

Chapitre 1

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

O. Thual, 17 octobre 2020

Sommaire

1	Relation de dispersion généralisée	2
1.1	Équations d'Euler	3
1.2	Conditions aux limites	3
1.3	Écoulement potentiel	4
2	Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé	4
2.1	Linéarisation	5
2.2	Solutions complexes	5
2.3	Relation de dispersion généralisée	6
3	Ondes et instabilités	6
3.1	Instabilité de Kelvin-Helmoltz	7
3.2	Instabilité de Rayleigh Taylor	8
3.3	Dispersion de la houle	8

Introduction

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe la croissance vagues. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée "instabilité de Kelvin-Helmoltz".



FIGURE 1.1 – Vagues générées par le vent lors d'une tempête.

Lorsqu'un fluide lourd est placé au-dessus d'un fluide léger, on observe la croissance de doigts amorçant le mélange des deux fluides. Cette instabilité, due à la gravité, est appelée "instabilité de Rayleigh-Taylor".

En l'absence de forçage de la vitesse et lorsque le fluide lourd est placé sous le fluide léger, une perturbation de l'interface génère des oscillations que l'on appelle "ondes de surface" ou "ondes de gravité externes" ou plus communément "houle linéaire" ou "vagues".

Pour comprendre ces phénomènes d'instabilité ou d'oscillations, pour déterminer leurs taux de croissance et leurs pulsations, le choix d'un modèle pertinent, sa linéarisation autour d'un état d'équilibre et le calcul d'une relation de dispersion généralisée constituent une démarche très courante en physique, bien au-delà de la mécanique des fluides. Cette relation de dispersion généralisée relie le taux de croissance de l'instabilité ou la période de l'oscillation à la longueur d'onde des perturbations et aux différents paramètres du problème étudié.

Ce chapitre explicite le calcul et l'interprétation de cette relation de dispersion généralisée pour l'écoulement cisailé de deux fluides parfaits de masse volumiques différentes.

1 Relation de dispersion généralisée

On considère deux couches fluides superposées de masses volumiques différentes. On suppose que la couche supérieure, d'extension infinie, est animée d'une vitesse moyenne constante. Il peut se développer des instabilités ou simplement des oscillations de la surface libre autour d'un état d'équilibre. Le cas général où les deux couches peuvent être d'extension quelconques et où la

couche fluide inférieure est animée d'un courant moyen se déduit facilement par généralisation du cas particulier traité ici.

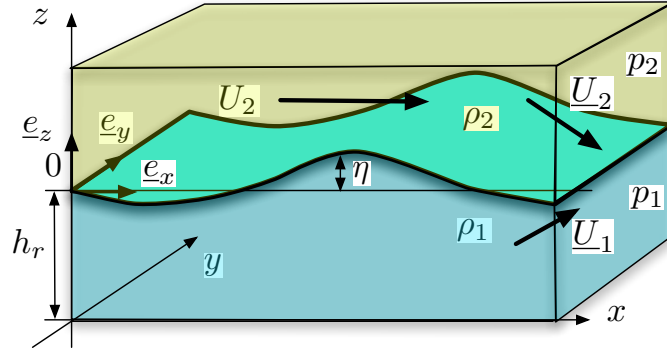


FIGURE 1.2 – Deux couches fluides superposées avec un fond en $z = -h_r$.

1.1 Équations d'Euler

Nous supposons ici que les fluides sont parfaits et incompressibles et nous notons ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des fluides respectivement situés en bas et en haut. La dynamique est modélisée par les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 &= 0 & \text{et} & \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 &= 0 & \text{et} & \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ un repère orthonormé, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + v_1 \underline{e}_y + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire $\underline{e}_z$ est vertical et g est l'intensité de la gravité.

1.2 Conditions aux limites

On suppose que la géométrie du problème induit les conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{pour } z = -h_r \quad (1.2)$$

où $\underline{e}_x$ est un vecteur unitaire horizontal et $\underline{e}_z$ le vecteur unitaire vertical. On suppose que l'équation de la surface libre est donnée par l'équation

$$F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0, \quad (1.3)$$

ce qui exclut les déformations de type déferlement. Les deux conditions aux limites cinématiques s'écrivent

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} F = 0 \quad \text{sur } F(\underline{x}, t) = 0 \quad (1.4)$$

Elles expriment que la dérivée particulière de F est nulle pour les deux mouvements, ce qui est équivalent à dire que la vitesse normale du fluide est égale à la vitesse normale de la surface. La condition dynamique

$$p_1 = p_2 \quad \text{sur } F(\underline{x}, t) = 0 \quad (1.5)$$

s'obtient en assurant la continuité des efforts de contact et en négligeant donc l'effet de tension superficielle. Les conditions à l'interface $z = \eta(x, y, t)$ des deux fluides s'écrivent alors

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2. \quad (1.6)$$

1.3 Écoulement potentiel

On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chacune des couches fluides ($\underline{\text{rot}} \underline{U}_2 = \underline{\text{rot}} \underline{U}_1 = \underline{0}$), ce qui permet d'écrire les champs de vitesse sous la forme

$$\underline{U}_2 = \underline{\text{grad}} (U_2 x + \phi_2) = U_2 \underline{e}_x + \underline{\text{grad}} \phi_2 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 = \underline{\text{grad}} \phi_1, \quad (1.7)$$

où $U_2 \underline{e}_x$ est une vitesse constante que l'on souhaite considérer comme état de base pour la couche supérieure. Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g z \right] &= \underline{0}, \\ \Delta \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g z \right] &= \underline{0}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 &= \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_r, \\ \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \\ p_1 &= p_2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } z = \eta. \end{aligned}$$

Comme ϕ_2 et ϕ_1 sont respectivement définis à une "constante" (en espace) $C_2(t)$ et $C_1(t)$ près, on peut choisir une pression de référence p_r arbitraire permettant d'éliminer la pression en écrivant

$$\begin{aligned} p_2 &= p_r - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + g z \right], \\ p_1 &= p_r - \rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + g z \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2 Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé

On linéarise l'écoulement de base pour lequel la couche inférieure est au repos tandis que la couche supérieure est animée d'une vitesse constante. On calcule alors les solutions complexes ainsi que la relation de dispersion généralisée.

2.1 Linéarisation

On s'intéresse à l'état de base $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x$, $\eta = 0$ et $\underline{U}_1 = \underline{0}$. La pression est alors $p_0(z) = p_r - \rho_2 g z$ pour $z \geq 0$ où p_r et $p_0(z) = p_r - \rho_1 g z$ pour $z \leq 0$ est une pression de référence arbitraire.

On linéarise autour de cet état de base en posant $p_2 = p_0(z) + \tilde{p}_2$ pour $z \geq 0$, $p_1 = p_0(z) + \tilde{p}_1$ pour $z \leq 0$, et en supposant que $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_1$, η , ϕ_2 et ϕ_1 sont des petites perturbations. La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d'équation $z = \eta(x, y, t)$ par des conditions aux limites sur la surface fixe d'équation $z = 0$. En effet, pour un champ quelconque $f(x, y, z, t)$ on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)] . \quad (1.9)$$

Le modèle linéaire est alors constitué des équations de Laplace $\Delta \phi_2 = \Delta \phi_1 = 0$ dans les fluides avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \text{grad } \phi_2 &= \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h_r , \\ \text{en } z = 0 : \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z} , \quad p_1 = p_2 , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} . \end{aligned}$$

En remplaçant la pression par sa valeur et en linéarisant, la condition $p_1 = p_2$ s'écrit

$$\rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] = \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) \quad \text{en } z = 0 . \quad (1.10)$$

2.2 Solutions complexes

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \Phi_2(z) e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \\ \eta &= \eta_m e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \\ \phi_1 &= \Phi_1(z) e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $s = \sigma - i\omega$. On note $\underline{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde horizontal. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, les parties réelles de ces solutions sont aussi solutions.

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de pulsation ω .

On note ici $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 &= 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 = 0 \quad \text{avec} \\ (s + i k_x U_2) \eta_m &= \Phi_2'(0) \quad \text{et} \quad s \eta_m = \Phi_1'(0) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_2(0) + g \eta_m] &= \rho_1 [s \Phi_1(0) + g \eta_m] , \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2'(z) &= 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1'(-h_r) = 0 . \end{aligned} \quad (1.12)$$

2.3 Relation de dispersion généralisée

On en déduit $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} e^{-kz}$ et $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \cosh[k(z+h_r)]$, les amplitudes complexes Φ_{2m} et Φ_{1m} vérifiant le système d'équations

$$\begin{aligned} (s + i k_x U_2) \eta_m &= -\Phi_{2m} k & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_{1m} k \sinh(k h_r), \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_{2m} + g \eta_m] &= \rho_1 [s \Phi_{1m} \cosh(k h_r) + g \eta_m]. \end{aligned}$$

L'allure des isocontours des fonctions propres ainsi obtenues est représentée sur la figure 1.3.

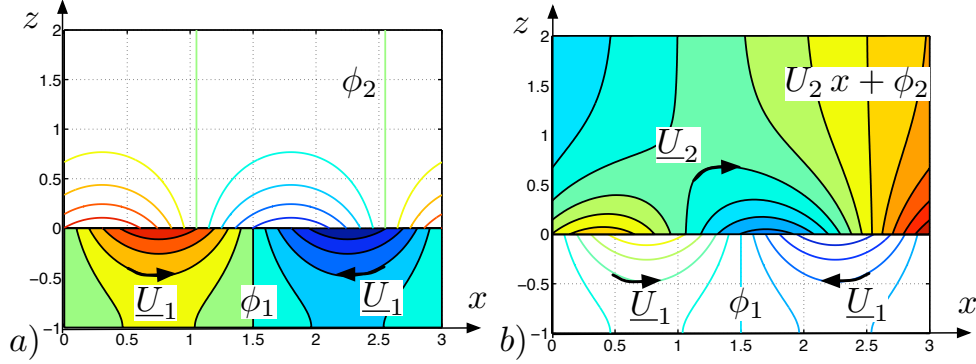


FIGURE 1.3 – a) Isocontours des fonctions de courant ϕ_2 et ϕ_1 pour un mode propre. b) Isocontours de $\phi_2 + U_2 x$ et de ϕ_1 .

En reportant les valeurs de Φ_{1m} et Φ_{2m} en fonction de η_m et en simplifiant par η_m , on obtient la relation de dispersion généralisée

$$\rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] = \rho_1 \left[g k + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right]. \quad (1.13)$$

On remarque tout d'abord que si s est une valeur propre correspondant à un mode de nombre d'onde horizontal k_x , alors $-s$ est une valeur propre associée à un mode de nombre d'onde horizontal $-k_x$. Cette symétrie provient du fait que le système étudié est conservatif.

On peut adimensionner cette équation en utilisant $[L] = h_r$ comme unité de longueur et $[T] = h_r/U_2$ comme unité de temps. On obtient alors une relation de dispersion qui dépend des deux nombres sans dimension

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{et} \quad F = \frac{U_2}{\sqrt{g h_r}}, \quad (1.14)$$

ce dernier nombre s'apparentant à un "nombre de Froude". Le calcul de stabilité consiste donc à calculer, pour tout ξ , F , k_x et k_y , les deux racines de polynôme du second degré en s de l'équation (1.13). Ce calcul est fastidieux et nous nous contenterons d'examiner quelques cas particuliers.

3 Ondes et instabilités

On étudie la relation de dispersion généralisée (1.13) pour plusieurs cas particuliers. Dans le cas où la couche inférieure est infinie, on sait calculer une

condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable. Dans le cas où la vitesse U_2 est nulle, on obtient l'instabilité de Rayleigh-Taylor lorsque la couche supérieure est plus lourde que la couche inférieure, et des ondes de gravité dans le cas contraire. Enfin, lorsque la masse volumique de la couche supérieure est négligeable, on obtient la relation de dispersion des ondes de surface.

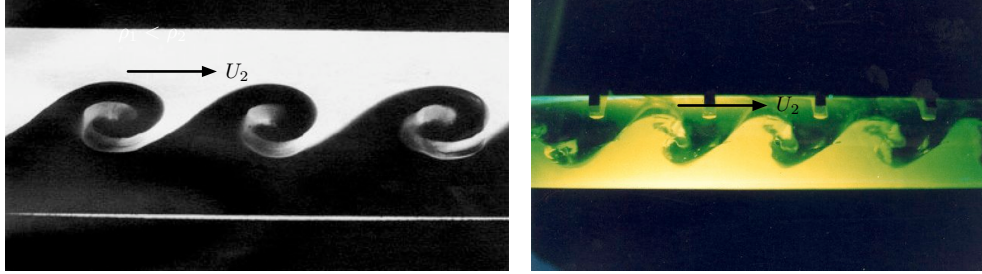


FIGURE 1.4 – *Instabilité de Kelvin-Helmholtz.*

3.1 Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On considère tout d'abord le cas où la profondeur est infinie, c'est-à-dire la limite $kh_r \rightarrow \infty$. L'équation de dispersion s'écrit alors

$$\rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] = \rho_1 (g k + s^2) . \quad (1.15)$$

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable est

$$g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 U_2^2 . \quad (1.16)$$

En effet, cette condition indique que le discriminant de l'équation du second degré (1.15) est positif et l'on montre que les racines sont imaginaires pures s'il est négatif.

Si $\rho_1 = \rho_2$, cette condition est toujours satisfaite et l'écoulement cisailé est instable.

Si ρ_1 est plus grand que ρ_2 (couche lourde en bas), on voit donc que l'écoulement n'est instable que si U_2 est suffisamment fort ou k_x suffisamment grand. On est en présence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. On voit que les modes de petites longueurs d'ondes en x (grands k_x) sont les plus instables. Une modélisation plus physique consiste alors à prendre en compte la viscosité où la tension de surface qui ont pour effet d'amortir les oscillations en dissipant l'énergie aux petites échelles au profit d'échelles instables de taille finie (figure 1.4a).

3.2 Instabilité de Rayleigh Taylor

Dans le cas particulier où la profondeur h_r est infinie et où $U_2 = 0$, la relation de dispersion généralisée s'écrit

$$\rho_1 (g k + s^2) = \rho_2 (g k - s^2) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g k . \quad (1.17)$$

Si ρ_2 est plus grand que ρ_1 , c'est-à-dire si le fluide du haut est le plus lourd, il existe toujours une famille de modes instables dont le taux de croissance augmente avec k . On est en présence de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Il faut alors enrichir le modèle avec des termes de dissipation qui vont stabiliser les très petites échelles et sélectionner l'échelle des ondes instables (figure 1.5a).

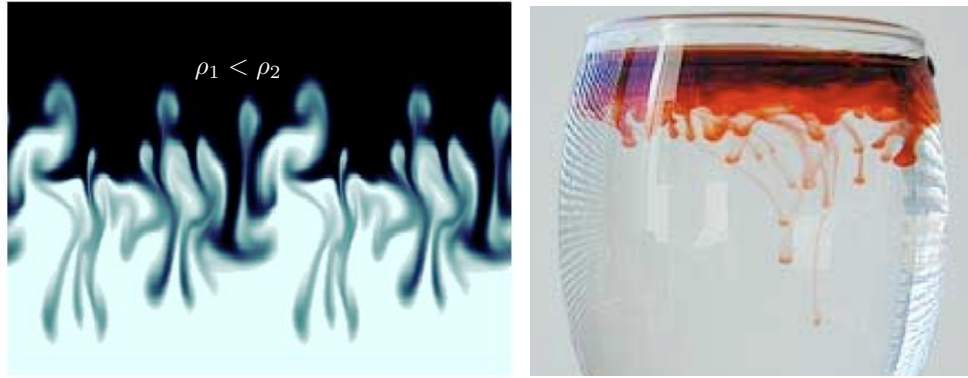


FIGURE 1.5 – Instabilité de Rayleigh-Taylor avec $U_2 = 0$.

Si ρ_1 est plus grand que ρ_2 , les deux racines s_1 et s_2 sont imaginaires pures et le système est marginal (oscillations). Les ondes qui se développent à l'interface des deux fluides sont des ondes de gravité.

3.3 Dispersion de la houle

On considère désormais le cas des profondeurs quelconques et on suppose que $\rho_1 \gg \rho_2$. C'est le cas de la houle forcée par le vent et l'on voit, à partir de la relation (1.16), que l'instabilité est obtenue pour des vitesses U_2 très grandes ou bien en observant le phénomène sur des temps très longs. C'est pourquoi le développement d'une mer agitée ne s'observe qu'au bout d'une grande distance, appelée "fetch", sur laquelle le vent doit souffler de manière significative.

Lorsque le vent est retombé ou lorsque les vagues s'éloignent de la tempête, on peut négliger le terme en ρ_2 dans la relation de dispersion qui s'écrit alors

$$s^2 + g k \tanh(k h_r) = 0 . \quad (1.18)$$

On voit donc que $s = -i\omega$ où ω est donné par la relation de dispersion des ondes de surface (figure 1.6) qui s'écrit

$$\omega = \Omega(k) \quad \text{ou} \quad \omega = -\Omega(k) \quad \text{avec} \quad \Omega(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} . \quad (1.19)$$

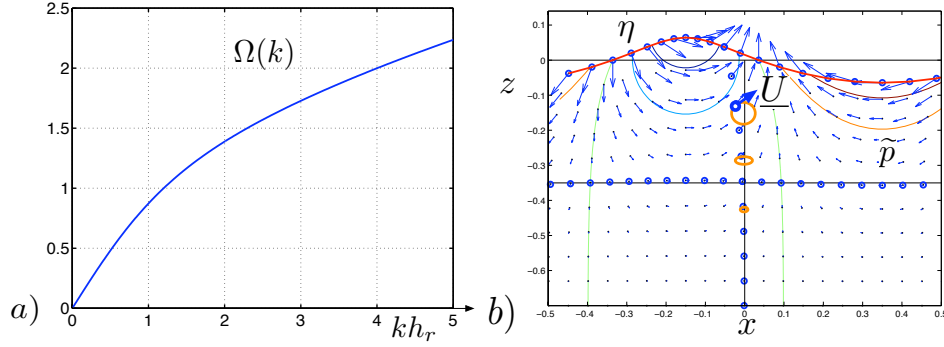


FIGURE 1.6 – a) Relation de dispersion $\Omega(k)$ et vitesse de phase $c_\phi(k)$ pour les ondes de surface. b) Onde monochromatique et mouvement des particules.

Lorsque cette relation est vérifiée, on obtient des solutions complexes non triviales du problème linéaire sous la forme

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta_m e^{ik_x x - i\omega t}, \\ \phi(x, z, t) &= \Phi_m \cosh[k(z + h)] e^{ik_x x - i\omega t}, \\ \text{avec } \Phi_m &= \frac{g \eta_m}{i\omega \cosh(k h_r)}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

la relation entre Φ_m et η_m découlant, par exemple, de la condition $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$ en $z = 0$. L'expression générale réelle d'une onde rectiligne progressive est donc, en choisissant η_m réel,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta_m \cos(k_x x - \omega t), \\ \phi(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (1.21)$$

On en déduit le champ de vitesse réel dont les composantes sont

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} k_x \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x - \omega t), \\ w(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} k \frac{\sinh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

La relation $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ permet de calculer l'expression de la fluctuation de pression, aussi appelée "pression dynamique", qui s'écrit

$$\tilde{p}(x, z, t) = \rho g \eta_m \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x - \omega t). \quad (1.23)$$

Comme l'amplitude de l'onde est petite, on peut remplacer les positions $x(t)$ et $z(t)$ par leurs moyennes x_0 et z_0 dans l'expression du champ de vitesse qui intervient dans l'équation $\dot{x}(t) = U[x(t), t]$. Cette hypothèse d'onde infinitésimale, compatible avec la démarche de linéarisation suivie pour l'étude des ondes, se traduit par la condition $\eta_m \ll \frac{\omega^2}{g k^2}$ (il suffit d'adimensionner l'amplitude η_m avec g , k et ω). L'équation des trajectoires paramétrées par les positions (x_0, z_0) , est alors

$$x(x_0, z_0; t) = x_0 - \frac{g \eta_m}{\omega^2} k_x \frac{\cosh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x_0 - \omega t),$$

$$z(x_0, z_0; t) = z_0 + \frac{g \eta_m}{\omega^2} k \frac{\sinh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x_0 - \omega t), \quad (1.24)$$

avec $k = |k_x|$. Ces trajectoires décrivent des ellipses de centres (x_0, z_0) comme le montre la figure 1.6b.

FORMULAIRE

Équation d'Euler

Les équations d'Euler avec conditions aux limites considérées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z &= 0 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{pour } z = -h_r, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \eta &= w_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \eta = w_1 \quad \text{et} \quad p_1 = p_2. \end{aligned}$$

Linéarisation autour d'un équilibre cisailé

En supposant que $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x + \operatorname{grad} \phi_2$ et $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$ avec ϕ_1 et ϕ_2 petits, le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned} p_2 &= p_r - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g z \right) \quad \text{et} \quad p_1 = p_r - \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g z \right), \\ \Delta \phi_2 &= 0 \quad \text{et} \quad \Delta \phi_1 = 0, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{grad} \phi_2 &= \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_r, \\ \text{en } z = 0 : \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \text{et} \quad \rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] &= \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right). \end{aligned}$$

Solutions complexes

Le problème étant invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme :

$$(\phi_2, \eta, \phi_1) = [\Phi_2(z), \eta_m, \Phi_1(z)] e^{ik_x x + ik_y y + s t} \quad \text{avec } s = \sigma - i \omega.$$

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de

pulsation ω . En notant $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est :

$$\begin{aligned} \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 &= 0 & \text{et} & & \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 &= 0 & \text{avec} \\ (s + i k_x U_2) \eta_m &= \Phi_2'(0) & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_1'(0) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_2(0) + g \eta_m] &= & \rho_1 [s \Phi_1(0) + g \eta_m] , \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2'(z) &= 0 & \text{et} & & \Phi_1'(-h_r) &= 0 . \end{aligned}$$

Relation de dispersion généralisée

Comme $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} e^{-kz}$ et $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \cosh[k(z + h_r)]$, les amplitudes complexes Φ_{2m} et Φ_{1m} vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} (s + i k_x U_2) \eta_m &= -\Phi_{2m} k & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_{1m} k \sinh(k h_r) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_{2m} + g \eta_m] &= \rho_1 [s \Phi_{1m} \cosh(k h_r) + g \eta_m] \\ \implies \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] &= \rho_1 \left[g k + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right] . \end{aligned}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Dans le cas $kh_r \rightarrow \infty$ de la profondeur infinie, l'équation de dispersion s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] &= \rho_1 (g k + s^2) \\ \implies \text{Instabilité ssi} & \quad g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 U_2^2 . \end{aligned}$$

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Instabilité de Saffman-Taylor

On se place dans le repère mobile, de vitesse constante $U_0 \underline{e}_y$, lié à l'interface entre deux fluides visqueux, non miscibles, incompressibles et régis par les lois de Darcy 2D

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(x, y, t) &= -C_1 \underline{\text{grad}} p_1(x, y, t) , \\ \underline{U}_2(x, y, t) &= -C_2 \underline{\text{grad}} p_2(x, y, t) , \end{aligned} \quad (1.25)$$

où, pour $i \in \{1, 2\}$, les $\underline{U}_i$ sont les vitesses absolues (et non pas relatives au repère mobile), les p_i sont les champs de pressions et les C_i sont des coefficients constants (figure 1.7), pour $i \in \{1, 2\}$. Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, pour laquelle les deux fluides visqueux s'écoulent entre deux plaques planes

horizontales très rapprochées, on a $C_i = \frac{b^2}{12\mu_i}$ où b est la distance entre les deux plaques et les μ_i sont les viscosités dynamiques respectives des fluides.

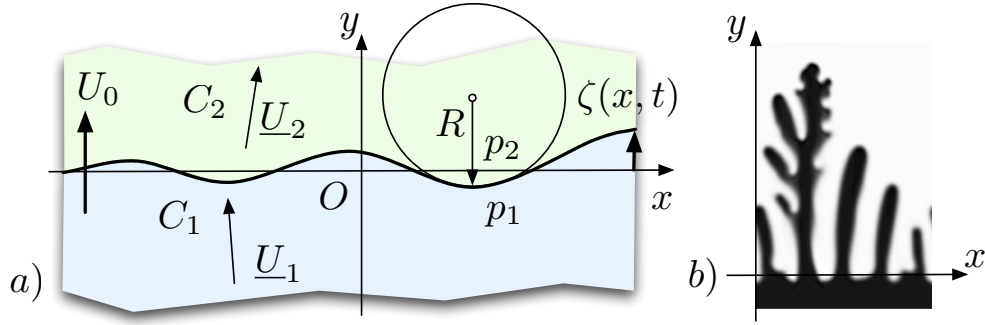


FIGURE 1.7 – a) Vitesses absolues dans le repère mobile U_0 de l'interface de deux fluides visqueux non-miscibles régis par une loi de Darcy. b) Doigts de Saffman-Taylor.

Si R est le rayon de courbure de l'interface $y = \zeta(x, t)$ délimitant les deux fluides non miscibles (figure 1.7), la tension superficielle induit une différence des pression $p_2 = p|_{y=\zeta+}$ et $p_1 = p|_{y=\zeta-}$ sous la forme $p_2 - p_1 = T/R - A$ où T et A sont des constantes positives. Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, on peut poser $A = 2T/b$ en approximant par $b/2$ le rayon de courbure du profil parabolique de la vitesse dans la direction z de l'écoulement laminaire. Cette direction z n'intervient qu'à travers la constante A dans la modélisation 2D ci-dessous. Lorsque ζ est petit, cette condition s'écrit

$$p_2 - p_1 = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - A \quad \text{en } y = \zeta(x, t). \quad (1.26)$$

On considère l'état de base défini par

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10}(y) = p_r - \frac{U_0}{C_1} y, & p_2 &= p_{20}(y) = p_r - A - \frac{U_0}{C_2} y, \\ \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 = U_0 \underline{e}_y & \text{et} & \quad \zeta = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où p_r est une pression de référence. On s'intéresse aux perturbations $\zeta(x, t)$ de l'interface mobile avec

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(x, y, t) &= U_0 \underline{e}_y + \tilde{u}_1 \underline{e}_x + \tilde{v}_1 \underline{e}_y, & p_1(x, y, t) &= p_{10}(y) + \tilde{p}_1, \\ \underline{U}_2(x, y, t) &= U_0 \underline{e}_y + \tilde{u}_2 \underline{e}_x + \tilde{v}_2 \underline{e}_y, & p_2(x, y, t) &= p_{20}(y) + \tilde{p}_2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

- 1) Montrer que l'on a $\Delta \tilde{p}_1 = 0$ et $\Delta \tilde{p}_2 = 0$.

Comme les fluides sont supposés incompressibles, on a $\text{div } \underline{U}_i = 0$ ce qui entraîne $\Delta p_i = 0$.

- 2) Commenter les conditions aux limites $\tilde{p}_1 = 0$ en $y = -\infty$ et $\tilde{p}_2 = 0$ en $y = \infty$.

La nullité des perturbations de pression à l'infini entraîne que la vitesse est celle de l'état de base.

- 3) En se plaçant dans le repère mobile de vitesse $U_0 \underline{e}_y$ et en considérant les vitesses relatives $\tilde{\underline{U}}_i = \tilde{u}_i \underline{e}_x + \tilde{v}_i \underline{e}_y$, justifier les conditions aux limites $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_1$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_2$ en $y = \zeta(x, t)$.

Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, relative au repère mobile, est égale à la vitesse normale de cette surface, relative au repère mobile. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{\tilde{U}} \cdot \text{grad } F = 0$ avec $F(x, y, t) = y - \zeta(x, t)$, ou encore $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_1$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_2$.

- 4) On suppose désormais que les champs $\tilde{U}_i(x, y, t)$ et $\tilde{p}_i(x, y, t)$ ainsi que $\zeta(x, t)$ sont petits. En déduire les conditions aux limites $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -C_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -C_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}$ en $y = 0$.

En développant les valeurs $f[x, \zeta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\zeta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $y = 0$ plutôt qu'en $y = \zeta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématique à l'interface en utilisant $\tilde{v}_i = -C_i \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial y}$. Les termes $\tilde{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ sont négligés.

- 5) Justifier les conditions aux limites $\tilde{p}_2 - \frac{U_0}{C_2} \zeta = \tilde{p}_1 - \frac{U_0}{C_1} \zeta + T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, en $y = 0$.

Les conditions aux limites dynamiques expriment le saut de pression dû à la tension superficielle dans le cas où ζ est petit.

- 6) Justifier la recherche de solutions de la forme $\tilde{p}_1 = P_1(y) e^{ik_x x + st}$, $\tilde{p}_2 = P_2(y) e^{ik_x x + st}$ et $\zeta = \zeta_m e^{ik_x x + st}$ où $P_1(y)$, $P_2(y)$ et ζ_m sont complexes. Montrer que l'on peut écrire $P_1(y) = P_{1m} F_1(ky)$ et $P_2(y) = P_{2m} F_2(ky)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \tilde{p}_1 = 0$ et $\Delta \tilde{p}_2 = 0$, on obtient $\tilde{p}_1''(y) - k^2 \tilde{p}_1(y) = 0$ et $\tilde{p}_2''(y) - k^2 \tilde{p}_2(y) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $P_1(y) = P_{1m} \exp(ky)$ et $P_2(y) = P_{2m} \exp(-ky)$ où P_{1m} et P_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Y) = e^Y$ et $F_2(Y) = e^{-Y}$.

- 7) En déduire la relation de dispersion s'écrit $s = \alpha U_0 k - \beta T k^3$ où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de C_1 et C_2 .

En utilisant $P_1'(0) = k P_{1m}$ et $P_2'(0) = -k P_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $y = 0$ s'écrivent $s \zeta_m = -C_1 k P_{1m}$ et $s \zeta_m = C_2 k P_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $P_{1m} - \frac{U_0}{C_1} \zeta_m = P_{2m} - \frac{U_0}{C_2} \zeta_m + T k_x^2 \zeta_m$. En éliminant P_{1m} et P_{2m} et en écartant la solution triviale $\zeta_m = 0$, on en déduit $-\frac{s}{C_1 k} \zeta_m - \frac{U_0}{C_1} \zeta_m = \frac{s}{C_2 k} \zeta_m - \frac{U_0}{C_2} \zeta_m + T k_x^2 \zeta_m$. On en déduit donc $s = \alpha U_0 k - \beta T k^3$ avec $\alpha = \frac{1/C_2 - 1/C_1}{1/C_2 + 1/C_1}$ et $\beta = \frac{1}{1/C_2 + 1/C_1}$.

- 8) Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, montrer que l'état de base est stable lorsque $\mu_1 > \mu_2$.

Si $\mu_2 < \mu_1$, on a $1/C_2 < 1/C_1$ et donc $\alpha < 0$: l'écoulement est stable.

- 9) Dans le cas $\mu_1 < \mu_2$, tracer le taux de croissance de l'instabilité en fonction de k . En déduire une estimation de la largeur des doigts de Saffman-Taylor.

Dans le cas instable $\mu_2 > \mu_1$, le taux de croissance s en fonction de k est un polynôme de degré trois donc le maximum est atteint pour $k = k_c$ avec $k_c = \sqrt{\frac{\alpha U_0}{3 \beta T}}$. On peut imaginer que la longueur d'onde des doigts est la longueur d'onde la plus instable $l_c = 2\pi/k_c$.