérieur  $S_l$  de centre  $l \underline{e}_3$  avec  $0 \leq l \leq L$ , de rayon  $R$  et de normale  $\underline{e}_3$  est de la forme  $\underline{\Gamma} = \Gamma(l, t) \underline{e}_3$  où  $\Gamma(a_3, t)$  est une fonction que l'on déterminera.
- 11) Dessiner l'allure de la fonction  $\Gamma(0, t)$  en fonction de  $t$ .
- 12) Dessiner l'allure du profil  $\Gamma(a_3, t)$  pour  $a_3 \in [0, L]$  pour plusieurs valeurs de  $t$ .
- 13) Interpréter les déformations ou les mouvements de l'ensemble du problème à l'aide de schémas et de quelques commentaires.

**Corrigé**    **Torsion d'un arbre métallique**

**Équilibre en torsion**

1) On a  $H_{12} = -\alpha a_3$ ,  $H_{13} = -\alpha a_2$ ,  $H_{21} = \alpha a_3$ ,  $H_{23} = \alpha a_1$  et  $H_{ij} = 0$  sinon. On en déduit  $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\alpha a_2/2$ ,  $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \alpha a_1/2$  et  $\epsilon_{ij} = 0$ . Comme  $|\alpha a_1| \leq \eta$ ,  $|\alpha a_2| \leq \eta$  et  $|\alpha a_3| \leq \eta$ , les composantes de  $\underline{H}$  sont d'ordre  $\eta$  et l'on est bien dans le cadre des petites déformations. 2) Comme  $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \alpha a_3 (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ , on a  $C_{11} = C_{22} = 1 + \alpha^2 a_3^2$ ,  $C_{33} = 1 + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)$ ,  $C_{13} = C_{31} = -\alpha a_2 + \alpha a_1 a_3$ ,  $C_{23} = C_{32} = \alpha a_1 + \alpha a_2 a_3$  et  $C_{ij} = 0$  sinon. On a bien  $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + O(\eta^2)$ . 3) Comme  $\text{tr } \underline{\epsilon} = 0$ , l'application de la loi de Hooke conduit à  $\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon}$ . Les forces de contact exercées sur  $S_L$  sont  $\underline{T} = \underline{\sigma}(a_1, a_2, L) \cdot \underline{e}_3 = \mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ . Par symétrie, leur résultante, issue de l'intégration de  $\underline{T}$  sur  $S_L$ , est nulle. 4) Les forces de contact exercées sur  $\Sigma_e$  sont  $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \underline{0}$ . La surface  $\Sigma_e$  est donc libre de contraintes. 5) Les forces de contact exercées sur  $S_0$  sont  $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, 0) \cdot (-\underline{e}_3) = -\mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ . Leur moment en  $\underline{0}$  est  $\underline{\Gamma}_0 = \iint_{S_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}) dS_0 = -\mu \alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = -\mu \alpha \frac{\pi R^4}{2} \underline{e}_3$ . 6) On a  $\underline{s} = \underline{\sigma}$  et  $\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} = \mu^2 \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)$ . Son maximum est atteint sur la frontière  $\Sigma_e$  et vaut  $\mu^2 \alpha^2 R^2$ . La rupture est obtenue pour  $\alpha \geq \alpha_c = k_e / (\mu R)$ .

**Mouvement de torsion**

7) Puisque  $\text{div } \underline{\xi} = 0$ , les équations de Lamé s'écrivent  $\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \mu \Delta \underline{\xi}$ . En reportant la forme du déplacement dans ces équations, on obtient  $\omega^2 = c_2 k^2$  avec  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ . 8) On a  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t) a_2$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t) a_1$  et  $\sigma_{ij} = 0$  sinon. 9) Les forces de surfaces sont de la forme  $\underline{T}(a_1, a_2, L, t) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = \mu k \xi_m \cos(k L) \sin(\omega t) (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$ . On a  $\underline{T} = \underline{0}$  puisque  $k L = \pi/2$ . 10) Comme  $\underline{T}(a_1, a_2, a_3, t) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3$ , on a  $\Gamma(a_3, t) = \frac{\pi R^4}{2} \mu k \xi_m \cos(k a_3) \sin(\omega t)$ . 11) La fonction  $\Gamma(0, t)$  est une sinusoïde. 12) L'oscillation  $\Gamma(a_3, t)$  pour  $a_3 \in [0, L]$  correspond à un quart d'onde stationnaire avec un ventre en  $a_3 = 0$  et un noeud en  $a_3 = L$ . 13) Ce problème étudie des déplacements ou des mouvements de torsions autour de l'axe  $Oa_3$ . L'équilibre stationnaire résulte d'un mouvement de rotation solide imposé sur  $S_L$ . L'oscillation est le mouvement que l'on obtient s'il l'on relâche le forçage sur  $S_L$ . L'arbre oscille alors à une fréquence  $\omega = c_2 \pi / (2L)$ .

**E.4 Solide élastique sur un plan incliné**

On considère un milieu continu occupant le domaine

$$\Omega = \{ \underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq a_3 \leq h \} \tag{7}$$

qui décrit une couche infinie d'épaisseur  $h$  constante. On suppose que l'axe  $Oa_1$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale et que la gravité s'exprime donc  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$  avec  $\underline{e}_z = -\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_3$ .

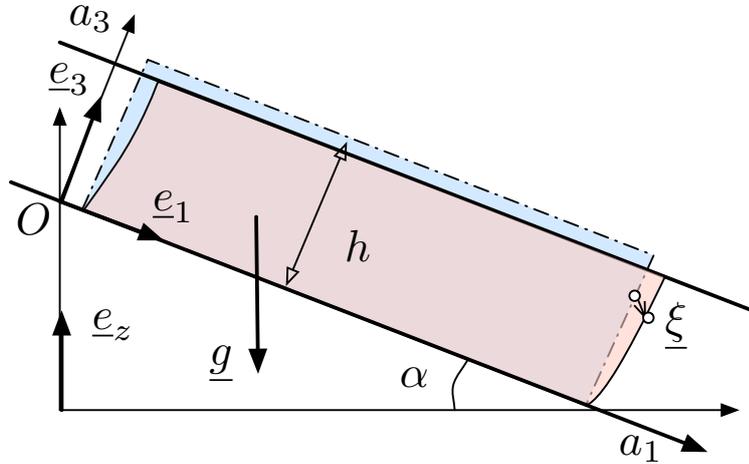


FIGURE 5 – Solide sur un plan incliné.

On suppose que le poids du milieu continu, de masse volumique  $\rho_0$ , induit la petite déformation :

$$\underline{\xi}(a_1, a_2, a_3) = \zeta(a_3) \underline{e}_1 + \chi(a_3) \underline{e}_3 \quad (8)$$

où  $\zeta(a_3)$  et  $\chi(a_3)$  sont des fonctions que l'on cherche à déterminer. On note  $\Omega_0$ , la configuration de référence dont est issue  $\Omega$ . Il n'y a pas de mouvement.

On suppose que le comportement rhéologique du milieu est celui d'un matériau élastique linéaire isotrope et on note  $\lambda$  et  $\mu$  ses coefficients de Lamé. Le solide adhère à la paroi pour  $a_3 = 0$ . Il est en contact avec l'air sur la face  $a_3 = h$  et l'on suppose que la pression atmosphérique  $p_a$  est constante.

- 1) Donner l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a})$  en fonction de  $\zeta$  et de  $\chi$ .
- 2) En déduire l'expression de l'équilibre des forces.
- 3) Écrire les conditions aux limites en  $a_3 = 0$  et  $a_3 = h$ .
- 4) En déduire les profils de déplacement  $\zeta(a_3)$  et  $\chi(a_3)$ .
- 5) Calculer la force surfacique  $\underline{T}$  exercée par le plan incliné sur le solide élastique.
- 6) Commenter ce dernier résultat.

Corrigé page 18

### Corrigé Solide élastique sur un plan incliné

1) Le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\sigma}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \lambda \chi'(a_3) & 0 & \mu \zeta'(a_3) \\ 0 & \lambda \chi'(a_3) & 0 \\ \mu \zeta'(a_3) & 0 & (\lambda + 2\mu) \chi'(a_3) \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore  $\underline{\sigma} = \lambda \chi' \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda \chi' \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (\lambda + 2\mu) \chi' \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \mu \zeta' (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3)$ .

2) Le principe fondamental entraîne  $\text{div } \underline{\sigma}(\underline{a}) + \rho \underline{g} = [\mu \zeta''(a_3) + \rho g \sin \alpha] \underline{e}_1 + [(\lambda +$

$2\mu) \chi''(a_3) - \rho g \cos \alpha] \underline{e}_3 = \underline{0}$ . **3)** Les conditions aux limites  $\underline{\xi}(a_1, a_2, 0) = \underline{0}$  et  $\underline{\sigma}(a_1, a_2, h) \cdot \underline{e}_3 = -p_a \underline{e}_3$  entraînent  $\zeta(0) = \chi(0) = 0$ ,  $\zeta'(h) = 0$  et  $(\lambda + 2\mu)\chi'(h) = -p_a$ . **4)** On en déduit les profils de déplacements suivants :  $\zeta(a_3) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} a_3 (a_3 - 2h)$  et  $\chi(a_3) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\rho g \cos \alpha}{2} a_3 (a_3 - 2h) - p_a a_3 \right]$ . **5)** On en déduit que la paroi exerce sur le milieu élastique la contrainte

$$\underline{T} = -\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = \rho g h (-\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_3) + p_a \underline{e}_3 = \rho g h \underline{e}_z + p_a \underline{e}_3 .$$

**6)** Cette contrainte se trouve être l'opposé de la somme du poids du milieu par unité de surface et la pression atmosphérique.

### E.5 Solide élastique encastré et comprimé

On considère un milieu continu occupant le domaine

$$\Omega = \{ \underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 \text{ tel que } 0 \leq a_1 \leq L_1, 0 \leq a_2 \leq L_2, 0 \leq a_3 \leq l \} . \quad (9)$$

On suppose que les forces extérieures de volume  $\underline{f} = 0$  sont nulles.

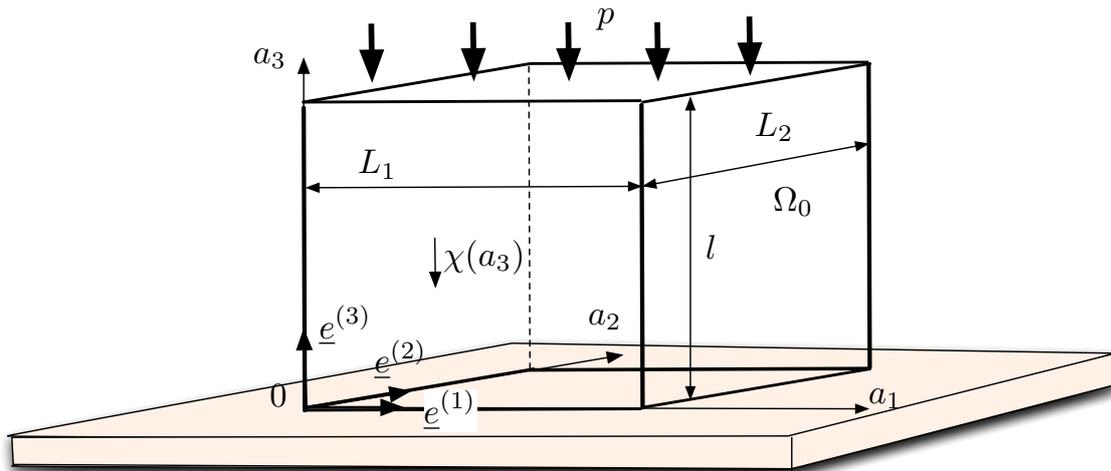


FIGURE 6 – Solide élastique encastré et comprimé.

On encastre l'objet sur toutes ses faces, sauf sur la face d'équation  $a_3 = l$  sur laquelle on impose une pression  $p$  constante  $\underline{T}(a_1, a_2, l) = -p \underline{e}_3$ . On suppose qu'il en résulte la petite déformation :

$$\underline{\xi}(a_1, a_2, a_3) = \chi(a_3) \underline{e}_3 \quad (10)$$

où  $\chi(a_3)$  est une fonction que l'on cherche à déterminer. On note  $\Omega_0$ , la configuration de référence dont est issue  $\Omega$ . Il n'y a pas de mouvement. On suppose que le déplacement  $\underline{\xi}$  est nul sur la face d'équation  $a_3 = 0$ .

On suppose que le comportement rhéologique du milieu, de masse volumique  $\rho_0$ , est celui d'un matériau élastique linéaire isotrope et on note  $\lambda$  et  $\mu$  ses coefficients de Lamé.

- 1) Donner l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a})$  en fonction de  $\chi(a_3)$  et de ses dérivées.

- 2) En écrivant l'équilibre des forces et en utilisant les conditions aux limites en  $a_3 = 0$ , montrer que  $\chi(a_3)$  est une fonction linéaire de  $a_3$ .
- 3) Écrire les conditions aux limites en  $a_3 = h$  et en déduire l'expression de  $\chi(a_3)$ .
- 4) Calculer les forces surfacique  $\underline{T}(\underline{a})$  sur chacune des faces latérales.

### Corrigé Solide élastique encastré et comprimé

1) Le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) = \chi'(a_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \chi' \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda \chi' \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (\lambda + 2\mu) \chi' \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ . **2)** Le principe fondamental entraîne  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) = (\lambda + 2\mu) \chi''(a_3) \underline{e}_3 = \underline{0}$ . Comme  $\chi(0) = 0$ , on en déduit  $\chi(a_3) = B a_3$  où  $B$  est une constante indéterminée. **3)** Les conditions aux limites  $\underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_3 = -p \underline{e}_3$  s'écrivent  $(\lambda + 2\mu) \chi'(a_3) = -p$ . On en déduit  $B = -p/(\lambda + 2\mu)$  et donc  $\chi(a_3) = -p a_3/(\lambda + 2\mu)$ . **4)** Les faces latérales sont soumises à une pression constante  $\lambda \chi'(a_3) = -\lambda p/(\lambda + 2\mu)$ .

## E.6 Comportement thermoélastique d'un cylindre

On note  $(\underline{0}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  le repère orthonormé canonique et  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point  $\underline{x}$ . On considère une pastille d'oxyde d'uranium dont la forme  $\Omega$  est le cylindre d'axe  $Oz$ , de longueur  $2l$  et dont la section est un cercle de rayon  $b$ . On choisit l'origine des axes au centre du cylindre (voir figure). On note  $S_-$  et  $S_+$  les disques de rayon  $b$  et de cotes respectives  $z = \pm l$  et  $S_l$  la face  $\partial\Omega - (S_- \cup S_+)$  (voir figure 7)

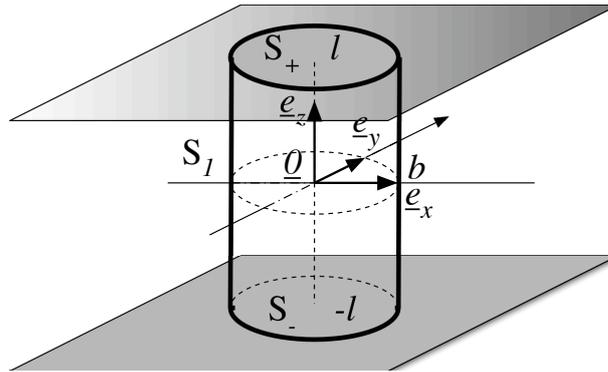


FIGURE 7 – Cylindre thermoélastique.

On suppose que, pour la température uniforme  $T_0$ , la pastille occupe la configuration de référence  $\Omega_0$  qui est un cylindre de hauteur  $2l$  et de section circulaire de rayon  $b_0$ . On se place dans le cadre des petites perturbations, ce qui permet de confondre les configurations déformées  $\Omega$  avec la configuration de référence  $\Omega_0$ . On suppose que le matériau obéit à la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{div } \underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\xi}} - \kappa(T - T_0) \underline{\underline{I}} \quad (11)$$

où  $\underline{\xi}$  est le champ de déplacement,  $\underline{\epsilon}$  le tenseur des petites déformations,  $T$  le champ de température et  $\kappa$  un coefficient caractérisant la dilation thermique du matériau.

- 1) On néglige les forces de gravité. Écrire les équations d'équilibre obtenues avec cette loi de comportement.
- 2) On suppose que les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega_0$  s'écrivent  $\underline{\xi} \cdot \underline{n} = 0$  et  $\underline{\sigma} \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{n}) \underline{n} = \underline{0}$  lorsque  $\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{n} < 0$  et  $\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0}$  sinon. Décrire brièvement le montage mécanique modélisé par ces conditions aux limites.
- 3) On cherche une solution de la forme  $\underline{\xi} = W(z^3 - l^2 z) \underline{e}_z$ . Calculer  $W$  pour que ce champ de déplacement soit solution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.
- 4) Calculer le champ  $\underline{T}(\underline{x})$  des forces de surface exercées sur la surface  $S_+$ .
- 5) En déduire une condition sur  $\tau_0$  pour que  $\underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n} < 0$  sur  $S_+$  et  $S_-$ .
- 6) Calculer le champ  $\underline{T}(\underline{x})$  des forces de surface exercées sur la surface  $S_1$ .
- 7) Montrer que  $\underline{\xi}$  est solution du problème thermoélastique si et seulement si  $\tau_0 > \tau_c$  où  $\tau_c$  est une constante que l'on précisera.
- 8) Donner des arguments permettant d'expliquer la forme en "tonneau" que prend la pastille lorsque  $\tau_0$  est légèrement inférieur à  $\tau_c$ .

### Corrigé

**Comportement thermoélastique d'un cylindre**

**1)** Les équations d'équilibre s'écrivent  $\text{div } \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} - \kappa \text{grad } T = \underline{0}$ . **2)** La pastille est confinée dans un domaine indéformable qui occupe le volume  $\Omega_0$ . Les configurations déformées doivent vérifier  $\Omega \subset \Omega_0$ . Les parties de  $\partial\Omega$  qui ne sont pas en contact avec l'enceinte sont libres de contraintes ( $\underline{T} = \underline{0}$ ). En cas de contact, le déplacement normal est nul et les contraintes tangentielles sont nulles. Il s'agit d'un contact unilatéral avec glissement. **3)** On a  $\text{div } \underline{\xi} = W(3z^2 - l^2)$ . L'équation d'équilibre s'écrit  $[6W(\lambda + \mu) + 6W\mu + \kappa A] \underline{e}_z = \underline{0}$ . On en déduit que  $W = -\frac{\kappa A}{6(\lambda + 2\mu)}$ . **4)** On a  $\underline{\sigma} = W(3z^2 - l^2)(\lambda \underline{I} + 2\mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) - \kappa \left( \tau_0 - \frac{A}{2} z^2 \right) \underline{I}$ . Sur la face  $S_+$ , d'équation  $z = l$ , on peut donc écrire  $\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{e}_z = 2(\lambda + 2\mu) W l^2 \underline{e}_z - \kappa \left( \tau_0 - \frac{A}{2} l^2 \right) \underline{e}_z$ . En remplaçant  $W$  par sa valeur, on obtient  $\underline{T} = -\kappa \left( \tau_0 - \frac{A}{2} l^2 + \frac{A}{3} l^2 \right) \underline{e}_z = -\kappa \left( \tau_0 - \frac{Al^2}{6} \right) \underline{e}_z$ . **5)** Pour  $\tau_0 > \frac{Al^2}{6}$ , on a  $\underline{T} \cdot \underline{n} < 0$  sur  $S_+$ . Par symétrie, le contact est également effectif sur  $S_-$ . **6)** Étant donnée une normale horizontale  $\underline{e}_r$ , on peut écrire  $\underline{\sigma} \underline{e}_r = \lambda W(3z^2 - l^2) \underline{e}_r - \kappa \left( \tau_0 - \frac{A}{2} z^2 \right) \underline{e}_r$ . En remplaçant  $W$  par sa valeur et après quelques manipulations, on obtient  $\underline{T} = -\kappa \left( \tau_0 - A \frac{6\mu z^2 + \lambda l^2}{6(\lambda + 2\mu)} \right) \underline{e}_r$ . **7)** Sur  $S_1$ , le maximum de la fonction  $6\mu z^2 + \lambda l^2$  est atteint pour  $|z| = l$  et vaut  $(6\mu + \lambda) l^2$ . Pour  $\tau > \tau_c$  avec  $\tau_c = \sup \left( \frac{Al^2}{6}, \frac{\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{Al^2}{6} \right)$ , on a  $\underline{T} \cdot \underline{n} < 0$  sur toutes les faces. Le champ de déplacement considéré est donc solution du problème. **8)** Pour  $\tau_0 < \tau_c$ , le contact sera d'abord perdu sur la face  $S_1$  au voisinage des extrémités  $|z| = l$  alors que la partie centrale reste en contact avec l'enceinte. La pastille prend donc la forme d'un tonneau.

**E.7 Mouvement 2D**

On considère le mouvement défini par la représentation eulérienne de sa vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  telle que :

$$U_1 = \alpha x_1 \quad U_2 = \beta x_2 \quad \text{et} \quad U_3 = 0 \quad (12)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. On note  $\chi = \alpha + \beta$  et on suppose que  $\chi \geq 0$  et  $\beta > 0$ .

- 1) Exprimer le vecteur rotation  $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$  et le tenseur des déformations  $\underline{D}(\underline{x}, t)$ .
- 2) On considère le domaine  $\mathcal{D}(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 + a_2^2 \leq l^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq h\}$  et on note  $\mathcal{D}(t)$  son évolution au cours du temps sous l'action du mouvement  $\underline{U}(\underline{x}, t)$ . Exprimer le volume  $V(t)$  du domaine  $\mathcal{D}(t)$  en fonction du temps.
- 3) Tracer  $V(t)$  en fonction du temps dans le cas  $\alpha = \beta$  puis dans le cas  $\chi = 0$ .
- 4) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  dans un plan  $x_3 = a_3$  dans le cas  $\alpha = \beta$  puis dans le cas  $\chi = 0$ .
- 5) Donner l'expression de la déformation  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  en supposant que  $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$ .
- 6) Tracer les trajectoires dans un plan  $x_3 = a_3$  dans le cas  $\alpha = \beta$  puis dans le cas  $\chi = 0$ .
- 7) On considère un champ  $B(\underline{x}, t)$  tel que  $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = 0$  et  $B(\underline{x}, 0) = \frac{\gamma}{2} (x_1^2 + x_2^2)$ . Calculer l'expression lagrangienne  $B^{(L)}(\underline{a}, t)$  de ce champ.
- 8) En déduire son expression eulérienne  $B(\underline{x}, t)$ .
- 9) Calculer  $\frac{\partial B}{\partial t}$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } B$  et vérifier que  $\frac{dB}{dt} = 0$ .
- 10) Décrire le domaine  $\mathcal{D}(t)$  et le dessiner à différents instants dans le cas  $\alpha = \beta$  puis dans le cas  $\chi = 0$ .
- 11) On considère le domaine

$$\mathcal{D}_{\underline{b}}(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \leq l^2 \text{ et } 0 \leq (a_3 - b_3) \leq h\}$$

où  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$  est un vecteur donné. et on note  $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t)$  son évolution au cours du temps. Décrire le domaine  $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t)$  à l'instant  $t$  et le dessiner à différents instants dans le cas  $\alpha = \beta$  en distinguant les cas  $\|\underline{b}\| < l$ ,  $\|\underline{b}\| = l$  et  $\|\underline{b}\| > l$ . Procéder de même pour le cas  $\chi = 0$ .

**Corrigé Mouvement 2D**

**1)** On a  $\underline{\omega} = \underline{0}$ ,  $D_{11} = \alpha$ ,  $D_{22} = \beta$  et  $D_{ij} = 0$  sinon. **2)** On a  $\text{div } \underline{U} = \chi$ . Comme  $V(t) = \iint_{\mathcal{D}} d^3x$ , on a  $\dot{V}(t) = \iint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{U} d^3x = \chi V(t)$ . On en déduit  $V(t) = V(0)e^{\chi t}$  avec  $V(0) = \pi l^2 h$ . **3)** Dans le cas  $\alpha = \beta = \chi/2$ , la fonction  $V(t)$  croît exponentiellement puisque  $\chi > 0$ . Dans le cas  $\chi = 0$ , la fonction  $V(t)$  est constante. **4)** Les lignes de champs sont les droites  $a_1 x_2 = a_2 x_1$  passant par  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  dans le cas  $\alpha = \beta = \chi/2$  et les hyperboles  $x_1 x_2 = a_1 a_2$  d'asymptotes  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  dans le cas  $\chi = 0$ . **5)** La déformation  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  s'écrit  $x_1 = a_1 e^{\alpha t}$ ,  $x_2 = a_2 e^{\beta t}$  et  $x_3 = a_3$ . **6)** Les trajectoires sont confondues avec les lignes de champs car le mouvement est stationnaire. **7)** Comme  $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$  est équivalent à  $\frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, 0) = 0$ , on a  $B^{(L)}(\underline{a}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, 0) = \frac{\gamma}{2} (a_1^2 + a_2^2)$ . **8)** On utilise  $B(\underline{x}, t) = B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), 0]$ . La déformation inverse  $\underline{A}(\underline{x}, t)$  s'écrivant  $a_1 = x_1 e^{-\alpha t}$ ,  $a_2 = x_2 e^{-\beta t}$  et  $a_3 = x_3$ , on a donc  $B(\underline{x}, t) = \frac{\gamma}{2} (x_1^2 e^{-2\alpha t} + x_2^2 e^{-2\beta t})$ . **9)** On a  $\frac{\partial B}{\partial t} = -\gamma (\alpha x_1^2 e^{-2\alpha t} + \beta x_2^2 e^{-2\beta t})$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } B = \gamma (U_1 x_1 e^{-2\alpha t} + U_2 x_2 e^{-2\beta t})$ . On a bien  $\frac{\partial B}{\partial t} = -\underline{U} \cdot \text{grad } B$  et donc  $\frac{dB}{dt} = 0$ . **10)** En utilisant l'expression de la déformation inverse

$\underline{A}(\underline{x}, t)$ , on peut écrire

$$\mathcal{D}(t) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \left[ \frac{x_1}{l \exp(\alpha t)} \right]^2 + \left[ \frac{x_2}{l \exp(\beta t)} \right]^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h \right\} .$$

Le domaine  $\mathcal{D}(t)$  est donc un cylindre de section elliptique dont les axes principaux sont  $l e^{\alpha t}$  dans la direction  $x_1$  et  $l e^{\beta t}$  dans la direction  $x_2$ . Pour  $\alpha = \beta = \chi/2 \geq 0$ , le domaine  $\mathcal{D}(t)$  est un cylindre de section circulaire dont le rayon croît exponentiellement. Pour  $\chi = 0$ , le section est une ellipse de plus en plus allongée dans la direction  $x_2$ . **11)** On peut écrit  $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \left[ \frac{x_1 - b_1 \exp(\alpha t)}{l \exp(\alpha t)} \right]^2 + \left[ \frac{x_2 - b_2 \exp(\beta t)}{l \exp(\beta t)} \right]^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h \right\}$ . Ce domaine a la même forme que  $\mathcal{D}(t)$  mais son centre suit le mouvement de la trajectoire issue de  $\underline{b}$  à  $t = 0$ .

### E.8 Mouvement de déformation affine

On considère un mouvement  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  défini par les équations

$$x_1 = a_1 + \alpha t a_2, \quad x_2 = a_2 + \alpha t a_1, \quad x_3 = a_3. \quad (13)$$

On suppose que la configuration de référence  $\Omega_0 = \Omega(0)$  est un volume de particules pris à l'instant  $t = 0$  qui occupe un cube de côté  $2l$  et de centre  $\underline{0}$  défini par  $-l \leq a_i \leq l$  pour  $i = 1, \dots, 3$ . On choisira  $\alpha > 0$ .

- 1) Calculer pour tout instant  $t$  le volume  $\mathcal{V}(t)$  du domaine  $\Omega(t)$  constituant la configuration déformée.
- 2) Tracer la courbe  $\mathcal{V}(t)$  en fonction du temps. En déduire le temps  $t_*$  à partir duquel le mouvement cesse d'être physique.

On supposera désormais que le mouvement n'est défini que sur l'intervalle temporel  $[0, t_*]$ .

#### Point de vue lagrangien

À  $t$  fixé, on considère la déformation entre la configuration de référence  $\Omega_0$  et la configuration déformée  $\Omega(t)$ .

- 3) Calculer la dilatation relative autour d'un point  $\underline{a}$  quelconque de  $\Omega_0$  dans la direction 1 engendrée par le vecteur unitaire  $\underline{e}_1$ .
- 4) Calculer l'angle de glissement  $\gamma_{12}$  entre les directions 1 et 2 autour d'un point  $\underline{a}$  quelconque.
- 5) Calculer la valeur de cet angle de glissement  $\gamma_{12}$  pour  $t = t_*$ . Commenter ce résultat.

#### Point de vue eulérien

- 6) Calculer la représentation eulérienne  $\underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t)$  du champ de vitesse de ce mouvement.
- 7) Calculer le tenseur des taux de déformation  $\underline{\underline{D}}$  ainsi que le tenseur des taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}$ .
- 8) Calculer le taux d'allongement relatif autour d'un point quelconque  $\underline{x}$  de  $\Omega(t)$  dans la direction 1.
- 9) Calculer le taux de glissement entre les directions 1 et 2 autour d'un point quelconque  $\underline{x}$  de  $\Omega(t)$ .

### Changement de repère

- 10) Calculer les dilatations relatives autour d'un point  $\underline{a}$  quelconque de  $\Omega_0$  dans les directions engendrées par les vecteurs  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$  et  $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ .
- 11) Calculer l'angle de glissement entre ces deux directions.
- 12) Donner les valeurs propres et les directions propres du tenseur des dilatations  $\underline{\underline{C}}(\underline{a}, t)$  pour tout point  $\underline{a}$  et tout temps  $t$ .
- 13) Écrire l'équation  $\underline{x}' = \underline{X}'(\underline{a}', t)$  des trajectoires dans une base propre de ce tenseur, et décrire la configuration de référence  $\Omega_0$  dans cette nouvelle base.

### Étude d'un nouveau mouvement

Sauf mention contraire, on s'intéresse désormais au nouveau mouvement  $\underline{X}'(\underline{a}', t)$  défini par les équations

$$x'_1 = a'_1 + \alpha t a'_1, \quad x'_2 = a'_2 - \alpha t a'_2, \quad x'_3 = a'_3. \quad (14)$$

On note  $\underline{f}^{(1)}$ ,  $\underline{f}^{(2)}$  et  $\underline{f}^{(3)}$  les vecteurs de base associés aux coordonnées  $x'_1$ ,  $x'_2$  et  $x'_3$ . On suppose que la configuration de référence  $\Omega'_0 = \Omega'(0)$  est un volume de particules pris à l'instant  $t = 0$  qui occupe un parallélépipède défini par  $-l\sqrt{2} \leq a'_i \leq l\sqrt{2}$  pour  $i = 1, 2$  et  $-l \leq a'_3 \leq l$ .

- 14) Calculer pour tout instant  $t$  le volume  $\mathcal{V}'(t)$  du domaine  $\Omega'(t)$  constituant la configuration déformée.
- 15) En déduire le temps  $t_*$  à partir duquel le mouvement cesse d'être physique.

On supposera désormais que le mouvement n'est défini que sur l'intervalle temporel  $[0, t_*]$ .

### Élasticité linéaire

On suppose que le domaine  $\Omega'(t)$  est occupé par un milieu élastique homogène et isotrope de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . On s'intéresse aux moments initiaux pendant lesquels la déformation est suffisamment petite pour que la loi de Hooke reste valide. On suppose que chacune des faces du domaine  $\Omega'(t)$  est contrainte par une force surfacique uniforme et normale que l'on note  $F_i$  pour la face de normale à  $\underline{f}^{(i)}$  pour  $i = 1, \dots, 3$ . On suppose que le mouvement est suffisamment lent pour que l'on puisse négliger les forces d'inertie du matériau.

- 16) Calculer les allongements relatifs  $\Delta_i(\underline{a}) = \Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{f}^{(i)}) - 1$ , pour  $i = 1, \dots, 3$ , où  $\Lambda(\underline{a}; \underline{da})$  désigne la dilatation relative autour du point  $\underline{a}$  dans la direction du vecteur  $\underline{da}$ .
- 17) Exprimer ces allongements relatifs en fonction des forces surfaciques  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  en utilisant la loi de Hooke.
- 18) En déduire la valeur de ces forces en fonction du temps.

### Trajectoires et lignes de champs

On cherche maintenant à décrire les trajectoires et les lignes de champs du nouveau mouvement  $\underline{X}'(\underline{a}', t)$ .

- 19) Dessiner le domaine  $\Omega'(t)$  à trois instants différents.

- 20) Donner l'équation des trajectoires sous la forme  $x'_2 = f(x'_1)$  et en tracer au moins cinq.
- 21) Calculer l'équation des lignes de courant du champ de vitesse à l'instant  $t = 0$ . En tracer au moins cinq.
- 22) Calculer l'équation des lignes de courant du champ de vitesse à tous les instants et tracer leur allure.
- 23) Dessiner le lieu des points  $\underline{x}$  qui ont été balayés au moins une fois par au moins une trajectoire du mouvement.

### Connexion avec le premier mouvement

On considère toujours le mouvement défini par les équations  $\underline{x}' = \underline{X}'(\underline{a}', t)$  mais on suppose maintenant que la configuration de référence  $\Omega_0 = \Omega(t)$  est le cube de côté  $2l$  défini par  $|a'_1 + a'_2| \leq l\sqrt{2}$ ,  $|a'_1 - a'_2| \leq l\sqrt{2}$  et  $|a'_3| \leq l$ .

- 24) Dessiner au moins trois positions de la configuration déformée  $\Omega(t)$  ainsi qu'au moins cinq trajectoires.
- 25) Dessiner l'allure du lieu des points  $\underline{x}'$  balayés au moins une fois par les trajectoires de ce mouvement.
- 26) Calculer explicitement l'équation des frontières de ce lieu de points.
- 27) Indiquer et tracer les forces que l'on doit appliquer au domaine  $\Omega(t)$  du premier mouvement  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  pendant le temps où le matériau qu'il contient garde un comportement homogène et isotrope.

Corrigé page 25

### Corrigé Mouvement de déformation affine

**1)**  $\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \mathcal{V}(0) = (1 - \alpha^2 t^2) \mathcal{V}(0) = 8l^3(1 - \alpha^2 t^2)$ . **2)**  $\mathcal{V}(t)$  est une parabole de sommet  $(0, 8l^3)$ .  $t_* = 1/\alpha$ .

### Point de vue lagrangien

**3)** Les composantes du tenseur des dilatations sont  $C_{11} = C_{22} = 1 + \alpha^2 t^2$ ,  $C_{12} = C_{21} = 2\alpha t$ ,  $C_{33} = 1$  et  $C_{ij} = 0$  sinon. Ce tenseur est indépendant de  $\underline{a}$ . La dilatation relative dans la direction 1 est  $\Lambda(\underline{a}; \delta a e_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}$ . **4)** L'angle de glissement  $\gamma_{12}(t)$  ne dépend pas de  $\underline{a}$  et vérifie  $\sin \gamma_{12} = C_{12}/\sqrt{C_{11} C_{22}} = 2\alpha t/(1 + \alpha^2 t^2)$ . On a donc  $\gamma_{12} = \arcsin[2\alpha t/(1 + \alpha^2 t^2)]$ . **5)** On a  $\gamma_{12}(t_*) = \pi/2$ . Les directions 1 et 2 se déforment jusqu'à être confondues pour  $t = t_*$ .

### Point de vue eulérien

**6)**  $U_1^{(E)} = \alpha(x_2 - \alpha t x_1)/(1 - \alpha^2 t^2)$ ,  $U_2^{(E)} = \alpha(x_1 - \alpha t x_2)/(1 - \alpha^2 t^2)$  et  $U_3^{(E)} = 0$ . **7)** Les composantes du tenseur des taux de déformation sont  $D_{11} = D_{22} = -\alpha^2 t/(1 - \alpha^2 t^2)$ ,  $D_{12} = D_{21} = \alpha/(1 - \alpha^2 t^2)$  et  $D_{ij} = 0$  sinon. Ce tenseur est indépendant de  $\underline{x}$ . Les composantes du tenseur des taux de rotation sont nulles :  $\Omega_{ij} = 0$ . **8)** Le taux d'allongement dans la direction 1 est  $D_{11}$ . **9)** Le taux de glissement entre les directions 1 et 2 ne dépend pas de  $\underline{x}$  et est égal à  $\frac{d}{dt}\gamma_{12}(t) = 2 D_{12} = 2\alpha/(1 - \alpha^2 t^2)$ .

### Changement de repère

**10)** Les dilatations relatives dans les directions bissectrices de  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  sont  $\Lambda [a; \delta a (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)] = 1 + \alpha t$  et  $\Lambda [a; \delta a (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)] = 1 - \alpha t$ . **11)** L'angle de glissement  $\gamma [a; \delta a (\underline{e}_1 + \underline{e}_2), \delta a (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)]$  entre ces directions est nul pour tout temps. **12)** Les directions engendrées par  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$  et  $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$  sont les directions propres de  $\underline{C}(\underline{a}, t)$  respectivement associées aux valeurs propres  $(1 + \alpha t)^2$  et  $(1 - \alpha t)^2$ . La direction engendrée par  $\underline{e}_3$  est associée à la valeur propre 1. **13)** Les équations des trajectoires dans une base propre quelconque de  $\underline{C}$  sont celles du mouvement étudié ci-dessous.

### Étude d'un nouveau mouvement

**14)**  $\mathcal{V}'(t) = J(\underline{a}, t) \mathcal{V}'(0) = (1 - \alpha^2 t^2) \mathcal{V}'(0) = 16l^3(1 - \alpha^2 t^2)$ . La configuration de référence de ce nouveau mouvement à un volume double que pour le mouvement précédent. **15)**  $t_* = 1/\alpha$ . On retrouve le même temps limite que pour le mouvement étudié avant le changement de base.

### Élasticité linéaire

**16)** Les allongements relatifs sont  $\Delta_1 = \alpha t$ ,  $\Delta_2 = -\alpha t$  et  $\Delta_3 = 0$ . **17)** En invoquant le principe de superposition on peut écrire  $\Delta_1 = (F_1 - \nu F_2 - \nu F_3)/E$ ,  $\Delta_2 = (-\nu F_1 + F_2 - \nu F_3)/E$  et  $\Delta_3 = (-\nu F_1 - \nu F_2 + F_3)/E$ . **18)** En comparant les deux expressions précédentes des allongements relatifs on obtient  $F_1 = \alpha t E/(1 + \nu)$ ,  $F_2 = -\alpha t E/(1 + \nu)$  et  $F_3 = 0$ .

### Trajectoires et lignes de champs

**19)** La section carrée du domaine s'allonge dans la direction 1, s'applatit dans la direction 2 et s'écrase sur l'axe engendré par  $\underline{f}^{(1)}$  à  $t = t_*$ . **20)** Dans les plans normaux à  $x_3 = a_3$ , les trajectoires suivent les courbes d'équation  $x_2 = a_2 (2 - x_1/a_1)$  où  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \Omega'$ . **21)** Les composantes de la vitesse eulérienne du mouvement dans la base  $(\underline{f}^{(1)}, \underline{f}^{(2)}, \underline{f}^{(3)})$  sont  $U_1^{(E)'} = \alpha x_1'/(1 + \alpha t)$ ,  $U_2^{(E)'} = -\alpha x_2'/(1 - \alpha t)$  et  $U_3^{(E)'} = 0$ . À  $t = 0$  les lignes de courant du champ défini par  $U_1^{(E)'} = \alpha x_1'$  et  $U_2^{(E)'} = -\alpha x_2'$  sont des courbes  $x_2' = f(x_1')$  telles que  $df(x_1')/dx_1' = U_2^{(E)'} / U_1^{(E)'} = -f(x_1')/x_1'$ . On en déduit que  $x_2' = f(x_1') = C/x_1'$  où  $C$  est une constante arbitraire. Les lignes de champs à  $t = 0$  sont donc des hyperboles. **22)** Aux instants ultérieurs, le même raisonnement conduit à des courbes  $x_2' = f(x_1') = C(1/x_1')^{(1+\alpha t)/(1-\alpha t)}$ . **23)** Dans un plan  $x_3 = a_3$ , ce lieu est la réunion du carré initial de côté  $2l\sqrt{2}$  et de deux triangles rectangles isocèles dont les hypothénuses sont les côtés normaux à  $\underline{f}^{(2)}$  du carré.

### Connexion avec le premier mouvement

**24)** Dans un plan  $x_3 = a_3$  Le domaine  $\Omega(0)$  est un carré à 45 degrés inscrit dans le domaine  $\Omega'(0)$ . Les domaines  $\Omega(t)$  sont alors des losanges inscrits dans les rectangle  $\Omega'(t)$  dont la déformation a été dessinée ci-dessus. **25)** L'allure est esquissée en traçant plusieurs droites joignant le carré à 45 degrés  $\Omega(0)$  en l'axe  $\underline{f}^{(2)}$  et égales aux trajectoires des points dont elles sont issues. **26)** Cette famille de droites s'écrit  $x_2' = f(a, x_1') = (l\sqrt{2} - a_1')(2 - x_1'/a_1')$ . Il s'agit en effet de droites  $x_2' = a_2' (2 - x_1'/a_1')$  avec  $a_1' + a_2' = l\sqrt{2}$ . L'équation de l'enveloppe de cette famille de courbes est obtenue en écrivant  $\partial f(a_1', x_1') / \partial a_1' = 0$ . On en déduit que

$|x'_2| = 2 l\sqrt{2} \left[ 1 - \sqrt{|x'_1|/(2l\sqrt{2})} \right]^2$  est l'équation de la frontière recherchée. **27)** Les forces  $F_1 = \alpha t E/(1 + \nu)$ ,  $F_2 = -\alpha t E/(1 + \nu)$  et  $F_3 = 0$  appliquées au domaine  $\Omega'(t)$  dans les directions  $\underline{f}^{(1)}$ ,  $\underline{f}^{(2)}$  et  $\underline{f}^{(3)}$  sont équivalentes à deux cisaillements  $F = \alpha t E\sqrt{2}/(1 + \nu)$  appliqués au domaine  $\Omega(t)$  dans les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ .

## E.9 Tourbillon dans une boîte

### Mouvement dans les coins

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  du champ de vitesse est définie par les relations  $U_1 = -\beta x_1$ ,  $U_2 = 0$  et  $U_3 = \beta x_3$ . On suppose que  $\beta$  est une constante positive.

- 1) Calculer la représentation eulérienne  $\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t)$  du champ d'accélération.
- 2) Montrer que l'écoulement est isochore (volumes constants au cours du temps).
- 3) Calculer le tenseur des déformations  $\underline{D}(\underline{x}, t)$  associé à ce mouvement.
- 4) Calculer le vecteur rotation  $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$  associé à ce mouvement.
- 5) Vérifier la relation  $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{1}{2}\text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$  sur l'exemple de ce mouvement.
- 6) Calculer la représentation lagrangienne de ce mouvement sous la forme de la famille des déformations  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  en choisissant la convention  $\underline{a} = \underline{X}(\underline{a}, 0)$ .
- 7) On suppose qu'à  $t = 0$  les particules sont contenues dans le domaine  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; a_1 \geq 0 \text{ et } a_3 \geq 0\}$ . Décrire le domaine  $\Omega(t)$  occupé par ces particules à l'instant  $t$ .
- 8) Dessiner les trajectoires dans l'intersection du domaine  $\Omega(t)$  avec le plan  $x_2 = 0$ .
- 9) Déterminer et dessiner les lignes de champs du champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  dans le plan  $x_2 = 0$ .
- 10) Donner l'expression de la représentation lagrangienne  $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$  du champ de vitesse.
- 11) En déduire la représentation lagrangienne  $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t)$  du champ d'accélération. Comparer avec la représentation eulérienne  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$  de l'accélération calculée aux questions précédentes.
- 12) Si  $\rho_0$  est la densité à l'instant  $t = 0$  d'un milieu continu animé par ce mouvement, calculer sa densité  $\rho(\underline{x}, t)$  aux instants ultérieurs.
- 13) Dessiner les lignes de champs du champ d'accélération  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ .

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide newtonien caractérisé par la viscosité dynamique  $\mu_n$ . On suppose que les forces extérieures de volume  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  sont nulles.

- 14) Ecrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement en utilisant l'expression connue du champ de vitesse et en introduisant le champ de pression  $p(\underline{x}, t)$  pour l'instant inconnu.
- 15) On suppose que la pression  $p(0, t) = p_0$  est connue. En déduire le champ de pression  $p(\underline{x}, t)$ .
- 16) Dessiner les isobares (iso-pression) dans le plan  $x_2 = 0$ . Indiquer par la lettre A le maximum du champ de pression.
- 17) Donner l'expression du tenseur des contraintes dans tout le fluide.
- 18) Calculer les forces de contact exercées par le fluide sur les frontières du domaine  $\Omega_0$ .
- 19) Effectuer l'application numérique pour les valeurs  $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  et  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Commenter le rapport entre les forces visqueuses et les forces de pression.
- 20) Dessiner une trajectoire disjointe de la frontière du domaine  $\Omega_0$ . Tracer quelques vecteurs accélération le long de cette trajectoire. Indiquer le sens de variation de la pression en suivant cette trajectoire. Comparer-le avec le signe l'accélération tangen-

tielle.

### Mouvement au centre

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  du champ de vitesse est définie par les relations  $U_1 = -\beta x_3$ ,  $U_2 = 0$  et  $U_3 = \beta x_1$ . On suppose que  $\beta$  est une constante positive.

- 21) Calculer le champ d'accélération  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ .
- 22) Calculer le tenseur des déformations  $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ .
- 23) Calculer le vecteur rotation  $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ .
- 24) Vérifier la relation  $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{1}{2}\text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$  sur l'exemple de ce mouvement.
- 25) Si  $\rho_0$  est la densité à l'instant  $t = 0$  d'un milieu continu animé par ce mouvement, calculer sa densité  $\rho(\underline{x}, t)$  aux instants ultérieurs.
- 26) Dessiner les trajectoires du mouvement et les lignes de champ du champ de vitesse dans le plan  $x_2 = 0$ . le long de cette trajectoire.

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide newtonien caractérisé par la viscosité dynamique  $\mu_n$ . On suppose que les forces extérieures de volume  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  sont nulles.

- 27) Calculer le champ de pression  $p(\underline{x}, t)$  en sachant que  $p(\underline{0}, t) = p_0$ .
- 28) Dessiner les isobares (iso-pression) dans le plan  $x_2 = 0$ . Indiquer par la lettre D le minimum du champ de pression.
- 29) Dessiner une trajectoire ne passant pas par le point  $\underline{0}$ . Tracer quelques vecteurs accélération le long de cette trajectoire. Indiquer comment varie la pression en suivant cette trajectoire. Comparer-le avec la valeur l'accélération tangentielle.

### Mouvement dans toute la boîte

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  du champ de vitesse est définie par les relations

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\beta}{k} \cos(kx_1) \sin(kx_3) \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= \frac{\beta}{k} \sin(kx_1) \cos(kx_3) \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\beta$  et  $k$  sont des constantes positives.

- 30) Si  $\rho_0$  est la densité à l'instant  $t = 0$  d'un milieu continu animé par ce mouvement, calculer sa densité  $\rho(\underline{x}, t)$  aux instants ultérieurs.
- 31) Montrer qu'il existe une fonction de courant  $\psi(\underline{x})$  telle que  $U_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$  et  $U_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ . Déterminer cette fonction de courant.
- 32) Montrer que la valeur de la fonction de courant est constante le long des trajectoires.
- 33) On suppose qu'à l'instant  $t = 0$  les particules sont situées dans le domaine  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; |a_1| \leq l \text{ et } |a_3| \leq l\}$  avec  $l = \frac{\pi}{2k}$ . Calculer  $\Omega(t)$  aux instants ultérieurs.
- 34) Indiquer les points du domaine dont la vitesse est nulle et déterminer les trajectoires des particules situées sur la frontière de  $\Omega(t)$ .
- 35) En effectuant un développement limité de  $\psi(\underline{x})$  au voisinage de  $\underline{x} = \underline{0}$ , dessiner les trajectoires au voisinage de ce point.

36) En effectuant un développement limité de  $\psi(\underline{x})$  au voisinage de  $\underline{x} = (-l, 0, -l)$  dessiner les trajectoires au voisinage de ce point.

37) En déduire l'allure des trajectoires dans tout le domaine  $\Omega(t)$ .

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide parfait. On suppose que les forces extérieures de volume  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  sont nulles.

38) Calculer le champ de pression  $p(\underline{x}, t)$  en sachant que  $p(\underline{0}, t) = p_0$ .

39) Tracer les isobares dans le plan  $x_2 = 0$  en indiquant par la lettre D le minimum et par la lettre A les maxima.

40) Commenter la relation entre les trois écoulements fluides étudiés dans ce problème.

## Corrigé Tourbillon dans une boîte

### Mouvement dans les coins

**1)** Les composantes de l'accélération sont  $\frac{dU_1}{dt} = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \beta^2 x_1$ ,  $\frac{dU_2}{dt} = 0$  et  $\frac{dU_3}{dt} = U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \beta^2 x_3$ . **2)** Le mouvement est isochore car  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0$ . **3)** Seules les composantes  $D_{11} = -\beta$  et  $D_{33} = \beta$  sont non nulles. **4)** Comme  $\underline{K} = \underline{D}$  on a  $\underline{\Omega} = 0$  d'où  $\underline{\omega} = \underline{0}$ . **5)**  $\frac{d}{dt} \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\beta^2 x_1^2 + \beta^2 x_3^2), 0, \frac{\partial}{\partial x_3} (\beta^2 x_1^2 + \beta^2 x_3^2) \right] = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3)$ . **6)** Les trajectoires sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires  $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)]$  qui s'écrit  $\frac{dx_1}{dt} = -\beta x_1$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = 0$  et  $\frac{dx_3}{dt} = \beta x_3$  dont les solutions sont  $x_1(t) = a_1 \exp(-\beta t)$ ,  $x_2(t) = a_2$  et  $x_3(t) = a_3 \exp(\beta t)$  en tenant compte des conditions initiales  $\underline{x}(0) = \underline{a}$ . La famille des déformations  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  vérifie donc  $X_1 = a_1 \exp(-\beta t)$ ,  $X_2 = a_2$  et  $X_3 = a_3 \exp(\beta t)$ . **7)** Les plans  $x_1 = 0$  et  $x_3 = 0$  contiennent les trajectoires issues des plans  $a_1 = 0$  et  $a_3 = 0$  qui constituent la frontière  $\partial\Omega_0$ . Par conséquent  $\Omega(t) = \Omega_0$  pour tous temps. On remarque aussi que  $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$  sur la frontière. **8)** Les trajectoires forment une famille d'hyperboles d'équations  $x_1 x_3 = a_1 a_3$  dans les plans  $(x_1, x_3)$ . **9)** Les lignes de champs de  $\underline{U}$  sont confondues avec les trajectoires puisque le mouvement est permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = 0$ ). **10)** La représentation lagrangienne  $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$  s'écrit  $U_1^{(L)} = -\beta a_1 \exp(-\beta t)$ ,  $U_2^{(L)} = 0$  et  $U_3^{(L)} = \beta a_3 \exp(\beta t)$ . **11)** La représentation lagrangienne  $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$  s'écrit  $\Gamma_1^{(L)} = \beta^2 a_1 \exp(-\beta t)$ ,  $\Gamma_2^{(L)} = 0$  et  $\Gamma_3^{(L)} = -\beta^2 a_3 \exp(\beta t)$ . On retrouve bien  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \underline{\Gamma}^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3)$ . **12)** D'après la loi de conservation de la masse  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0$  et  $\text{div } \underline{U} = 0$ , on a  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  et donc  $\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$ . Donc  $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$ . D'où  $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$ . On peut aussi invoquer la loi de conservation de la masse  $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0$  en représentation lagrangienne et utiliser le fait que  $J(\underline{a}, t) = 1$ . **13)** Les lignes de champs de  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \beta^2(x_1, 0, x_3)$  forment une famille des droites concentriques de centre  $O$  dans les plans  $(x_1, x_3)$ . **14)**  $\rho_0 \frac{d}{dt} \underline{U} = \underline{f} + \text{div } \underline{\sigma} = \underline{f} - \text{grad } p + (\lambda_n + \mu_n) \text{grad } (\text{div } \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}$ . Comme  $\text{div } \underline{U} = 0$  et  $\underline{f} = \underline{0}$ , il reste  $\rho_0 \frac{d}{dt} \underline{U} = -\text{grad } p + \mu_n \Delta \underline{U}$  (Navier-Stokes incompressible). On remarque ensuite que  $\Delta \underline{U} = \underline{0}$ . D'où les trois équations  $\rho_0 \beta^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$ ,  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$ ,  $\rho_0 \beta^2 x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$ . **15)** On en déduit  $p(\underline{x}, t) = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 (x_1^2 + x_3^2)$ . **16)** Les isobares sont des cercles de centre  $O$ . **17)** Le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2 \mu_n \underline{D}$  est diagonal avec  $D_{11} = -p - 2\mu_n \beta$ ,  $D_{33} = -p + 2\mu_n \beta$  et  $D_{22} = -p$ . **18)** La force surfacique exercée par la frontière  $x_1 = 0$ , de normale  $\underline{n} = -\underline{e}_1$ , sur le fluide est  $\underline{\sigma} \underline{n}$ . La force surfacique exercée par le fluide sur cette frontière est donc l'opposée c'est à dire  $\underline{F}^{(1)} = -\underline{\sigma}(-\underline{e}_1) = (-p - 2\mu_n \beta) \underline{e}_1$ . La force surfacique exercée par le fluide sur la frontière  $x_3 = 0$ , de normale  $\underline{n} = -\underline{e}_3$ ,

est  $\underline{F}^{(3)} = -\underline{\sigma}(-\underline{e}_3) = (-p + 2\mu_n\beta)\underline{e}_3$ . **19)** Comme  $p_0 = 10^5$  Pa et  $2\mu_n\beta = 2 \cdot 10^{-3}$  Pa, on a  $2\mu_n\beta \ll p_0$ . Les forces visqueuses sont négligeables devant les forces de pression pour le calcul des forces surfacique exercées sur les frontières. **20)** Le long d'une trajectoire ayant la forme d'une hyperbole, l'accélération tangentielle est négative avant de couper la première bissectrice, positive après. L'accélération normale est maximale lorsque la trajectoire coupe la première bissectrice. Ce point correspond aussi à un maximum de pression, croissante (décroissante) lorsque l'accélération tangentielle est négative (positive).

**Mouvement au centre**

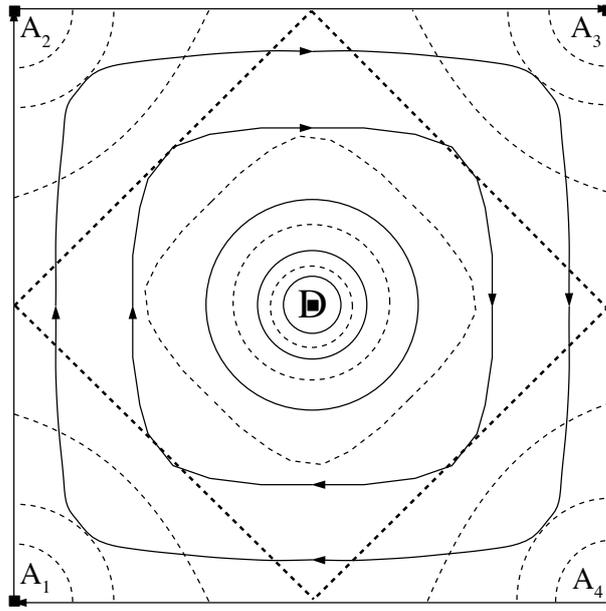


FIGURE 8 – Trajectoires (—) et isobares (- - -)

**21)** Les composantes de l'accélération  $\underline{\Gamma}$  sont  $\frac{dU_1}{dt} = U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = -\beta^2 x_1$ ,  $\frac{dU_2}{dt} = 0$  et  $\frac{dU_3}{dt} = U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = -\beta^2 x_3$ . **22)** Seules les composantes  $K_{31} = \beta$  et  $K_{13} = -\beta$  du gradient  $\underline{K} = \text{grad } \underline{U}$  sont non nulles. Comme  $\underline{K}$  est antisymétrique,  $\underline{D} = \underline{0}$ . **23)** On a donc  $\underline{\Omega} = \underline{K}$ . En appliquant la relation  $\Omega_{13} + \omega_2 = 0$  on voit que  $\omega_2 = -\beta$  et donc  $\underline{\omega} = -\beta \underline{e}_2$ . On en tire  $\text{rot } \underline{U} = 2\underline{\omega} = -2\beta \underline{e}_2$ . **24)**  $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3) - (2\beta^2 x_1, 0, 2\beta^2 x_3) = (-\beta^2 x_1, 0, -\beta^2 x_3)$ . On retrouve bien l'expression de  $\underline{\Gamma}$ . **25)** Comme  $\text{div } \underline{U} = 0$  on a  $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$ . Le mouvement est isochore. **26)** Les trajectoires et les lignes de champs de  $\underline{U}$  sont des cercles concentriques de centre  $O$  dans le plan  $(x_1, x_3)$ . **27)** On a  $\rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p + \mu_n \Delta \underline{U}$  (Navier-Stokes incompressible). On remarque ensuite que  $\Delta \underline{U} = \underline{0}$ . D'où les trois équations  $-\rho_0 \beta^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$ ,  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$ ,  $-\rho_0 \beta^2 x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$ . D'où  $p(\underline{x}, t) = p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 (x_1^2 + x_3^2)$ . **28)** Les isobares sont des cercles de centre  $O$ . **29)** Les particules décrivent des cercles avec une accélération tangentielle nulle. La pression est constante le long d'une trajectoire.

**Mouvement dans toute la boîte**

**30)** Comme  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \beta \sin(kx_1) \sin(kx_3) - \beta \sin(kx_1) \sin(kx_3) = 0$ , on a  $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$ . **31)** La fonction  $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) \cos(kx_1) \cos(kx_3)$  vérifie bien  $U_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$

et  $U_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ . **32)** La fonction  $f(t) = \psi[\underline{x}(t)]$  lorsque  $\underline{x}(t)$  est une trajectoire ( $\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{U}$ ) est telle que  $f'(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} U_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} U_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) = 0$ . Donc  $f$ , c'est-à-dire  $\psi$  est constant le long d'une trajectoire. **33)** Comme  $\psi(\underline{x}) = 0$  sur toute la frontière  $\partial\Omega_0$ , cette frontière est constituée de trajectoires. On en déduit que  $\Omega(t) = \Omega_0$  pour tous temps. **34)** Pour  $x_1 = \pm l$  on a  $U_1 = 0$  et  $U_3 = \pm(\beta/k) \cos(kx_3)$ . Pour  $x_3 = \pm l$  on a  $U_1 = \mp(\beta/k) \cos(kx_1)$  et  $U_3 = 0$ . Ceci détermine les trajectoires aux frontières en y incluant les quatre coins  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  du carré dans le plan  $(x_1, x_3)$  pour lesquels la vitesse est nulle (il y a donc huit trajectoires au total : 4 points et 4 segments de droites). **35)** Au voisinage de  $\underline{0}$  on a  $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) + (\beta/2)(x_1^2 + x_3^2) + O(\|\underline{x}\|^3)$ . Les trajectoires vérifient  $\psi(\underline{x}) = cste$  et sont alors des cercles pour  $\|\underline{x}\|$  petit. **36)** Au voisinage de  $B(-l, 0, -l)$  on pose  $x_1 = -l + y_1$  et  $x_3 = -l + y_3$  ce qui permet d'écrire  $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) \cos(-\pi/2 + ky_1) \cos(-\pi/2 + ky_3) = -\beta y_1 y_3 + O(\|y\|^3)$ . Les trajectoires vérifient  $\psi(\underline{x}) = cste$  et sont alors des hyperboles pour  $\|y\|$  petit. **37)** Par symétrie, les trajectoires autour des trois autres coins sont des hyperboles. En connectant les cercles du centre de la boîte aux hyperboles des quatre coins, les trajectoires décrivent un tourbillon. **38)** Comme le fluide est parfait et incompressible, on a  $\rho_0 \frac{d}{dt} \underline{U} = -\text{grad } p$  (Euler incompressible). D'où les trois équations  $\rho_0 \left( U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$ ,  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$  et  $\rho_0 \left( U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$ . Le calcul conduit à  $-\frac{1}{2} \rho_0 \beta \sin(2kx_1) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$  et  $-\frac{1}{2} \rho_0 \beta \sin(2kx_3) = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$ . D'où  $p(\underline{x}, t) = p_0 - \frac{1}{4}(\rho_0 \beta/k) [\cos(2kx_1) + \cos(2kx_3) - 2] - 2$ . **39)** Les quatre droites  $x_1 \pm x_3 = \pm l$  sont des isobares qui forment un carré inscrit à  $45^\circ$  dans la boîte. La dépression (D) du centre de la boîte est entourée d'isobares allant des cercles de son voisinage à ce carré inscrit. Les anticyclones (A) des quatre coins sont entourés d'isobares allant des cercles de leurs voisinages aux segments de ce carré inscrit. **40)** Les deux premiers mouvements sont les approximations du dernier autour du coin  $A_1$  (et donc des quatre coins par symétrie) et du centre  $D$ .

## E.10 Relation de saut et conservation de la masse

On considère un milieu de masse volumique  $\rho(\underline{x}, t)$  et animé d'une vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$ . On suppose que ces champs sont discontinus sur une surface mobile de vitesse  $\underline{W}(\underline{x}, t) = \underline{W}(\underline{x}, t) \underline{N}$ . On considère un domaine  $\mathcal{D}(t)$  transporté par le mouvement et on note  $\Sigma(t)$  son intersection avec la surface de discontinuité. On décompose alors  $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_1(t) \cup \mathcal{D}_2(t)$  en deux domaines de frontière  $\Sigma(t)$  (figure 9). On note  $\underline{N}$  la normale à la surface  $\Sigma$ , sortante par rapport à  $\mathcal{D}_1$ .

On suppose que la masse  $m[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\mathcal{D}(t)} \rho \, d^3x$  de tout domaine  $\mathcal{D}(t)$ , transporté par le mouvement, ne varie pas avec le temps  $t$ .

- 1) Écrire la formulation intégrale de la loi de conservation dans la masse.
- 2) Écrire sa formulation locale, sous forme d'une équation aux dérivées partielles dans les domaines où les champs sont continus.
- 3) On note  $\partial\mathcal{D}_1(t) = (\partial\mathcal{D}_1 - \Sigma)(t) \cup \Sigma(t)$  la frontière de  $\mathcal{D}_1(t)$ . On note  $\rho^{(1)}$  et  $\underline{U}^{(1)}$  les limites respectives de  $\rho$  et  $\underline{U}$  obtenues en faisant tendre un point de  $\mathcal{D}_1$  vers la surface  $\Sigma$ . Exprimer  $\frac{d}{dt} m[\mathcal{D}_1(t)]$  en faisant apparaître les flux cinématiques  $\rho \underline{U}$  et  $\rho^{(1)} \underline{U}$  sur les deux parties de la frontière de  $\mathcal{D}_1(t)$ .
- 4) Justifier la relation  $\iint_{\partial\mathcal{D}_1 - \Sigma} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{\partial\mathcal{D}_1} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} \, dS - \iint_{\Sigma} \rho^{(1)} \underline{U}^{(1)} \cdot \underline{N} \, dS$ .

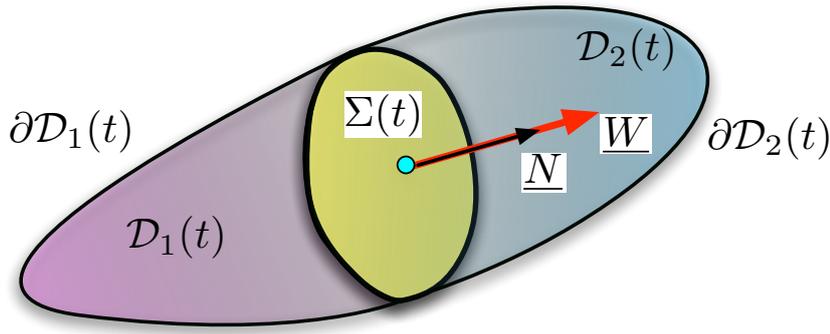


FIGURE 9 – Surface de discontinuité mobile  $\Sigma(t)$  de vitesse  $\underline{W} = W \underline{N}$ .

5) En déduire la relation de saut à travers la surface de discontinuité.

**Corrigé** Relation de saut et conservation de la masse

1) Pour tout domaine  $\mathcal{D}(t)$  transporté par le mouvement et tout  $t$ , on a  $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho d^3x = 0$ .

2) La formulation locale s'écrit  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$ . 3) On a

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_1(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x + \iint_{(\partial \mathcal{D}_1 - \Sigma)(t)} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iint_{\Sigma(t)} \rho \underline{W} \cdot \underline{N} dS$$

4) Il suffit d'invoquer la décomposition  $\partial \mathcal{D}_1 = (\partial \mathcal{D}_1 - \Sigma) \cup \Sigma$ . 5)  $\left[ \rho (\underline{U} - \underline{W}) \right] \cdot \underline{N} = 0$ .

**E.11** Écoulements de Poiseuille - Couette

On considère un écoulement fluide compris entre deux plans d'équations  $z = -l$  et  $z = l$  dans le repère orthonormé  $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ .

**Étude de l'écoulement de Poiseuille**

On considère un écoulement de Poiseuille défini par sa représentation eulérienne  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \beta (l^2 - z^2) \underline{e}_x$  du champ de vitesse dans le repère orthonormé  $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ . On choisit pour ce mouvement la configuration de référence  $\Omega_0 = \Omega(0)$  occupant le cube  $\|\underline{a}\| \leq l$  à l'instant  $t = 0$ .

On considère la trajectoire  $\underline{x}(t)$  définie par  $\underline{x}(t_*) = \underline{x}_*$ . Dans un premier temps, on choisit  $\underline{x}_* = -l \underline{e}_z$  et on considère la trajectoire  $\underline{x}'(t)$  définie par  $\underline{x}'(t_*) = \underline{x}_* + \delta l \underline{e}_z$  avec  $0 < \delta l < l$ . On note  $\underline{\delta x}(t)$  le vecteur défini par  $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ . On note  $\delta x(t)$  sa norme et  $\theta(t)$  l'angle qu'il fait avec l'axe  $Ox$ .

- 1) Dessiner la trajectoire  $\underline{x}(t)$  et le vecteur  $\underline{\delta x}(t)$  à des instants successifs  $t \geq t_*$ .
- 2) Pour  $\delta l$  fixé, calculer  $\delta x(t)$  et  $\theta(t)$  pour tout temps et indiquer le sens de variation de ces fonctions du temps.
- 3) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en  $(t - t_*) \ll 1$  de  $\delta x(t)$  et  $\theta(t)$  au voisinage de  $t = t_*$  pour  $\delta l$  fixé.

- 4) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en  $\delta l \ll 1$  de  $\delta x(t)/\delta l$  et  $\gamma(t) = \pi/2 - \theta(t)$  au voisinage de  $\delta l = 0$  pour  $t \geq t_*$  fixé.
- 5) Calculer le tenseur des taux de déformation  $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)$ . Relier les valeurs des composantes  $D_{33}$  et  $D_{13}$  aux résultats des questions 3 et 4.
- 6) Calculer le tenseur des taux de rotation  $\underline{\Omega}(\underline{x}_*, t_*)$  et le vecteur rotation  $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*)$ . Interpréter le résultat.
- 7) Déterminer la base de diagonalisation de  $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)$  et interpréter ses composantes dans cette base.
- 8) On suppose à présent que  $\underline{x}_* = \underline{0}$ . Reprendre les sept questions précédentes pour ce nouveau choix de  $\underline{x}_*$ .
- 9) Comparer les résultats obtenus pour  $\underline{x}_* = \underline{0}$  et  $\underline{x}_* = -l\underline{e}_z$ .

### Calculs énergétiques de Couette

On considère le champ de pression  $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$  et le champ de vitesse  $\underline{U}(z) = U(z) \underline{e}_x$  d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho_0$  et de viscosité cinématique  $\nu_n$ , avec  $U(z) = a z + b$ .

- 10) On suppose que  $U(-l) = 0$  et  $U(l) = U_0$ . En déduire  $a$  et  $b$ .
- 11) Calculer la puissance des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$  exercés dans le domaine  $\mathcal{D} = \{\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq D \text{ et } |z| \leq l\}$
- 12) Calculer la puissance  $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$  des efforts de contact extérieurs à  $\mathcal{D}$ .
- 13) Comparer les puissances  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ . Commenter.

### Corrigé Écoulements de Poiseuille - Couette

#### Étude de l'écoulement de Poiseuille

**1)** Pour  $\underline{x}_* = -l\underline{e}_z$ , la trajectoire  $x(t)$  est un point (adhérence à une paroi). Le vecteur  $\underline{\delta x}(t)$  fait un angle  $\theta(t_*) = \pi/2$  qui décroît vers 0 avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. **2)**  $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(2l - \delta l)^2(t - t_*)^2}$  et  $\theta(t) = \pi/2 - \arctg[\beta(2l - \delta l)(t - t_*)]$ . La fonction  $\delta x(t)$  est croissante, sa pente en  $t = t_*$  est nulle et tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini.  $\theta(t)$  est décroissante de  $\pi/2$  à 0. **3)**  $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$ . On a  $\theta(t) = \pi/2 - \beta(2l - \delta l)(t - t_*) + O[(t - t_*)^2]$ . **4)**  $\delta x(t)/\delta l = \sqrt{1 + (2\beta l)^2(t - t_*)^2} + O(\delta l^2)$ . On a  $\gamma(t) = \arctg[2\beta l(t - t_*)] + O(\delta l^2)$ . **5)** Seuls  $D_{13}(\underline{x}_*, t_*) = D_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$  sont non nuls. Au voisinage des points immobiles  $a_3 = -l$  et de  $t = t_*$ , les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement. L'angle de glissement du couple  $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$  croît avec une pente  $2\beta l$  au voisinage de  $t = t_*$ . En utilisant  $\frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} \Big|_{t_*} = D_{33}(\underline{x}_*, t_*)$  on voit que la nullité de  $D_{33}$  traduit la nullité de la pente de la fonction  $\delta x(t)$  au voisinage de  $t = t_*$ . Ce résultat est aussi visible dans le développement limité en  $t$  de  $\delta x(t)$ . En utilisant  $\frac{d}{dt} \gamma(t_*) = 2D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$  on voit que la valeur de  $D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$  se retrouve dans le développement limité en  $t$  de  $\gamma(t)$ . **6)** Seuls  $\Omega_{13}(\underline{x}_*, t_*) = -\Omega_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$  sont nuls. On a donc  $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l \underline{e}_y$ . Au voisinage des trajectoires  $a_3 = 0$  le taux de rotation égal à  $\beta l$  en valeur absolue et dans le sens trigonométrique inverse du plan  $Oxz$ . **7)** La base de diagonalisation de  $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)$  est engendrée par les vecteurs  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_z)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x - \underline{e}_z)$  et  $\underline{e}_y$ . Le taux de dilatation dans la direction  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x \pm \underline{e}_z)$  est  $\pm \beta l$ . **8)** Pour  $\underline{x}_* = \underline{0}$  la trajectoire  $x(t)$  est rectiligne. Le vecteur  $\underline{\delta x}(t)$  fait un angle  $\theta(t_*) = \pi/2$  qui croît vers  $\pi$  avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne.  $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(t - t_*)^2} \delta l^2$

et  $\theta(t) = \pi/2 + \text{arctg}[\beta(t - t_*)\delta l]$ . La fonction  $\delta x(t)$  est croissante, sa pente en  $t = t_*$  est nulle et tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini. La fonction  $\theta(t)$  est croissante de  $\pi/2$  à  $\pi$ . Le développement limité en temps est  $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$ . On a  $\theta(t) = \pi/2 + \beta(t - t_*)\delta l + O[(t - t_*)^2]$ . Le développement limité en  $\delta l$  est  $\delta x(t)/\delta l = 1 + O(\delta l^2)$ . On a  $\gamma(t) = -\beta(t - t_*)\delta l + O(\delta l^2)$ . On a  $\underline{\underline{D}}(x_*, t_*) = 0$ . Au voisinage des trajectoires  $a_3 = 0$ , et les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement et les angles de glissements des couples de vecteurs orthogonaux sont nuls. Ceci est conforme avec le fait que l'ordre 1 du développement limité en  $\delta l$  de  $\delta x(t)$  et  $\theta(t)$  est respectivement 1 et 0. On a  $\underline{\underline{\Omega}}(x_*, t_*) = \underline{\underline{0}}$  et  $\underline{\underline{\omega}}(x_*, t_*) = \underline{\underline{0}}$ . Au voisinage des trajectoires  $a_3 = 0$  le taux de rotation est nul. Toutes les bases diagonalisent la matrice nulle  $\underline{\underline{D}}$ . **9)** Le point  $\underline{x}_* = \underline{0}$  correspond à un extremum du profil de vitesse alors que le point  $\underline{x}_* = -l\underline{e}_z$  est représentatif d'un point quelconque. Au voisinage d'un extremum de vitesse il n'y a pas de déformation ( $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$ ) ni rotation ( $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$ ) à l'ordre 1.

### Calculs énergétiques de Couette

**10)** En résolvant  $al + b = U_0$  et  $-al + b = 0$ , on obtient  $a = \frac{U_0}{2l}$  et  $b = \frac{U_0}{2}$ . On retrouve l'écoulement de Couette. **11)** Le tenseur  $\underline{\underline{D}}$  est tel que  $D_{13} = D_{31} = U'(z)/2 = \frac{1}{4l}U_0$  et  $D_{ij} = 0$  sinon. Le tenseur des contraintes est  $\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho_0\nu_n\underline{\underline{D}}$ . On a  $\pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = -\rho_0\nu_n[U'(z)]^2$ . On en déduit que  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_nU_0^2$ . **12)** La force de contact en  $z = l$  est  $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_z = -p\underline{e}_z + \rho_0\nu_nU'(l)\underline{e}_x$ . On a donc  $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_nU_0^2$ . **13)** On remarque que  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = 0$ . En effet, cet écoulement de Couette est une solution des équations de Navier-Stokes incompressibles. On déduit la relation entre les puissances du théorème de l'énergie cinétique en remarquant que l'accélération  $\frac{dU}{dt}$  de cet écoulement est nulle.

## E.12 Rotation d'axe vertical

NB : bien qu'elles ne soient pas indispensables pour la résolution du problème, les formules suivantes relatives aux coordonnées cylindriques sont rappelées ici :

- $\text{grad } B(\underline{x}) = B_{,r} \underline{e}_r + \frac{1}{r}B_{,\theta} \underline{e}_\theta + B_{,z} \underline{e}_z$ ,
- $\underline{\underline{grad}} V = V_{r,r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}(V_{r,\theta} - V_\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{r,z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + V_{\theta,r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}(V_{\theta,\theta} + V_r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{\theta,z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + V_{z,r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}V_{z,\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{z,z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ ,
- $\text{div } \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r}V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}V_r + V_{z,z}$ ,
- $\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r}B_{,r} + \frac{1}{r^2}B_{,\theta\theta} + B_{,zz}$  et
- $\Delta \underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2V_{\theta,\theta}}{r^2} - \frac{V_r}{r^2}\right) \underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2V_{r,\theta}}{r^2} - \frac{V_\theta}{r^2}\right) \underline{e}_\theta + \Delta V_z \underline{e}_z$ .

### Rotation dans un solide

On considère un solide élastique homogène et isotrope dont la configuration de référence est exempte de contraintes et occupe le volume :

$$\Omega_0 = \{a \in \mathbb{R}^3 : 0 < R_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq R_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_3 \leq l\}.$$

On définit les coordonnées polaires  $(R, \Theta)$  dans la configuration de référence par le changement de variables  $(a_1, a_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$ . On définit ensuite les vecteurs de base par  $\underline{e}_R(\Theta) = \cos \Theta \underline{e}_1 + \sin \Theta \underline{e}_2$  et  $\underline{e}_\Theta(\Theta) = -\sin \Theta \underline{e}_1 + \cos \Theta \underline{e}_2$ .

On examine la déformation dont le champ de déplacement est  $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha R \underline{e}_\Theta(\Theta)$  en coordonnées polaires. On suppose que  $\alpha \ll 1$ .

- 1) Décrire et dessiner le volume  $\Omega$  occupé par la configuration déformée.
- 2) Exprimer les composantes de  $\underline{\xi}$  en coordonnées cartésiennes.
- 3) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette déformation.
- 4) Calculer les tenseurs des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{a})$  pour tout point de  $\Omega$ .

### Fluide incompressible avec surface libre

On considère un écoulement stationnaire à surface libre occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h(r) \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où  $R_m$  est le rayon de la cuve et  $h(r)$  le profil de la surface libre que l'on cherche à déterminer. Le champ de gravité  $-g \underline{e}_z$  est parallèle à l'axe de la cuve. On suppose que la cuve est remplie d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique homogène  $\rho_0$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , et qu'il est animé du mouvement stationnaire  $\underline{U}(r, \theta, z) = V(r) \underline{e}_\theta(\theta)$  où  $(r, \theta, z)$  sont les coordonnées cylindriques et  $V(r)$  un profil de vitesse. On suppose que le fluide est visqueux et que le mouvement vérifie  $V(r) = \omega r$ .

- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes en remplaçant le champ de vitesse par son expression.
- 6) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$  en fonction du champ de pression  $p$  pour l'instant indéterminé.
- 7) On suppose que la pression atmosphérique  $p_a$  est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation  $z = h(r)$  en supposant la continuité des forces de contact.
- 8) Montrer que le champ de pression s'écrit sous la forme  $p = p_c(z) + \beta(x^2 + y^2)$  où  $\beta$  est une constante que l'on explicitera.
- 9) Préciser le profil de pression  $p_c(z)$  en appliquant la condition aux limites en  $\underline{x} = h_0 \underline{e}_z$  en supposant que  $h(0) = h_0$  est connu.
- 10) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
- 11) On suppose  $\omega = .5$  Hz,  $R_m = 1$  m. Calculer la différence de hauteur maximale entre les points de la surface libre pour  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

### Fluide compressible à toit rigide

On considère un écoulement occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h_m \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où  $R_m$  et  $h_m$  sont respectivement le rayon et la hauteur de la cuve à toit rigide. Le champ de gravité est  $-g \underline{e}_z$ . On suppose que la cuve fermée est entièrement remplie d'un fluide parfait compressible et que l'ensemble est animé du mouvement de rotation solide  $\underline{U}(r, \theta, z) = \omega r \underline{e}_\theta(\theta)$  où  $(r, \theta, z)$  sont les coordonnées cylindriques. On suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire  $M$ . On suppose que la température  $T = T_0$  est homogène et on cherche le champ de masse volumique solution sous une forme  $\rho = \rho_e(r, z)$  qui ne dépend que de  $r$  et de  $z$ .

- 12) Écrire les équations d'Euler en remplaçant  $\underline{U}$  par sa valeur.
- 13) Montrer que l'hypothèse  $\rho = \rho_e(r, z)$  et le champ de vitesse proposé sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
- 14) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques en remplaçant le champ de vitesse par sa valeur.
- 15) En éliminant  $p$ , déduire des équations d'état et des équations d'Euler compressibles que la masse volumique est de la forme  $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$  où  $\alpha$  est une constante que l'on précisera.
- 16) On suppose que  $\rho(0, t) = \rho_e(0, 0) = \rho_0$  est connu. Donner l'expression du profil de masse volumique  $\rho_c(z)$  au centre de la cuve.
- 17) En déduire l'expression du champ de pression  $p(\underline{x}, t)$ .
- 18) Faire un tracé schématique des isobares dans un plan horizontal.

### Corrigé

**Rotation d'axe vertical**

#### Rotation dans un solide

1) On a  $\Omega \sim \Omega_0$ . C'est le volume compris entre deux cylindres de hauteur  $l$  de même axe et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . 2) On a  $\xi_1(\underline{a}) = -\alpha a_2$  et  $\xi_2(\underline{a}) = \alpha a_1$ . 3) On en déduit que  $\underline{H}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit  $\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \underline{0}$  (partie symétrique de  $\underline{H}$ ). 4) La loi de Hooke entraîne  $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} = \underline{0}$ .

#### Fluide incompressible avec surface libre

5) On a  $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\omega y \underline{e}_x + \omega x \underline{e}_y$  pour le champ de vitesse,  $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\omega^2 (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y)$  pour l'accélération et  $\Delta \underline{U} = \underline{0}$ . Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent  $\text{div} \underline{U} = 0$  et  $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p - g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$ . On vérifie que l'on a bien  $\text{div} \underline{U} = 0$ . Les équations de quantité de mouvement s'écrivent  $-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $-\omega^2 y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$  et  $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ . 6) Comme  $\underline{D}(\underline{x}, t) = \underline{0}$ , on a  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I}$ . 7) On doit avoir  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n}$  pour les points  $\underline{x}$  de la surface libre. On en déduit  $p(\underline{x}, t) = p_a$  pour ces points. 8) On déduit des équations de Navier-Stokes la relation  $p(\underline{x}, t) = p_c(z, t) + \beta (x^2 + y^2)$  avec  $\beta = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2$ . 9) En reportant dans l'équation de la quantité de mouvement verticale, on obtient  $\frac{\partial}{\partial z} p_c = -\rho_0 g$ , d'où  $p_c(z, t) = p_a - \rho_0 g (z - h_0)$ . 10) En appliquant la condition aux limites  $p = p_a$  à tous les points de la surface libre  $z = h(r)$ , on obtient  $0 = -g[h(r) - h_0] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$  et donc  $h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$ . La surface libre a la forme d'un paraboloïde de révolution. 11) La différence est  $h(R_m) - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R_m^2 \sim 1.3 \text{ cm}$ .

#### Fluide compressible à toit rigide

12) La loi de conservation de la masse s'écrit  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div} \underline{U}$ . Comme  $\text{div} \underline{U} = 0$ , on a donc  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . La loi de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide parfait (inviscible) s'écrit  $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - g \underline{e}_z$  avec  $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\omega^2 (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y)$ . 13) L'hypothèse  $\rho = \rho_e(r, z)$  entraîne bien  $\frac{d\rho}{dt} = \underline{U} \cdot \text{grad} \rho = \omega r \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_e(r, z) = 0$ . 14) Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent  $-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ ,  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$  et  $0 =$

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g$ . **15)** L'équation d'état entraîne  $p = \rho_e(r, z) \frac{R}{M} T_0$ . On en déduit  $\frac{R T_0}{M} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = \omega^2 r$  et donc  $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$  avec  $\alpha = \frac{R T_0}{M}$ . **16)** La relation hydrostatique entraîne  $\frac{R}{M} T_0 \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial z} \rho_c = -g$  et donc  $\rho_c(z) = \rho_0 e^{-\frac{g z}{\alpha}}$ . **17)** On a donc  $p = \alpha \rho_e(r, z)$  avec  $\rho_e(r, z) = \rho_0 \exp\left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z\right)\right]$ . **18)** Les isobares sont des cercles concentriques. Le minimum de pression est au centre.

### E.13 Écoulements cisailés instationnaires

On considère un fluide newtonien incompressible compris entre deux plaques planes infinies respectivement situées en  $z = -l$  et  $z = l$  (figure 10) dans le repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . La gravité est  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ . On note  $\rho$  la masse volumique du fluide, supposé homogène et  $\nu_n$  sa viscosité cinématique. On note  $L_x$  et  $L_y$  deux longueurs et on définit  $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a_1 \leq L_x, 0 \leq a_2 \leq L_y \text{ et } |a_3| \leq l\}$ .

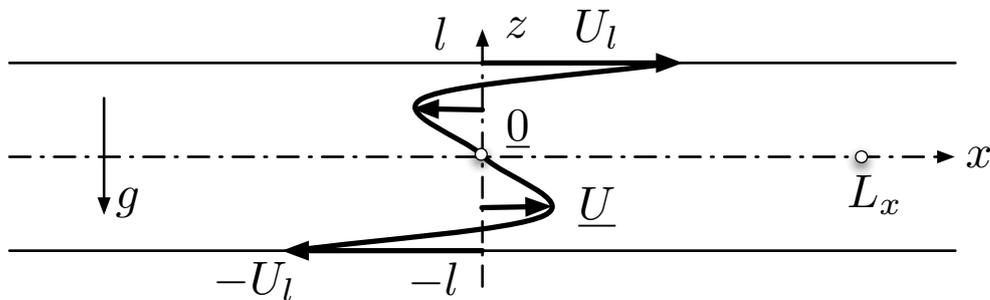


FIGURE 10 – Écoulement cisailé forcé par des vitesses de parois instationnaires.

On note  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  le champ de vitesse et  $p(\underline{x}, t)$  le champ de pression. On suppose que  $p(0, t) = p(L_x \underline{e}_x, t) = p_r$  pour tout temps  $t$  où  $p_r$  est constant. On suppose que les parois sont animées des vitesses respectives  $U_l(t) \underline{e}_x$  en  $z = l$  et  $-U_l(t) \underline{e}_x$  en  $z = -l$ .

#### Écoulement de Couette stationnaire

On suppose ici que  $U_l = U_*$  ne dépend pas du temps.

- 1) Montrer que  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \gamma z \underline{e}_x$  est solution des équations de Navier-Stokes stationnaires et indiquer la valeur de  $\gamma$ . Donner l'expression de la pression  $p$ .
- 2) Calculer les déformations directe  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  et inverse  $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$  associées.
- 3) On considère le domaine  $\mathcal{D}_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a_1^2 + a_3^2 \leq l \text{ et } 0 \leq a_2 \leq L_y\}$ . Dessiner et identifier la forme de l'image  $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$  de  $\mathcal{D}_0$  au temps  $t$ .
- 4) On s'intéresse au temps  $t_* = l/(\sqrt{2} U_*)$ . Déterminer le couple de directions orthogonales  $(\underline{e}_g, \underline{e}_p)$  dans le plan  $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$  dont l'angle de glissement est nul pour la déformation  $\underline{X}(\underline{a}, t_*)$ . Dessiner les images des segments de droites d'équations paramétrées  $r \underline{e}_g$  et  $r \underline{e}_p$  pour  $r \in [-l, l]$  en supposant  $\|\underline{e}_g\| = \|\underline{e}_p\| = 1$ .
- 5) Calculer le couple de directions orthogonales  $(\underline{e}_+, \underline{e}_-)$  dont le taux de glissement est nul. En déduire le tracé de  $\mathcal{D}(\delta t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, \delta t)$  lorsque  $\delta t$  est petit.
- 6) Calculer la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]$  exercés sur les particules occupant le domaine  $\Omega(0) = \Omega_0$  au temps  $t = 0$ .

- 7) Donner l'expression de la densité volumique  $\pi_{\text{int}}$  de la puissance des efforts intérieurs puis en déduire  $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)]$ . Comparer avec la question précédente et commenter.

**Cisaillement exponentiellement croissant**

On suppose ici que  $U_l(t) = U_* e^{\sigma t}$  avec  $\sigma > 0$ .

- 8) Montrer que  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\text{sh}(kz)}{\text{sh}(kl)} U_* e^{\sigma t} \underline{e}_x$  est une solution des équations de Navier-Stokes instationnaires pour une valeur de  $k$  que l'on déterminera. Donner l'expression de la pression  $p$ .
- 9) Exprimer les forces de contact  $\underline{T}$  sur la paroi située en  $z = l$ .
- 10) Calculer la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]$  exercée sur les particules fluides issues de  $\Omega_0$  et transportées par le mouvement  $\underline{U}(\underline{x}, t)$ .
- 11) Calculer la densité volumique  $\pi_{\text{int}}$  de la puissance des efforts intérieurs.
- 12) Exprimer  $\text{ch}^2(kz) + \text{sh}^2(kz)$  en fonction de  $\text{ch}(2kz)$  puis calculer  $\int_{-l}^l \text{ch}(2kz) dz$ .
- 13) En déduire l'expression de  $\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\Omega(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)]$  où  $\mathcal{K}[\Omega(t)]$  est l'énergie cinétique. Comparer cette expression avec celle de  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]$  et commenter.

**Cisaillement oscillant**

On suppose ici que  $U_l(t) = U_* \cos(\omega t)$  avec  $\omega > 0$ .

- 14) On rappelle que  $S = \text{sh}(a + ib)$  est égal à  $\frac{1}{2}(e^{a+ib} - e^{-a-ib})$ . Si  $a, b$  et  $\gamma$  sont réels, relier  $\text{Re}(S e^{i\gamma})$  à l'expression  $e^a \cos(b + \gamma) - e^{-a} \cos(b - \gamma)$ .
- 15) Montrer que la fonction complexe  $\widehat{U}(z, t) = U_* e^{i\omega t} \text{sh}[(1+i)kz] / \text{sh}[(1+i)kl]$  est solution de l'équation  $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} = \nu_n \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2}$  pour une valeur de  $k > 0$  que l'on précisera.
- 16) Vérifier  $\text{sh}[(1+i)kl] = R e^{i\varphi}$  pour  $R = \sqrt{\text{ch}^2(kl) - \cos^2(kl)}$  et  $\varphi = \text{Arctan} \left[ \frac{\tan(kl)}{\text{th}(kl)} \right]$ .
- 17) En déduire l'expression de la solution périodique réelle  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  des équations de Navier-Stokes en fonction de  $U_*, R, e^{\pm kz}$  et  $\cos[kz \pm (\omega t - \varphi)]$ .
- 18) En déduire les forces de contact  $\underline{T}(\underline{x}, t)$  sur la paroi située en  $z = l$ .
- 19) Montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos(\theta + \psi) d\theta = \frac{\cos \psi}{2}$  pour tout  $\psi$ . Exprimer les modules  $|\text{ch}(a + ib)|$  et  $|\text{sh}(a + ib)|$  à l'aide de  $A = \sqrt{\text{ch}^2 a - \sin^2 b}$  ou  $B = \sqrt{\text{ch}^2 a - \cos^2 b}$ . Vérifier pour au moins un cas particulier que l'argument  $\psi = \arg \left[ \frac{(1+i)\text{ch}(a+ib)}{\text{sh}(a+ib)} \right]$  vérifie  $\cos \psi = \frac{C}{\sqrt{2}D}$  avec  $C = \text{sh}(2a) + \sin(2b)$  avec  $D = \sqrt{\text{ch}^2(2a) - \cos^2(2b)}$ . On admettra cette relation sans démonstration.
- 20) Calculer la puissance moyenne  $P = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)] dt$  avec  $T = 2\pi/\omega$ . Quelle est la puissance moyenne transformée en chaleur ?

## Corrigé

 Écoulements cisailés instationnaires

### Écoulement de Couette stationnaire

**1)** On a trivialement  $\text{div } \underline{U} = 0$ . Comme  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{0}$  et  $\Delta \underline{U} = \underline{0}$ , l'équation de quantité de mouvement s'écrit  $\underline{0} = -\text{grad } p - \rho g \underline{e}_z$ . On en déduit  $p = p_r - \rho g z$ . Les conditions aux limites  $\underline{U} = \pm U_* \underline{e}_x$  en  $z = \pm l$  imposent  $\gamma = U_*/l$ . **2)** La déformation  $\underline{X}$  est définie par  $x = a_1 + \gamma a_2 t$ ,  $y = a_2$  et  $z = a_3$ . La déformation inverse  $\underline{A}$  est définie par  $a_1 = x - \gamma z t$ ,  $a_2 = y$  et  $a_3 = z$ . **3)** On a  $\mathcal{D}(t) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \gamma z t)^2 + z^2 = l^2 \text{ et } 0 \leq y \leq L_y\}$ . C'est un cylindre d'axe  $y$  dont la section est une ellipse. **4)** Les composantes du tenseur des dilatations  $\underline{C}(\underline{a}, t)$  sont  $C_{11} = 1$ ,  $C_{13} = C_{31} = \gamma t$ ,  $C_{33} = 1 + (\gamma t)^2$  et  $C_{ij} = 0$  sinon. Pour  $\gamma t_* = 1/\sqrt{2}$ , ses valeurs propres  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$  et  $C_3 = 1/2$  sont respectivement associées aux vecteurs propres  $\underline{e}_g$ ,  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_p$  avec  $\underline{e}_g = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{e}_x + \sqrt{2}\underline{e}_z)$  et  $\underline{e}_p = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}\underline{e}_x + \underline{e}_z)$ . Les images de  $l\underline{e}_g$  et  $l\underline{e}_p$  par la jacobienne  $\underline{F}(\underline{a}, t_*) = \underline{I} + \gamma t_* \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z$  sont les vecteurs  $\frac{1}{\sqrt{3}} l (2\underline{e}_x + \sqrt{2}\underline{e}_z)$  et  $\frac{1}{3} l (-1/\sqrt{2}\underline{e}_x + \underline{e}_z)$ . L'image des segments forment respectivement les grand et petit axes de l'ellipse tracée précédemment. **5)** Le tenseur des taux de déformations est  $\underline{D} = \frac{1}{2}\gamma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$ . Ses valeurs propres  $D_1 = \gamma/2$ ,  $D_2 = 0$  et  $D_3 = -\gamma/2$  sont respectivement associées aux vecteurs propres  $\underline{e}_+ = (\underline{e}_x + \underline{e}_z)/\sqrt{2}$ ,  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_- = (\underline{e}_x - \underline{e}_z)/\sqrt{2}$ . On en déduit que le taux de glissement des directions orthogonales  $(\underline{e}_+, \underline{e}_-)$  est nul. Le tracé de  $\mathcal{D}(\delta t)$  est une ellipse dont les grand et petits axes sont respectivement dans les directions  $\underline{e}_+$  et  $\underline{e}_-$ . **6)** Comme  $\underline{U} = \gamma z \underline{e}_x$  et  $\underline{f} = -\rho g \underline{e}_z$  sont orthogonaux, la puissance des forces extérieures de volume  $\mathcal{P}_{\text{extvol}}[\Omega(t)]$  est nulle. Comme le tenseur des contraintes est  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\rho\nu_n \underline{D}$ , on a  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \rho\nu_n \gamma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$ , les forces de contact exercées par la paroi en  $z = l$  sur le fluide s'écrivent  $\underline{T} = -(p_r - \rho g l)\underline{e}_z + \rho\nu_n \gamma \underline{e}_x$ . En prenant en compte la paroi située en  $z = -l$  par symétrie, on déduit que  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)] = \mathcal{P}_{\text{extcont}}[\Omega(t)] = 2\rho\nu_n \gamma^2 l L_x L_y = 2\rho\nu_n U_*^2 L_x L_y / l$ . **7)** On a  $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D} = -\rho\nu_n \gamma^2 = -\rho\nu_n U_*^2 / l^2$ . On en déduit  $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] = -2\rho\nu_n U_*^2 L_x L_y / l$ . Dans la mesure où l'énergie cinétique  $\mathcal{K}[\Omega(t)]$  est constante, le théorème de l'énergie cinétique entraîne  $\mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] + \mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)] = 0$ , ce que confirment les expressions trouvées.

### Cisaillement exponentiellement croissant

**8)** Comme  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \sigma \underline{U}$  et  $\Delta \underline{U} = k^2 \underline{U}$ , on a  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \nu_n \Delta \underline{U}$  et  $0 = -\text{grad } p - \rho g \underline{e}_z$  si  $k = \sqrt{\sigma/\nu_n}$  et  $p = p_r - \rho g z$ . **9)** Comme  $\underline{D} = \frac{k}{2} \frac{\text{ch}(kz)}{\text{sh}(kl)} U_* e^{\sigma t} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$  et  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\rho\nu_n \underline{D}$ , on a  $\underline{T} = -(p_r - \rho g l)\underline{e}_z + k\rho\nu_n \coth(kl) U_* e^{\sigma t} \underline{e}_x$ . **10)** On en déduit  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)] = 2\rho\nu_n U_*^2 e^{2\sigma t} L_x L_y k / \text{th}(kl)$ . **11)** On a  $-\pi_{\text{int}} = \underline{\sigma} : \underline{D} = 2\rho\nu_n \underline{D} : \underline{D} = \rho\nu_n U_*^2 e^{2\sigma t} \text{ch}^2(kz) k^2 / \text{sh}^2(kl)$ . **12)** On a  $\text{ch}(2kz) = \text{ch}^2(kz) + \text{sh}^2(kz)$  et  $\int_{-l}^l \text{ch}(2kz) dz = \frac{1}{2k} [\text{sh}(2kz)]_{-l}^l = \text{sh}(2kl)/k$ . **13)** Comme  $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho U_*^2 e^{2\sigma t} L_x L_y \int_{-l}^l \frac{\text{sh}^2(kz)}{\text{sh}^2(kl)} dz$ ,  $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\rho\nu_n k^2 U_*^2 e^{2\sigma t} L_x L_y \int_{-l}^l \frac{\text{ch}^2(kz)}{\text{sh}^2(kl)} dz$  et que  $\sigma = \nu_n k^2$ , on a  $\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\Omega(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] = \rho\nu_n k^2 U_*^2 e^{2\sigma t} L_x L_y \int_{-l}^l \frac{\text{ch}(2kz)}{\text{sh}^2(kl)} dz = 2\rho\nu_n U_*^2 e^{2\sigma t} L_x L_y k / \text{th}(kl)$ . On retrouve ici l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]$ , ce qui permet de vérifier le "théorème" de l'énergie cinétique.

### Cisaillement oscillant

**14)** On a  $2 \text{Re}(S e^{i\gamma}) = e^a \cos(b + \gamma) - e^{-a} \cos(b - \gamma)$ . **15)** Comme  $\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = i\omega \hat{U}$  et  $\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial z^2} =$

$2ik^2 \widehat{U}$ , l'équation  $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} = \nu_n \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2}$  est vérifiée pour  $k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu_n}}$ . **16)** Comme on a  $\text{sh}[(1+i)kl] = \text{sh}(kl) \cos(kl) + i \text{ch}(kl) \sin(kl)$ , on a  $R^2 = \text{sh}^2(kl) \cos^2(kl) + \text{ch}^2(kl) \sin^2(kl)$ . En utilisant  $\cos^2(kl) + \sin^2(kl) = 1$  et  $\text{ch}^2(kl) - \text{sh}^2(kl) = 1$ , on obtient  $R^2 = \text{ch}^2(kl) - \cos^2(kl)$ . L'argument de  $\text{sh}[(1+i)kl]$  vérifie  $\tan \varphi = \tan(kl)/\text{th}(kl)$ . **17)** La partie réelle  $U(z, t) = \text{Re} [\widehat{U}(z, t)]$  de cette solution complexe vérifie  $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} = \nu_n \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2}$ . La vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t) = U(z, t) \underline{e}_x$  est donc solution des équations de Navier-Stokes en choisissant  $p = p_r - \rho g z$  pour la pression. En utilisant les relations trigonométriques démontrées dans les questions précédentes, on peut écrire  $U(z, t) = \frac{U_*}{R} [e^{kz} \cos(kz + \omega t - \varphi) - e^{-kz} \cos(kz - \omega t + \varphi)]$ . **18)** On a  $\underline{T} = -(p_r - \rho g l) \underline{e}_z + \rho \nu_n \frac{\partial U}{\partial z}(l, t) \underline{e}_x$  avec, en posant  $\alpha(t) = \omega t + kl - \varphi$  et  $\beta(t) = \omega t - kl - \varphi$ , l'expression  $\frac{\partial U}{\partial z}(l, t) = \frac{kU_*}{R} [e^{kl} \cos \alpha(t) - e^{kl} \sin \alpha(t) + e^{-kl} \cos \beta(t) - e^{-kl} \sin \beta(t)]$ . **19)** Comme  $\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$ , on a  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos(\theta + \psi) d\theta = \frac{\cos \psi}{2}$ . On a  $|\text{ch}(a + ib)|^2 = A^2$  et  $|\text{sh}(a + ib)|^2 = B^2$ . Dans le cas particulier  $b = 0$ , on a  $C^2 = \text{sh}^2(2a)$  et donc  $\cos \psi = 1/\sqrt{2}$ . L'argument de  $(1+i)$  est bien  $\psi = \pi/4$ . **20)** On a  $\widehat{U}(l, t) = U_* e^{i\omega t}$  et  $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial z}(l, t) = U_* k (1+i) \frac{\text{ch}[(1+i)kl]}{\text{sh}[(1+i)kl]} e^{i\omega t}$ , on peut écrire  $\frac{1}{T} \int_0^T U(l, t) \frac{\partial U}{\partial z}(l, t) dt = \frac{1}{2} |\widehat{U}(l, t)| \left| \frac{\partial \widehat{U}}{\partial z}(l, t) \right| \cos \psi$  où  $\psi$  est le déphasage entre les deux signaux. Donc  $P = \rho \nu_n U_* \left| \frac{\partial \widehat{U}}{\partial z}(l, t) \right| L_x L_y \cos \psi$  et l'utilisation des formules trigonométriques précédentes conduit à  $P = \rho \nu_n U_*^2 L_x L_y k \frac{AC}{BD}$  avec  $A = \sqrt{\text{ch}^2(kl) - \sin^2(kl)}$ ,  $B = \sqrt{\text{ch}^2(kl) - \cos^2(kl)}$ ,  $C = \text{sh}(2kl) + \sin(2kl)$  et  $D = \sqrt{\text{ch}^2(2kl) - \cos^2(kl)}$ . Comme  $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \mathcal{K}[\Omega(t)] dt = 0$ , le théorème de l'énergie cinétique indique que la puissance moyenne dissipée est  $-\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_{\text{int}}[\Omega(t)] dt$  est égale à  $P = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)] dt$ .

### E.14 Perte de charge

On considère ici des fluides newtoniens dont l'écoulement peut être considéré comme incompressible. On suppose que la masse volumique  $\rho$  est constante et on note  $\nu_n$  la viscosité cinématique. On note  $\underline{U}$  la vitesse de l'écoulement et  $p$  la pression. On suppose que les forces extérieures de volume  $\underline{f} = -\rho g \underline{e}_z$  sont les forces de gravité dans le repère orthonormé  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ .

On définit la "charge hydraulique"  $H$  par la relation  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$  et le "vecteur perte de charge linéique due aux forces visqueuses"  $\underline{J}$  par la relation  $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \text{div} \underline{\tau}$  où  $\underline{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

#### Charge hydraulique

On note  $\underline{A} = \text{grad} (\underline{U}^2)$ ,  $\underline{B} = \text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U}$  et  $\underline{C} = \underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U}$ .

- 1) Exprimer les composantes  $A_i$  et  $C_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  en fonction des sommes  $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  ou  $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ .
- 2) Exprimer  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{C}$  en fonction de  $\underline{K}$ ,  ${}^t \underline{K}$  et  $\underline{U}$  avec  $\underline{K} = \text{grad} \underline{U}$ .
- 3) En déduire l'expression des composantes  $B_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  en fonction des sommes  $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  ou  $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ .

- 4) Montrer que  $\underline{C} = \alpha \underline{A} + \beta \underline{B}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que l'on précisera.
- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes en utilisant les notations  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\text{grad}(z)$ ,  $p(x, z)$  et  $\underline{J}$ . En déduire que l'on a la relation

$$\text{grad } H = -\underline{J} - \frac{1}{g} \underline{B} - \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}. \quad (16)$$

### Écoulement de Poiseuille plan

On suppose ici que l'écoulement est compris entre deux plaques planes situées en  $z = 0$  et  $z = 2h$  où  $h$  est une constante (figure 11). On suppose que la vitesse est de la forme  $\underline{U} = u(z) \underline{e}_x$  et qu'elle s'annule sur les parois horizontales.

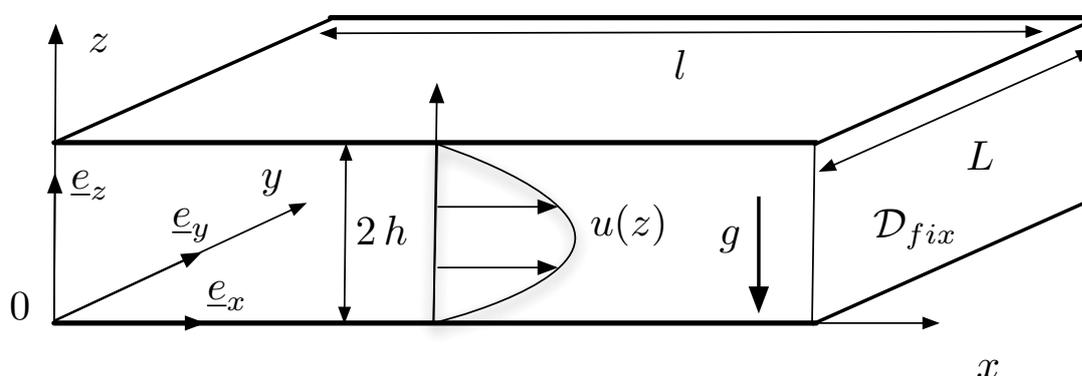


FIGURE 11 – Écoulement de Poiseuille plan.

- 6) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses énoncées et en projetant sur les axes.
- 7) On suppose que  $p(0, 0) = p_r$  et que le gradient de pression horizontal  $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$  est constant. En déduire l'expression de  $p(x, z)$  en fonction de  $x$  et de  $z$ .
- 8) Montrer que  $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$  où  $J$ , la perte de charge linéique due aux frottements, est définie par  $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$ . En déduire que  $J$  est constant et donner son expression en fonction de l'intensité  $G$  du forçage de l'écoulement.
- 9) Calculer  $u(z)$  et tracer ce profil.
- 10) Donner l'expression du tenseur des taux de déformation  $\underline{D}$ .
- 11) Donner l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ .
- 12) Exprimer la fonction  $\tau(z) = {}^t \underline{e}_x \underline{\sigma} \underline{e}_z$  en fonction de  $G$ ,  $h$  et  $z$ . Tracer son profil en fonction de  $z$ .
- 13) On considère le domaine fixe  $\mathcal{D}_{\text{fix}}$  défini par les inégalités  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq L$  et  $0 \leq z \leq 2h$ . Exprimer les forces de contact  $\underline{T}(x, \underline{n})$  exercées sur chacune des faces de ce parallélépipède en fonction de  $\tau(0)$ ,  $\tau(2h)$ ,  $\tau(z)$ ,  $p(0, z)$ ,  $p(l, z)$ ,  $p(x, 0)$ ,  $p(x, 2h)$  et  $p(x, z)$ .
- 14) On note  $\tau_* = \tau(0)$ . Exprimer en fonction de  $\tau_*$  les contraintes tangentielles  $\tau_0$  et  $\tau_{2h}$  exercées par le fluide sur les parois situées respectivement en  $z = 0$  et  $z = 2h$ .
- 15) Exprimer  $\underline{F}_z = -\left(\int_{\partial \mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\sigma} \underline{n} dS\right) \cdot \underline{e}_z$  en fonction de  $\tau_*$ , de  $\rho g$  et des paramètres géométriques de  $\mathcal{D}_{\text{fix}}$ . Que représente cette grandeur ?

- 16) Exprimer  $\mathbb{F}_x = - \left( \iint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS \right) \cdot \underline{e}_x$  en fonction de  $\tau_*$  et des paramètres géométriques de  $\mathcal{D}_{\text{fix}}$ . Que représente cette grandeur ?
- 17) Comparer  $- \left( \iint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \text{div} \underline{\tau} \, d^3x \right) \cdot \underline{e}_x$  à  $\mathbb{F}_x$ . Exprimer alors ces deux grandeurs en fonction de  $J$ .
- 18) Dédire des questions précédentes la relation  $\tau_* = \rho g R_H J$  où  $R_H/h$  est une constante dont on donnera la valeur. Vérifier cette relation en remplaçant  $\tau_*$  et  $J$  par leurs expressions en fonction de  $G$ .
- 19) Calculer la vitesse moyenne  $U = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u(z) \, dz$ .
- 20) On note  $D_H = 4h$ . Montrer que l'on peut écrire la "loi de Darcy"  $U = -K_p \frac{dH}{dx}$  où  $K_p$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $D_H, \nu_n$  et  $g$ .
- 21) On définit le coefficient de frottement  $\lambda$  par la relation  $J = \lambda \frac{U^2}{2g D_H}$ . Exprimer  $\lambda$  en fonction du "nombre de Reynolds"  $Re = U D_H / \nu_n$ .

**Corrigé**    Perte de charge

**Charge hydraulique**

1) On a  $A_i = 2 U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$  et  $C_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ . 2) On a  $\underline{A} = 2 {}^t \underline{K} \underline{U}$ ,  $\underline{B} = 2 \underline{\Omega} \underline{U} = (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \underline{U}$  et  $\underline{C} = \underline{K} \underline{U}$ . 3) On en déduit  $B_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ . 4) On a  $\underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U} = \underline{K} \underline{U} = {}^t \underline{K} \underline{U} + (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad} \left( \underline{U}^2 \right) + \text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U}$ . On a donc  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 1$ . 5) Les équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cas stationnaire et bidimensionnel s'écrivent  $\frac{1}{2} \text{grad} \left( \underline{U}^2 \right) + \text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} (gz) - g \underline{J}$ . On en déduit  $\text{grad} H = -\underline{J} - \frac{1}{g} \underline{B} - \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$  avec  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$ .

**Écoulement de Poiseuille plan**

6) On a bien  $\text{div} \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . La conservation de la quantité de mouvement conduit à  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n u''(z)$ ,  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$  et  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ . 7) On en déduit  $p = p_r - Gx - \rho g z$ . 8) En multipliant la relation  $\text{grad} H = -\underline{J} - \frac{1}{g} \underline{B} - \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$  par  $\underline{e}_x$  on obtient  $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$  car  $\underline{B} \cdot \underline{U} = (\text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot \underline{U} = 0$  et  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = 0$ . Comme  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{G}{\rho g}$ , on a  $J = \frac{G}{\rho g}$ . 9) En intégrant  $0 = \frac{G}{\rho} + \nu_n u''(z)$  et en utilisant les conditions aux limites  $u(0) = u(2h) = 0$ , on obtient  $u(z) = \frac{G}{2\rho\nu_n} (2h - z)z$ . Le profil est une parabole. 10) On a  $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2} u'(z) = \frac{G}{2\rho\nu_n} (h - z)$  et  $D_{ij} = 0$  sinon. 11) On a  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \rho \nu_n u'(z) = G(h - z)$  et  $\sigma_{ij} = 0$  sinon. 12) On a  $\tau(z) = \rho \nu_n u'(z) = G(h - z)$ . Son profil est une droite. 13) Sur les faces de normales  $\underline{e}_x, -\underline{e}_x, \underline{e}_y, -\underline{e}_y, \underline{e}_z$  et  $-\underline{e}_z$ , les forces de contact sont respectivement  $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z) \underline{e}_x + \tau(z) \underline{e}_z$ ,  $\underline{T}(0, y, z, -\underline{e}_x) = p(0, z) \underline{e}_x - \tau(z) \underline{e}_z$ ,  $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z) \underline{e}_y$ ,  $\underline{T}(x, 0, z, -\underline{e}_y) = p(x, z) \underline{e}_y$ ,  $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h) \underline{e}_z + \tau(2h) \underline{e}_x$  et  $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0) \underline{e}_z - \tau(0) \underline{e}_x$ . 14) On a  $\tau_* = \tau(0) = Gh$ ,  $\tau_0 = \tau(0) = \tau_*$  et  $\tau_{2h} = -\tau(2h) = -\tau_*$ . 15) On a  $\mathbb{F}_z = -\rho g (2hlL)$ . Cette force est égale au poids du fluide. 16) On a  $\mathbb{F}_x = 2\tau_*(lL)$ . C'est la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi. 17) En appliquant le théorème de la divergence, on a  $\mathbb{F}_x = - \left( \iint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \text{div} \underline{\tau} \, d^3x \right) \cdot \underline{e}_x$ . Par définition, on a  $\text{div} \underline{\tau} = -\rho g \underline{J}$ . Comme  $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$  est constant, on a  $\mathbb{F}_x = \rho g \left( \iint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} J \, dx^3 \right) \cdot \underline{e}_x = \rho g J (2hlL)$ . 18) On en déduit  $\tau_* = \rho g R_H J$  avec  $R_H = h$ . Cette relation est compatible avec les expressions  $\tau_* = Gh$  et  $J = G/(\rho g)$ . 19) On a  $U = Gh^2/(3\rho\nu_n)$ . 20) On a

$K_p = D_H^2 g / (48 \nu_n)$ . **21)** On a  $\lambda = 96 / Re$ .

### E.15 Mouvement gravitaire sur un plan incliné

On considère un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On choisit le repère orthonormé  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  de telle sorte que l'axe  $Ox_1$  soit parallèle au plan incliné et le vecteur  $\underline{e}_3$  perpendiculaire à ce plan. On note  $\underline{g} = g [\sin \alpha \underline{e}_1 - \cos \alpha \underline{e}_3]$  le vecteur gravité. On s'intéresse aux mouvements de milieux continus, solides ou fluides situés sur ce plan incliné sous l'action de la gravité.

On suppose que les milieux continus considérés occupent le domaine  $\Omega$  constitué des points  $\underline{x}$  tels que  $0 \leq x_3 \leq h$  où  $h$  est une constante. On suppose que la vitesse  $\underline{U}$  ou le déplacement  $\underline{\xi}$  sont nuls pour  $x_3 = 0$  et que la surface libre d'équation  $x_3 = h$  est en contact avec un gaz au repos de pression constante  $p_a$ .

#### Écoulement fluide

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible défini, dans le domaine  $\Omega$ , par le champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  de composantes

$$U_1 = U(x_3), \quad U_2 = 0 \quad \text{et} \quad U_3 = 0, \quad (17)$$

où  $U(x_3)$  est une fonction inconnue indépendante du temps. On note  $\rho_0$  la masse volumique et  $\nu_n$  la viscosité cinématique de ce fluide.

- 1) Calculer le champ d'accélération  $\frac{d\underline{U}}{dt}$ .
- 2) Exprimer le tenseur des taux de déformation  $\underline{D}$  en fonction de la dérivée  $U'(x_3)$ .
- 3) En déduire l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  en notant  $p(\underline{x}, t)$  le champ de pression.
- 4) En déduire l'expression du champ de vecteurs  $\underline{\text{div}} \underline{\sigma}$ .
- 5) Exprimer les trois composantes du champ de vecteur  $\rho_0 \underline{g} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$ . En déduire trois équations aux dérivées partielles faisant intervenir  $p(\underline{x}, t)$  et  $U(x_3)$ .
- 6) Calculer la force de contact  $\underline{T}_h$  exercée par le gaz de pression  $p_a$  sur le fluide. En déduire la valeur de la pression en  $z = h$  et de  $U'(h)$ .
- 7) Montrer que  $p = A + B x_3$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes que l'on déterminera, est solution des équations du mouvement.
- 8) Exprimer  $U(x_3)$  en fonction de  $\alpha, g, h, \nu_n$  et  $x_3$ .
- 9) Tracer schématiquement cette fonction pour  $x_3 \in [0, h]$ .
- 10) En déduire la force de contact  $\underline{T}_0$  exercées par la paroi sur le fluide. Représenter schématiquement cette force sur un graphe.

#### Déformation solide

On considère la petite déformation du solide élastique définie, dans le domaine  $\Omega$ , par le champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$  de composantes

$$\xi_1 = \xi(x_3), \quad \xi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \xi_3 = \zeta(x_3). \quad (18)$$

On note  $\rho_s$  la masse volumique du solide et  $\lambda$  et  $\mu$  ses coefficients de Lamé.

- 11) Exprimer le tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  en fonction des dérivées  $\xi'(x_3)$  et  $\zeta'(x_3)$ .
- 12) En déduire l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ .
- 13) Exprimer les composantes du vecteur  $\rho_s \underline{g} + \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}$ . En déduire une équation différentielle ordinaire pour  $\xi(x_3)$  et  $\zeta(x_3)$ .
- 14) Calculer la force de contact  $\underline{T}_h$  exercée par le gaz de pression  $p_a$  sur le solide. En déduire les valeurs de  $\xi'(h)$  et  $\zeta'(h)$ .
- 15) Exprimer  $\xi(x_3)$  et  $\zeta(x_3)$  en fonction de  $g, h, \alpha, \lambda$  et  $\mu$ .
- 16) Tracer schématiquement ces fonctions pour  $x_3 \in [0, h]$ .
- 17) Calculer la force de contact  $\underline{T}_0$  exercée par le plan incliné sur le solide élastique. Représenter schématiquement cette force sur un graphe.
- 18) Comparer avec le cas de l'écoulement fluide traité dans la question 10.

### Interaction entre fluide et solide

On suppose maintenant que le milieu continu est constitué du fluide newtonien pour  $0 \leq x_3 \leq h_*$  et du solide élastique pour  $h_* \leq x_3 \leq h$ . On suppose que  $\underline{U} = U(x_3) \underline{e}_1$  est le champ de vitesse du fluide et  $\underline{\xi} = [U_* t + \xi(x_3)] \underline{e}_1 + \zeta(x_3) \underline{e}_3$  est le champ de déplacement du solide en petite déformation, la constante  $U_*$  et les fonctions  $U(x_3), \xi(x_3)$  et  $\zeta(x_3)$  étant inconnues.

- 19) On suppose que  $\xi(h_*) = 0$  et  $\zeta(h_*) = 0$ . Calculer  $\xi(x_3)$  et  $\zeta(x_3)$  en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement ainsi que la continuité des forces de contact à la surface libre d'équation  $x_3 = h$ .
- 20) En déduire l'expression des forces de contacts  $\underline{T}_*$  exercées par le solide sur le fluide à l'interface d'équation  $x_3 = h_*$ .
- 21) Le champ de vitesse et le champ de déplacement sont continus à l'interface entre le fluide et le solide. En déduire que  $U(h_*) = U_*$ . En utilisant la condition aux limites  $U(0) = 0$  ainsi que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, exprimer  $U(x_3)$  en fonction de  $U_*$ .
- 22) En déduire l'expression de la projection  $\underline{e}_1 \cdot \underline{T}_*$  des forces de contacts  $\underline{T}_*$  exercées par le solide sur le fluide à l'interface d'équation  $x_3 = h_*$  en fonction de  $U_*$  et des autres paramètres du problème.
- 23) En déduire l'expression de la vitesse  $U_*$  en fonction des paramètres du problème.

Corrigé page 45

## Corrigé

 Mouvement gravitaire sur un plan incliné

### Écoulement fluide

1) Comme  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  et  $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} = U_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$ , on a  $\frac{dU}{dt} = 0$ . 2) On a  $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2} U'(x_3)$  et  $D_{ij} = 0$  sinon. 3) Comme  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2 \rho_0 \nu_n \underline{D}$ , on en déduit  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \rho_0 \nu_n U'(x_3)$  et  $\sigma_{ij} = 0$  sinon. 4) On a  $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}} p + \rho_0 \nu_n U''(x_3) \underline{e}_1$ . 5) La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire  $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + g \sin \alpha + \nu_n U''(x_3)$ ,  $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2}$  et  $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} + g \cos \alpha$ . 6) On a  $\underline{T}_h = \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, h, t) \underline{e}_3 = -p(x_1, x_2, h, t) \underline{e}_3 + \rho_0 \nu_n U'(h) \underline{e}_1$ . Comme  $\underline{T}_h = -p_a \underline{e}_3$ , on a  $p(x_1, x_2, h, t) = p_a$  et  $U'(h) = 0$ . 7) Comme  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho_0 g \cos \alpha$  et  $p(x, y, h, t) = p_a$ , on a  $p = p_a - \rho_0 g \cos \alpha (x_3 - h)$  et donc

$A = p_a + \rho_0 g h \cos \alpha$  et  $B = -\rho_0 g \cos \alpha$ . On a bien  $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$ . **8)** On a  $0 = g \sin \alpha + \nu_n U''(x_3)$  avec  $U(0) = 0$  et  $U'(h) = 0$ . On en déduit  $U(x_3) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu_n} x_3 (2h - x_3)$ . **9)** La tracé de la fonction  $U(x_3)$  est celui d'une parabole dont le sommet est en  $x_3 = 0$ . **10)** Comme  $U'(0) = \frac{g h \sin \alpha}{\nu_n}$  On a  $\underline{T}_0 = -\underline{\sigma}(x_1, x_2, 0) \underline{e}_3 = (p_a + \rho_0 g h \cos \alpha) \underline{e}_3 - \rho_0 g h \sin \alpha \underline{e}_1$ .

### Déformation solide

**11)** On a  $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \xi'(x_3)$ ,  $\epsilon_{33} = \zeta'(x_3)$  et  $\epsilon_{ij} = 0$  sinon. **12)** Comme  $\underline{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}$ , on en déduit  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda \zeta'(x_3)$ ,  $\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \zeta'(x_3)$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \xi'(x_3)$  et  $\sigma_{ij} = 0$  sinon. **13)** La loi de conservation de la quantité de mouvement  $\rho_s \underline{g} + \operatorname{div} \underline{\sigma} = \rho_s \underline{g} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} = 0$  entraîne  $\rho_s g \sin \alpha + \mu \xi''(x_3) = 0$  et  $-\rho_s g \cos \alpha + (\lambda + 2\mu) \zeta''(x_3) = 0$ . **14)** On a  $\underline{T}_h = \underline{\sigma}(x_1, x_2, h) \underline{e}_3 = \lambda \xi'(h) \underline{e}_1 + (\lambda + 2\mu) \zeta'(h) \underline{e}_3$ . Comme  $\underline{T}_h = -p_a \underline{e}_3$ , on a  $\xi'(h) = 0$  et  $(\lambda + 2\mu) \zeta'(h) = -p_a$ . **15)** En intégrant les équations différentielles ordinaires avec les conditions aux limites  $\xi(0) = \zeta(0) = 0$  en plus des conditions aux limites en  $x_3 = h$ , on obtient  $\xi(x_3) = \frac{\rho_s g \sin \alpha}{2\mu} x_3 (2h - x_3)$  et  $\zeta(x_3) = \frac{\rho_s g \cos \alpha}{2(\lambda + 2\mu)} x_3 (x_3 - 2h) - \frac{p_a}{\lambda + 2\mu} x_3$ . **16)** Le tracé des fonction  $\xi(x_3)$  et  $\zeta(x_3)$  est celui de deux paraboles. **17)** On a  $\underline{T}_0 = -\underline{\sigma}(x_1, x_2, 0) \underline{e}_3 = -\mu \xi'(0) \underline{e}_1 - (\lambda + 2\mu) \zeta'(0) \underline{e}_3 = -\rho_s g h \sin \alpha \underline{e}_1 + (p_a + \rho_s g h \cos \alpha) \underline{e}_3$ . **18)** On obtient le même résultat que pour le cas fluide. Cette force, qui doit compenser le poids du milieu continu ainsi que la pression du gaz, ne dépend pas de son comportement rhéologique.

### Interaction entre fluide et solide

**19)** En changeant  $x_3$  en  $x_3 - h_*$  et  $h$  par  $h - h_*$  dans les résultats précédents, on obtient les déplacements  $\xi(x_3) = \frac{\rho_s g \sin \alpha}{2\mu} (x_3 - h_*) (2h - h_* - x_3)$  et  $\zeta(x_3) = \frac{\rho_s g \cos \alpha}{2(\lambda + 2\mu)} (x_3 - h_*) (2h - h_* - x_3) - \frac{p_a}{\lambda + 2\mu} (x_3 - h_*)$ . **20)** En utilisant les résultats précédents, on a  $\underline{T}_* = \rho_s g (h - h_*) \sin \alpha \underline{e}_1 - [p_a + \rho_s g (h - h_*) \cos \alpha] \underline{e}_3$ . **21)** L'équation différentielle  $0 = g \sin \alpha + \nu_n U''(x_3)$  avec  $U(0) = 0$  et  $U(h_*) = U_*$  conduit à  $U(x_3) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu_n} x_3 (h_* - x_3) + U_* x_3 / h_*$ . **22)** On a  $\underline{e}_1 \cdot \underline{T}_* = -\frac{1}{2} \rho_0 g h_* \sin \alpha + \rho_0 \nu_n U_* / h_*$ . **23)** En identifiant les deux expressions de la projection de  $\underline{T}_*$  sur  $\underline{e}_1$ , on obtient  $\rho_s g (h - h_*) \sin \alpha = [-\frac{1}{2} \rho_0 g h_* \sin \alpha + \rho_0 \nu_n U_* / h_*]$  d'où  $U_* = \frac{g h_* \sin \alpha}{\nu_n} \left[ \frac{\rho_s}{\rho_0} (h - h_*) + \frac{1}{2} h_* \right]$ .

## E.16 Relation de Gibbs

On considère un fluide parfait compressible et  $\underline{U}$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\rho$ ,  $T$  les champs eulériens caractérisant son mouvement et sa thermodynamique. On note  $p = \mathcal{P}(\rho, e)$  et  $e = \mathcal{E}(\rho, T)$  ses lois d'état. On suppose que le flux de chaleur  $\underline{Q}$  est nul et qu'il n'y a pas de chauffage volumique ( $r = 0$ ).

- 1) Quelle(s) loi(s) faut-il inverser pour obtenir l'expression  $T = \mathcal{T}(\rho, e)$  de la température ?
- 2) On définit l'entropie  $s = \mathcal{S}(\rho, e)$  du fluide par les relations

$$\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e} \right)_\rho (\rho, e) = \frac{1}{\mathcal{T}(\rho, e)} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} \right)_e (\rho, e) = -\frac{\mathcal{P}(\rho, e)}{\rho^2 \mathcal{T}(\rho, e)}. \quad (19)$$

Quelle relation thermodynamique traduisent ces égalités ?

- 3) Dédurre de la relation de Gibbs une relation entre les dérivées particulières  $\frac{de}{dt}$ ,  $\frac{ds}{dt}$  et  $\frac{d\rho}{dt}$ .
- 4) Écrire la loi de conservation de la masse et l'équation de bilan de l'énergie interne pour ce fluide parfait compressible.
- 5) Éliminer  $\frac{de}{dt}$  et  $\frac{d\rho}{dt}$  à partir des trois équations précédentes pour obtenir l'expression de  $\frac{ds}{dt}$ .
- 6) Commenter le résultat obtenu.

### Corrigé Relation de Gibbs

**1)** Il faut inverser la loi d'état de l'énergie  $e = \mathcal{E}(\rho, T)$ . **2)** Il s'agit de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme  $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$  ou  $T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$ . **3)** On en déduit  $\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$ . **4)** La loi de conservation de la masse est  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$ . L'équation de bilan de l'énergie interne est  $\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$ . **5)** En éliminant  $\frac{de}{dt}$  et  $\frac{d\rho}{dt}$ , on obtient  $\frac{ds}{dt} = 0$ . **6)** Pour un fluide parfait, la viscosité est négligée. Comme de plus les apports de chaleur sont nuls, il est normal que l'entropie reste constante le long des trajectoires des particules fluides. En effet, les transformations sont réversibles.