Formulaire du cours
Instabilités hydrodynamiques

Olivier THUAL, 17 octobre 2020

L'usage de ce formulaire est autorisé pour les examens de session 1 ou de session 2 du cours “Instabilités hydrodynamiques”.

Ce formulaire est associé au polycopié de cours que l'on peut consulter sur les plateformes suivantes :

— Moodle N7 (http ://moodle-n7.inp-toulouse.fr/course/view.php ?id=350)

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Équation d'Euler

Les équations d'Euler avec conditions aux limites considérées s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{div}\, \underline{U}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \underline{U}_2 = -\dfrac{1}{\rho_2} \underline{\mathrm{grad}}\, p_2 - g\, \underline{e}_z \;, \\ \mathrm{div}\, \underline{U}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \underline{U}_1 = -\dfrac{1}{\rho_1} \underline{\mathrm{grad}}\, p_1 - g\, \underline{e}_z \;, \\ \lim_{z\to\infty} \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z = 0 \qquad \text{et} \qquad \underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{pour } z = -h_r \;, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \eta = w_2 \,, \qquad \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \eta = w_1 \quad \text{et} \quad p_1 = p_2 \;. \end{array}}$$

Linéarisation autour d'un équilibre cisaillé

En supposant que $\underline{U}_2 = U_2\, \underline{e}_x + \underline{\mathrm{grad}}\, \phi_2$ et $\underline{U}_1 = \underline{\mathrm{grad}}\, \phi_1$ avec ϕ_1 et ϕ_2 petits, le système linéarisé s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} p_2 = p_r - \rho_2 \left(\dfrac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\, z \right) \quad \text{et} \quad p_1 = p_r - \rho_1 \left(\dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\, z \right) \;, \\ \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \phi_1 = 0 \;, \\ \lim_{z\to+\infty} \underline{\mathrm{grad}}\, \phi_2 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h_r \;, \\ \text{en } z = 0 : \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_2 \dfrac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \dfrac{\partial \phi_2}{\partial z} \;, \quad \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \qquad \text{et} \quad \rho_2 \left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_2 \dfrac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g\, \eta \right] = \rho_1 \left(\dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\, \eta \right) \;. \end{array}}$$

Solutions complexes

Le problème étant invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme :

$$\boxed{(\phi_2, \eta, \phi_1) = [\Phi_2(z), \eta_m, \Phi_1(z)]\; e^{ik_x\, x + ik_y\, y + s\, t} \quad \text{avec } s = \sigma - i\,\omega\ .}$$

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de pulsation ω. En notant $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Phi_2'' - k^2\, \Phi_2 = 0 & \text{et} & \Phi_1'' - k^2\, \Phi_1 = 0 \quad \text{avec} \\ (s + i\, k_x\, U_2)\eta_m = \Phi_2'(0) & \text{et} & s\; \eta_m = \Phi_1'(0)\ , \\ \rho_2\, [(s + i\, k_x\, U_2)\, \Phi_2(0) + g\; \eta_m] & = & \rho_1\, [s\, \Phi_1(0) + g\; \eta_m]\ , \\ \lim_{z\to\infty} \Phi_2'(z) = 0 & \text{et} & \Phi_1'(-h_r) = 0\ . \end{array}}$$

Relation de dispersion généralisée

Comme $\Phi_2(z) = \Phi_{2m}\, e^{-k\, z}$ et $\Phi_1(z) = \Phi_{1m}\, \cosh[k\,(z + h_r)]$, les amplitudes complexes Φ_{2m} et Φ_{1m} vérifient le système d'équations :

$$\boxed{\begin{array}{c} (s + i\, k_x\, U_2)\eta_m = -\Phi_{2m}\; k \qquad \text{et} \qquad s\; \eta_m = \Phi_{1m}\; k\; \sinh(k\, h_r)\ , \\ \rho_2\, [(s + i\, k_x\, U_2)\, \Phi_{2m} + g\; \eta_m] = \rho_1\, [s\, \Phi_{1m}\; \cosh(k\, h_r) + g\; \eta_m] \\ \Longrightarrow \rho_2\, \left[g\, k - (s + i\, k_x\, U_2)^2\right] = \rho_1 \left[g\, k + \dfrac{s^2}{\tanh(k\, h_r)}\right]\ . \end{array}}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Dans le cas $kh_r \to \infty$ de la profondeur infinie, l'équation de dispersion s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{rl} & \rho_2\, \left[g\, k - (s + i\, k_x\, U_2)^2\right] = \rho_1\, \left(g\, k + s^2\right) \\ \Longrightarrow \ \text{Instabilité ssi} & g\, \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\, \left(\rho_1^2 - \rho_2^2\right) < k_x^2\, \rho_1\, \rho_2\, U_2^2\ . \end{array}}$$

Instabilité de Rayleigh-Bénard

Équations du modèle de convection thermique

Les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq avec conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{div} \underline{U} = 0 \,, & \dfrac{d\underline{U}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho_r}\underline{\operatorname{grad}}\, p - \dfrac{\rho}{\rho_r}\, g\, \underline{e}_z + \nu\, \Delta \underline{U} \,, \\
\dfrac{\rho}{\rho_r} = 1 - \alpha\,(T - T_r) \,, & \dfrac{dT}{dt} = \kappa\, \Delta T \,, \\
T = T_1 \quad \text{en } z = 0 & \text{et} \quad T = T_2 \quad \text{en } z = d \,, \\
w = 0 \quad \text{et} & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d \,.
\end{array}$$

État conductif

En notant $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$ et $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r\, \Pi(\underline{x}, t)$, où $T_c(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d}\, z$ et $p_c(z) = p_r - \rho_r\, g\, z + \rho_r\, \alpha\, g\,(T_1 - T_r)\, z - \rho_r\, \alpha\, g\, \frac{T_1 - T_2}{2\, d}\, z^2$ désignent l'état conductif (stationnaire), le modèle s'écrit :

$$\begin{array}{lrcl}
\operatorname{div} \underline{U} = 0 \,, & \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}}\, \underline{U} & = & -\underline{\operatorname{grad}}\, \Pi + \alpha\, g\, \theta\, \underline{e}_z + \nu\, \Delta \underline{U} \,, \\
 & \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}}\, \theta & = & \dfrac{T_1 - T_2}{d}\, w + \kappa\, \Delta \theta \,. \\
 & \theta = 0 \,, \quad w = 0 \quad \text{et} & & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d \,.
\end{array}$$

Adimensionalisation des équations

Le choix des unités de longueur $[L] = d$, de temps $[\tau] = d^2/\kappa$ et de température $[\Theta] = T_1 - T_2$ conduit aux équations :

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{div}_* \underline{U}^* = 0 \,, & \dfrac{\partial \underline{U}^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \underline{\operatorname{grad}}_*\, \underline{U}^* = -\underline{\operatorname{grad}}_*\, \Pi^* + R\, P\, \theta^*\, \underline{e}_z + P\, \Delta_* \underline{U}^* \,, \\
 & \dfrac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \underline{\operatorname{grad}}_*\, \theta^* = w^* + \Delta_*\, \theta^* \,, \\
 & \theta^* = 0 \,, \quad w^* = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial u^*}{\partial z^*} = \dfrac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \text{ et } z^* = 1 \\
\text{avec} & R = \dfrac{\alpha\, g\, d^3\,(T_1 - T_2)}{\nu\, \kappa} \ \text{(Rayleigh)} \quad \text{et} \quad P = \dfrac{\nu}{\kappa} \ \text{(Prandtl)} \,.
\end{array}$$

Linéarisation des équations

En supposant que les perturbations $\underline{U}$, θ et Π sont petites, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\text{div } \underline{U} = 0 \; , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}} \; \Pi + R\,P\,\theta\,\underline{e}_z + P\,\Delta \underline{U} \; , \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta\,\theta \; ,$$
$$\text{avec} \quad \theta = 0 \; , \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1 \; .$$

Hypothèse bidimensionnelle

Dans le cas bidimensionnel, l'introduction d'une fonction de courant ψ telle que $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ conduit, après élimination de la pression, au système :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = R\;P\;\frac{\partial \theta}{\partial x} + P\Delta^2\psi \; , \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta\theta \; ,$$
$$\text{avec} \quad \theta = 0 \; , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1 \; .$$

Solutions sans conditions aux limites

En l'absence de conditions aux limites, les équations linéaires et à coefficients constants sont invariantes par translations en espace et en temps, ce qui permet la recherche de solutions complexes et l'expression de relation de dispersion généralisée :

$$\begin{array}{ll} & (\psi, \theta) = (\psi_m, \theta_m) \exp\left[i(k_x\,x + k_z\,z) + s\;t\right] \; , \\ \Longrightarrow & s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P\;k^2 & -R\,P\,i\,k_x/k^2 \\ i\,k_x & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow & s^2 + s\,(P+1)\,k^2 + P\,k^4 - R\,P\,k_x^2/k^2 = 0 \; . \end{array}$$

Solutions avec conditions aux limites

La superposition des deux modes de vecteurs d'ondes $\underline{k}_+ = k_x\,\underline{e}_x + n\,\pi\,\underline{e}_z$ et $\underline{k}_- = k_x\,\underline{e}_x - n\,\pi\,\underline{e}_z$, d'amplitudes opposées mais de même valeur propre s, permet de construire les solutions réelles :

$$\begin{array}{rcl} \theta(x,z,t) & = & B\;\cos(k_x\,x)\;\sin(n\,\pi\,z)\,e^{s\,t} \; , \\ \psi(x,z,t) & = & \dfrac{s+k^2}{k_x}\,B\;\sin(k_x\,x)\;\sin(n\,\pi\,z)\,e^{s\,t} \; . \end{array}$$

En choisissant n entier, cette solution vérifie les conditions aux limites $\psi(x,0,t) =$

$\psi(x,1,t) = 0$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(x,0,t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(x,1,t)$.

Seuil de convection thermique

La condition d'instablité $R > R_*(k_x, k_z) = k^6/k_x^2$ conduit à la recherche du minimum de $R_1(k_x) = (k_x^2 + \pi^2)^3/k_x^2$ pour $n = 1$ et donc au seuil de l'instabilité décrit par :

$$\boxed{R_c = \frac{27\,\pi^4}{4} \sim 657 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2\ .}$$

Linéarisation autour de l'équilibre

Bifurcation fourche

Le système dynamique réel suivant décrit, de manière générique, l'instabilité stationnaire d'un équilibre par brisure d'une symétrie :

$$\boxed{\dot{X} = F(X) = \mu\, X + \alpha\, X^3\ ,}$$

La stabilité des équilibres X_e, tels que $F(X_e) = 0$, est obtenue en examinant le signe de la dérivée de F : stable pour $F'(X_e) < 0$, instable sinon. La bifurcation fourche est supercritique pour $\alpha < 0$ et sous-critique pour $\alpha > 0$.

Bifurcations d'un équilibre stable

La stabilité des équilibres $\underline{X}_e$ des systèmes dynamiques autonomes de la forme :

$$\boxed{\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{X}_i = F_i(X_1, ..., X_n) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, ..., n}$$

est obtenue en examinant les valeurs propres de la jacobienne $\underline{\underline{DF}}(\underline{X}_e)$ de $\underline{F}$ en $\underline{X}_e$. Si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives, l'équilibre est stable. Il est instable sinon, avec une bifurcation stationnaire si une valeur propre réelle devient positive, ou une bifurcation oscillatoire si une paire de valeurs propres complexes conjugées traverse l'axe des imaginaires purs.

Système dynamique dérivant d'un potentiel

Les systèmes dérivant d'un potentiel V s'écrivent :

$$\boxed{\ddot{u} + V'(u) = 0 \iff \begin{cases} \dot{q} &= \quad p \\ \dot{p} &= -V'(q) \end{cases} \iff \dot{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ -V'(X_1) \end{pmatrix}\ .}$$

Les équilibres $\underline{X}_e = (q_e, 0)$ sont obtenus pour q_e extremum de $V(q)$ et sont stables si $V''(q_e) > 0$ (minimum du potentiel) ou instables sinon (maximum). La quantité $E(t) = \frac{1}{2}\, p(t)^2 + V[q(t)]$ ne varie pas dans le temps.

Systèmes dynamiques hamiltoniens

Les sytèmes dynamiques hamiltoniens sont de la forme suivante, pour un choix quelconque d'une fonction dérivable $H(\underline{q}, \underline{p})$ avec $\underline{q} \in I\!R^n$ et $\underline{p} \in I\!R^n$:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \qquad \text{et} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{pour } i = 1, ..., n \; .}$$

Ils sont conservatifs car div $\underline{F}$, où $\underline{F}$ est définie par $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ avec $\underline{X} = (\underline{q}, \underline{p})$. La quantité $E(t) = H[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$ ne varie pas dans le temps. Les sytèmes dérivant d'un potentiel sont hamiltoniens avec $H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$.

Bifurcation de Hopf

Le système dynamique complexe suivant d'écrit, de manière générique, l'instabilité oscillatoire d'un équilibre :

$$\boxed{\dot{A} = (\mu + i\,\omega)\; A + (\alpha + i\,\beta)\; |A|^2 A \; .}$$

En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\,\theta(t)]$ avec $\rho(t) > 0$, on se ramène à une bifurcation fourche pour ρ.

Équations aux dérivées partielles

La stabilité de $u = 0$ pour le modèle linéaire, réel, à coefficients constants

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1\, \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3\, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0\; u + \mu_2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4\, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \; ,$$

s'obtient en cherchant des solutions de la forme $u(x, t) = a\, e^{i\, k_1\, x + \sigma\, t - i\, \omega\, t}$. La relation de dispersion généralisée s'écrit alors :

$$\boxed{\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2\; k_1^2 + \mu_4\; k_1^4 \qquad \text{et} \qquad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1\, k_1 - \alpha_3\, k_1^3 \; .}$$

Calcul de stabilité dans le cas général

La stabilité d'un équilibre $\underline{U}(\underline{x}, t) \in I\!R^n$ pour un système d'équations aux dérivées partielles génerale $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U})$ avec $\underline{x} \in I\!R^3$ (par exemple), s'obtient en résolvant le modèle linéarisé suivant pour les petites perturbation $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\widetilde{U}}}{\partial t} = \underline{\underline{L}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)\; \underline{\widetilde{U}}}$$

Si le modèle est invariant par translation dans le temps et dans l'espace, les coefficients des polynômes $L_{ij}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dont est composée la matrice $\underline{\underline{L}}$ sont constants. On peut alors chercher des solutions complexes sous la forme $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}, t) = U_m\, \underline{\phi}\; e^{i\, \underline{k} \cdot \underline{x} + s\, t}$. Le signe de la partie réelle des valeurs propres s détermine la stabilité de l'équilibre.