

Ondes mécaniques



Olivier THUAL, Toulouse INP

La Prépa des INP Toulouse

Table des matières



Objectifs	4
Introduction	5
I - Du discret au continu	6
1. Rhéologie des ressorts	6
1.1. Comportement élastique d'un ressort	6
1.2. Jonction de deux ressorts	7
1.3. Chaîne de ressorts	8
2. Dynamique d'une chaîne massique	9
2.1. Ressort et masse unique	10
2.2. Chaîne finie de masses et ressorts	11
2.3. Équation de D'Alembert	12
3. Solutions de l'équation des ondes	13
3.1. Solution générales en milieu infini	13
3.2. Conditions aux limites	14
3.3. Exemples de solutions stationnaires	15
II - Ondes non dispersives	16
1. Ondes élastiques longitudinales	16
1.1. Module de Young	17
1.2. Modélisation du mouvement	18
1.3. Exemples des ondes sismiques	19
2. Ondes élastiques transversales	19
2.1. Cordes tendues	20
2.2. Conditions aux limites	21
2.3. Exemples de solutions stationnaires	22
3. Autres types d'ondes	23
3.1. Ondes électriques dans un coaxial	23
3.2. Ondes sonores dans un tube	24
3.3. Ondes de surface	26
III - Ondes progressives et stationnaires	27
1. Ondes progressives	27
1.1. Solutions de l'équation des ondes	27
1.2. Propagation d'un signal	28
1.3. Ondes progressives monochromatiques	29
2. Ondes stationnaires	30
2.1. Séparation de variables	30
2.2. Superposition d'ondes progressives	31
2.3. Décomposition en modes propres	32

3. Au-delà de D'Alembert 1D	32
3.1. Ondes amorties	33
3.2. Ondes dispersives	34
3.3. Ondes tridimensionnelles	36
Conclusion	38
Bibliographie	39
Webographie	40

Objectifs

À l'issue de ce cours sur la mécanique des ondes, les étudiants seront capables d'identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux élastiques, acoustiques et électriques. Ils sauront caractériser la nature longitudinale ou transversale des déplacements lorsque les ondes induisent un mouvement. Ils seront capables de dériver l'équation des ondes par passage à la limite continue d'un système composé d'un grand nombre de petits éléments. Réciproquement, ils sauront décomposer un problème continu en petits éléments infinitésimaux détailler des lois physiques.

Ils sauront écrire l'expression générale des solutions de l'équation des ondes unidimensionnelles et prévoir l'évolution temporelle de leur forme dans le cas d'une onde progressive. Ils sauront énoncer la définition d'onde progressive ou d'onde stationnaire et les reconnaître en présence d'un exemple. Ils seront capables de manipuler l'expression analytique d'ondes monochromatiques progressives lorsque leur superposition conduit à une solution stationnaire. Dans le cas des domaines bornés, ils sauront formuler les conditions aux limites usuelles et calculer les modes propres solutions de l'équation des ondes.

Enfin, les étudiants sauront donner quelques exemples d'ondes dispersives, amorties ou dépassant le cadre unidimensionnel, pour bien situer le le cadre non dispersif, non amorti et unidimensionnel qui fait l'objet principal de ce cours.

Introduction



Les ondes mécaniques interviennent dans notre environnement de tous les jours : vibration des cordes, ondes sonores, ondes de surface... Elles partagent de nombreux points communs avec les ondes électromagnétiques ou les ondes électriques. Dans ce cours, nous ne dépasserons pas le cadre des ondes linéaires qui sont des petites vibrations autour d'une position d'équilibre.

On s'intéresse principalement aux ondes mécaniques non dispersives, c'est-à-dire aux systèmes dont la vitesse des signaux ne dépend pas de leurs formes. C'est le cas des ondes élastiques longitudinales ou transversales dans des solides comme les ressorts, les barreaux élastiques ou les cordes tendues, des ondes sonores dans les fluides compressibles ou encore des ondes électriques dans les coaxiaux. Toutes ces ondes sont modélisées par l'équation de D'Alembert, également appelée "équations des ondes". On se limite principalement au cas des ondes monodimensionnelles (1D).

Les ondes de surface ainsi que d'autres systèmes relevant de la mécanique des fluides ne sont pas dispersives : la vitesse des crêtes ou des creux (vitesse de phase) dépend de leur longueur d'onde, sauf dans le cas peu profond. Ces ondes ne pas étudiées dans ce cours.

Du discret au continu

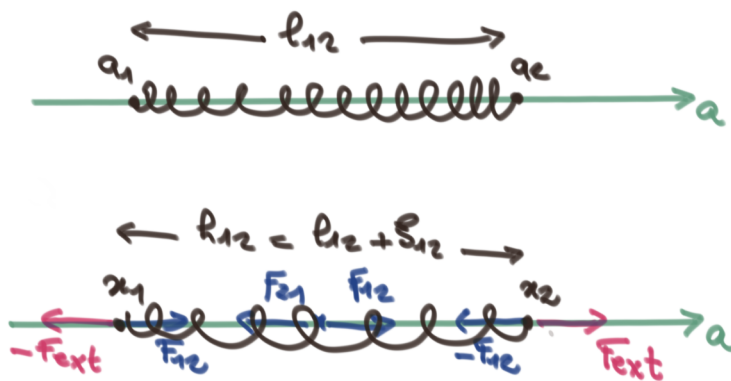
I

Dans ce premier chapitre, on applique le principe fondamental de la dynamique à une chaîne de ressort reliant des masses le long d'un axe. Lorsque le nombre de ressorts croît en conservant la masse totale et la longueur de la chaîne, le passage au continu conduit à l'équation de D'Alembert unidimensionnelle (1D), encore appelée "équation des ondes 1D". Quelques solutions sont indiquées, en anticipation des développements des chapitres suivants.

1. Rhéologie des ressorts

Le ressort est l'exemple le plus simple de comportement élastique d'un solide lorsque l'on considère uniquement les déformations dans la direction de son axe. Tant que les déformations qu'il subit ne détruisent pas son comportement élastique, son élongation est proportionnelle aux forces qui lui sont appliquées. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux états d'équilibre de systèmes couplant des ressorts, en réponse à des contraintes extérieures.

1.1. Comportement élastique d'un ressort



On considère un ressort de longueur $l_{12} = a_2 - a_1$ occupant l'intervalle $a \in [a_1, a_2]$ au repos. On applique les forces F_{ext} en $a = a_2$ et $-F_{ext}$ en $a = a_1$. Sa longueur devient alors $h_{12} = x_2 - x_1$ où x_1 et x_2 sont les nouvelles positions des extrémités.

🔑 Définition : Déplacements et allongements

On définit les déplacements $\xi_1 = x_1 - a_1$ et $\xi_2 = x_2 - a_1$. On note alors $\xi_{12} = h_{12} - l_{12} = \xi_2 - \xi_1$ l'allongement du ressort.

📌 Rappel : Forces intérieures dans le ressort

Tout point du ressort est soumis à deux forces intérieures F_{12} et F_{21} de somme nulle et dans la direction de l'axe Ox par application du principe de l'action et de la réaction. On a donc : $F_{ext} = F_{12} = -F_{21}$.

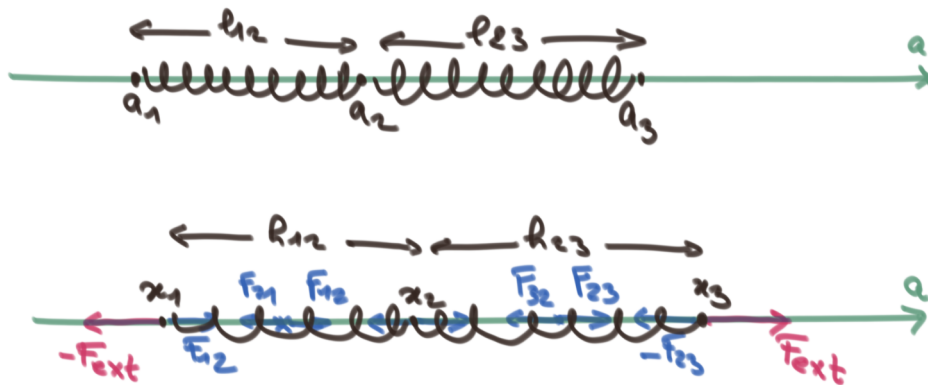
🔧 Méthode : Loi de comportement élastique

La loi de comportement des solides élastiques permet d'écrire :

$$F_{12} = \alpha \Delta_{12} \quad \text{avec} \quad \Delta_{12} = \frac{h_{12} - l_{12}}{l_{12}} = \frac{\xi_{12}}{l_{12}}.$$

où α est une constante physique qui ne dépend que de la forme du ressort et du matériau qui le constitue.

1.2. Jonction de deux ressorts



On considère deux ressorts de coefficient α identiques, mis bout à bout, dont les longueurs respectives sont l_{12} et l_{23} et dont les extrémités sont situées aux abscisses a_1 , a_2 et a_3 . On applique respectivement les forces $-F_{ext}$ et F_{ext} aux extrémités a_1 et a_3 . On note x_1 , x_2 et x_3 les nouvelles positions des extrémités après la déformation qui résulte de la contrainte extérieure imposée.

🔑 Définition : Allongements et forces intérieures

On note $\xi_1 = x_1 - a_1$, $\xi_2 = x_2 - a_2$ et $\xi_3 = x_3 - a_3$ les déplacements des extrémités et $\xi_{12} = \xi_2 - \xi_1$ et $\xi_{23} = \xi_3 - \xi_2$ les allongements des ressorts.

En notant F_{12} et F_{23} les intensités des forces intérieures respectives dans les ressorts, on a $F_{ext} = F_{12} = F_{23} = -F_{21} = -F_{32}$.

X Méthode : Loi de comportement du système global

La loi de comportement élastique appliquée à chacun des ressorts s'écrit :

$$F_{12} = \alpha \Delta_{12} \quad \text{et} \quad F_{23} = \alpha \Delta_{23}$$

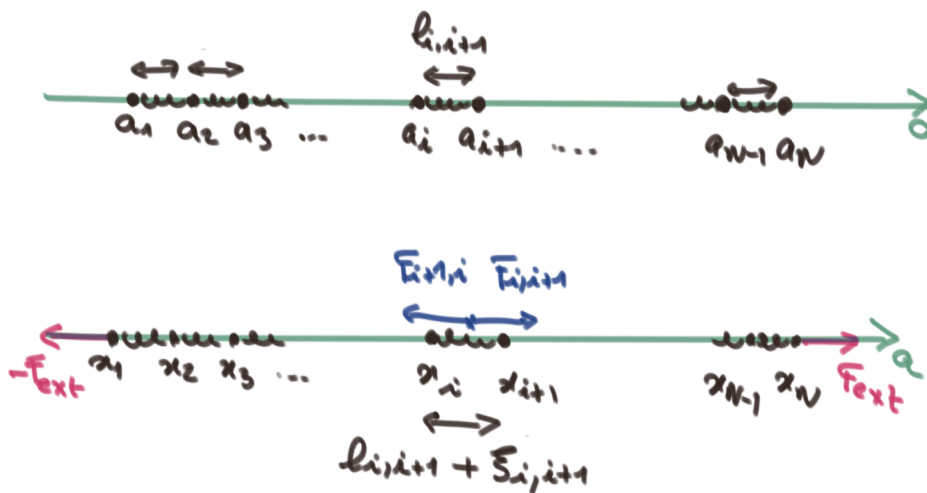
$$\text{avec} \quad \Delta_{12} = \frac{h_{12}-l_{12}}{l_{12}} = \frac{\xi_{12}}{l_{12}} \quad \text{et} \quad \Delta_{23} = \frac{h_{23}-l_{23}}{l_{23}} = \frac{\xi_{23}}{l_{23}} .$$

On en déduit $l_{12} F_{12} + l_{23} F_{23} = \alpha (\xi_{12} + \xi_{23}) = \alpha \xi_{13}$ où $\xi_{23} = \xi_{12} + \xi_{23} = \xi_3 - \xi_3$ est l'allongement du système global constitué de la jonction des deux ressorts. La loi de comportement du système global obéit à la même loi que celle d'un ressort unique :


$$F_{ext} = F_{13} = \alpha \Delta_{13} \quad \text{avec} \quad \Delta_{13} = \frac{\xi_{13}}{l_{13}} .$$

Ce résultat peut paraître trivial dans la mesure où la jonction de deux ressorts de coefficient α commun peut être considéré comme un ressort unique. On remarque toutefois que la forme usuelle $F_{ext} = k \xi_{13}$, où k est la constante de raideur, doit prendre en compte la relation $k = \alpha/l$: la constante de raideur d'un ressort est inversement proportionnelle à sa longueur.

1.3. Chaîne de ressorts



On considère un chaîne de ressorts dont le coefficient de comportement élastique α est le même et les abscisses des extrémités sont notées a_i pour $i = 1, 2, \dots, N$ et les longueurs $l_{i,i+1} = a_{i+1} - a_i$ pour $i = 1, 2, \dots, N - 1$. En l'absence de contraintes, tous les ressorts ont la même longueur δa . On applique alors les forces $-F_{ext}$ en $a = a_1$ et F_{ext} en $a = a_N$. Les extrémités occupent alors les positions x_i pour $i = 1, 2, \dots, N$.


 **Définition : Allongements relatifs des ressorts**

On note $\xi_i = x_i - a_i$ les déplacements des extrémités pour $i = 1, 2, \dots, N - 1$ et $\xi_{i,i+1} = \xi_{i+1} - \xi_i$ les allongements des ressorts, pour $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Les allongements relatifs sont notés $\Delta_{i,i+1} = \xi_{i,i+1} / l_{i,i+1}$. En notant $F_{i,i+1}$ les forces intérieures aux ressorts, la loi de comportement élastique entraîne $F_{ext} = F_{i,i+1} = \alpha \Delta_{i,i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

 **Méthode : Passage au continu**

On suppose que $l_{i,i+1} = a_{i+1} - a_i = \delta a$ est constant et l'on fait tendre cette longueur vers zéro tout en faisant tendre N vers l'infini de façon à maintenir la longueur $L = (N - 1) \delta a$ constante. On note alors $x_i = \xi(a_i, t)$, où t est par exemple le temps si $F_{ext}(t)$ varie, et $\xi(a, t)$ est une fonction dérivable obtenue par passage à la limite $\delta a \rightarrow 0$. En appliquant la relation d'équilibre des forces (principe d'action réaction) et faisant tendre δa vers zéro, on peut écrire :

$$F_{ext}(t) = F_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi(a_{i+1}, t) - \xi(a_i, t)}{a_{i+1} - a_i} = \alpha \frac{\xi(a_i + \delta a, t) - \xi(a_i, t)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} \alpha \frac{\partial \xi(a_i, t)}{\partial a}.$$

 **Texte légal : Loi de comportement continue**

La formulation continue de la loi de comportement élastique de ce ressort de taille L s'écrit donc :

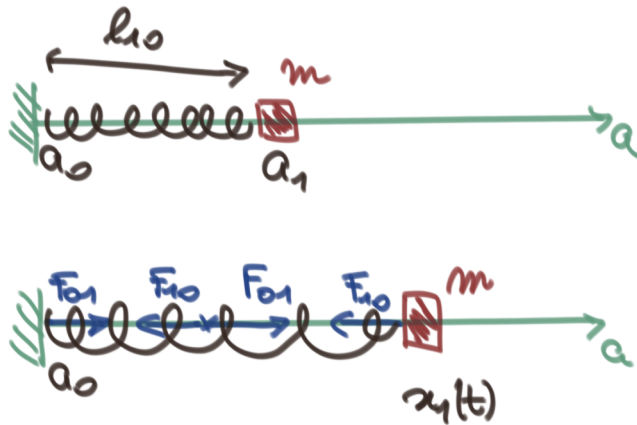
$$F_{ext}(t) = \alpha \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} \quad \text{pour tout } a \in [a_1, a_1 + L].$$

On en déduit que le déplacement $\xi(a, t) = \xi_0(t) + \alpha a F_{ext}(t)$ est une fonction linéaire de a .

2. Dynamique d'une chaîne massique

Dans ce chapitre, la dynamique du ressort mettant en mouvement une masse unique est rappelée puis étendue au cas d'une chaîne de ressorts et de masse infinitésimales, pour obtenir une équation aux dérivées partielles décrivant la limite continue d'un solide élastique. L'équation de D'Alembert ainsi obtenue est aussi appelée "équations des ondes". Cette approche unidimensionnelle est souvent présentée comme la description continue d'une chaîne d'atomes interagissant par des forces de liaison, même si un modèle plus complexe, prenant en compte la disposition tridimensionnelle des atomes, permettrait d'être plus réaliste.

2.1. Ressort et masse unique



On considère une masse m reliée par un ressort à un socle fixe situé en $a = a_0$. Sa position est a_1 au repos et $x_1(t)$ lorsqu'il est en mouvement. On note l_{01} sa longueur au repos.

Définition : Déplacement et force intérieure

On note $\xi_1(t) = x_1(t) - a_1$ le déplacement qui est aussi l'allongement $\xi_{0,1}$. L'intensité de la force intérieure suit la loi de comportement élastique $F_{01} = \alpha \xi_{0,1} = k \xi_1(t)$ où $k = \alpha/l_{0,1}$ est la constante de raideur du ressort de longueur l_{01} au repos.

Rappel : Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m s'écrit :

$$m \ddot{x}_1(t) = -F_{01} \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{\xi}_1(t) = \frac{k}{m} \xi_1(t)$$

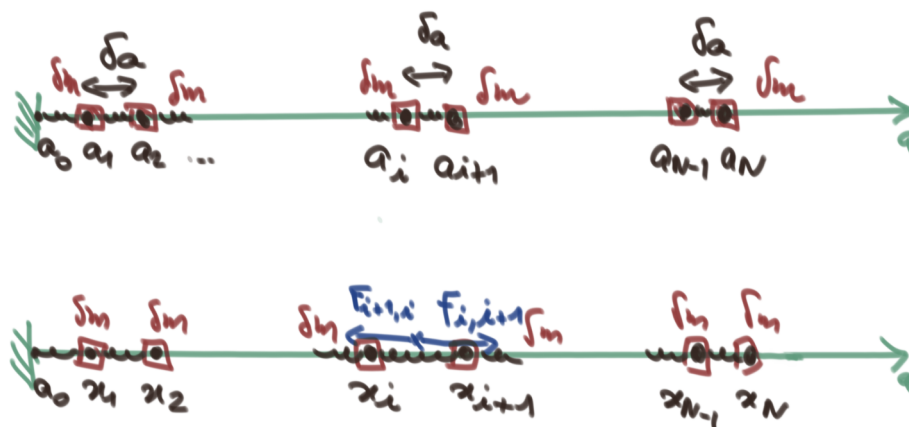
Méthode : Équation du mouvement

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire s'écrit :

$$\xi_1(t) = \zeta \cos(\omega t + \varphi),$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ est la pulsation et φ la phase. La période de cette fonction est $T = 2\pi/\omega$ et sa fréquence $f = 1/T = \omega/(2\pi)$.

2.2. Chaîne finie de masses et ressorts



On considère une chaîne de ressorts de longueurs δa au repos reliant des masses δm dont les extrémités sont en a_i pour $i = 1, 2, \dots, N$. On suppose que N tend vers l'infini avec $L = N \delta a$, la longueur de la chaîne et $\rho = \delta m / \delta a$, sa masse linéique, constants. Dans cette limite, les déplacements sont représentés par un champ continu $\xi(a, t)$ résultant de la discrétisation $\xi_i(t) = \xi(a_i, t)$.

◆ *Rappel : Principe fondamental de la dynamique*

Les forces intérieures dans les ressorts vérifient les lois de comportement $F_{i,i+1} = \alpha \xi_{i,i+1}$ avec $\xi_{i,i+1} = \xi_{i+1} - \xi_i$. Le principe fondamental appliqué aux masses $i = 2, 3, \dots, N - 1$ s'écrit :

$$\delta m \ddot{\xi}_i = F_{i,i+1} - F_{i-1,i} = \frac{\alpha}{\delta a} (\xi_{i+1} - \xi_i) - \frac{\alpha}{\delta a} (\xi_i - \xi_{i-1}) = \frac{\alpha}{\delta a} (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$$

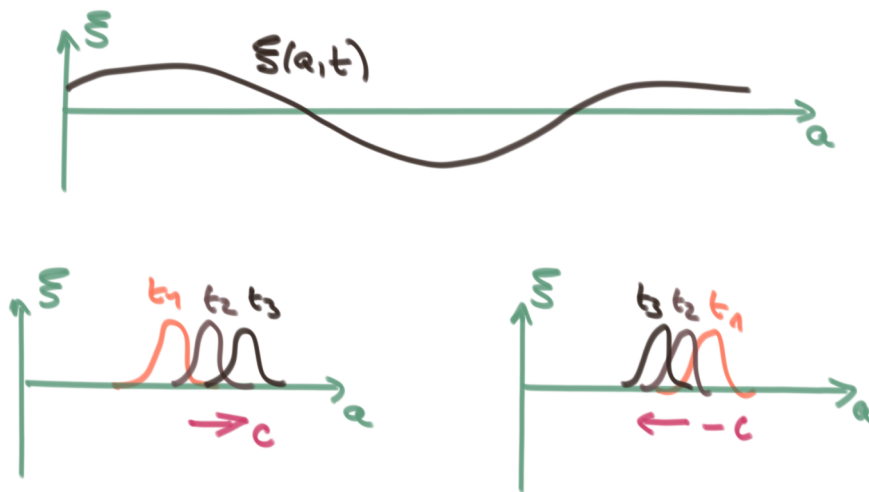
✂ *Méthode : Équation du mouvement*

En utilisant la relation $\delta m = \rho \delta a$ et la représentation continue du déplacement, l'équation du mouvement pour $i = 2, 3, \dots, N - 1$ s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(a_i, t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\xi(a_{i+1}, t) - 2\xi(a_i, t) + \xi(a_{i-1}, t)}{\delta a^2} .$$

Nous allons montrer que le passage à la limite $\delta a \rightarrow 0$ conduit à une équation aux dérivées partielles.

2.3. Équation de D'Alembert



Nous avons établi l'équation du mouvement suivante pour la représentation continue du champ de déplacement :

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(a,t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\xi(a+\delta a,t) - 2\xi(a,t) + \xi(a-\delta a,t)}{\delta a^2} .$$

Il s'agit maintenant d'exprimer le second membre de cette équation dans la limite $\delta a \rightarrow 0$.

Méthode : Développements limités pour la limite continue

Dans la limite $\delta a \rightarrow 0$, on peut écrire les développements limités suivants :

$$\xi(a + \delta a, t) = \xi(a, t) + \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} \delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial a^2} \delta a^2 + O(\delta a^3)$$

$$\xi(a - \delta a, t) = \xi(a, t) - \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} \delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial a^2} \delta a^2 + O(\delta a^3)$$

En reportant ces expressions dans l'équation du mouvement, elle devient :

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(a,t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \xi(a,t)}{\partial a^2} + O(\delta a) .$$

Texte légal : Équation de D'Alembert

On a donc établi, dans la limite $\delta a \rightarrow 0$, l'équation des ondes unidimensionnelle (1D), appelée "équation de D'Alembert" 1D :

$$\frac{\partial^2 \xi(a,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(a,t)}{\partial a^2} .$$

avec $c^2 = \alpha/\rho$, où $c = \sqrt{\alpha/\rho}$ a la dimension d'une vitesse.

☞ *Exemple : Exemple de solutions*

On peut vérifier aisément que $\xi(a, t) = F(a - ct)$ ou $\xi(a, t) = G(a + ct)$ sont des exemples de solutions pour des choix de fonctions dérivables $F(X)$ ou $G(X)$ quelconques. On montrera dans la suite, si ce n'est pas évident, que ces solutions représentent la propagation sans déformations de signaux aux vitesses respectives c et $-c$.

3. Solutions de l'équation des ondes

Des solutions de l'équation de D'Alembert 1D sont présentées ici en prenant en compte des conditions initiales ou des conditions aux limites. La démonstration de la forme générale des solutions n'est pas évoquée, même si elle pourrait être présentée de manière simple. L'exemple des solutions stationnaires de la chaîne infinie de ressorts permet d'illustrer ces conditions aux limites.

3.1. Solution générales en milieu infini

On admet ici que la forme générale de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial a^2}$ s'écrit $\xi(a, t) = F(a - ct) + G(a + ct)$ où $F(X)$ et $G(X)$ sont des fonctions dérivables quelconques.

🔍 *Remarque : Conditions initiales en milieu infini*

On suppose que $a \in \mathbb{R}$, le milieu étant considéré comme infini. On cherche alors à déterminer la solution $\xi(a, t)$ pour $t \geq 0$, issue des conditions initiales $\xi(a, 0) = \xi_0(a)$ et $\frac{\partial \xi(a, 0)}{\partial t} = v_0(a)$. En imposant ces conditions à la forme générale des solutions, on obtient $F(a) + G(a) = \xi_0(a)$ et $-c F'(a) + c G'(a) = v_0(a)$. En intégrant cette dernière équation par rapport à a , on obtient le système :

$$\begin{aligned} F(a) + G(a) &= \xi_0(a), \\ -F(a) + G(a) &= \phi_0(a) = \int_{a_*}^a v_0(s) ds, \end{aligned}$$

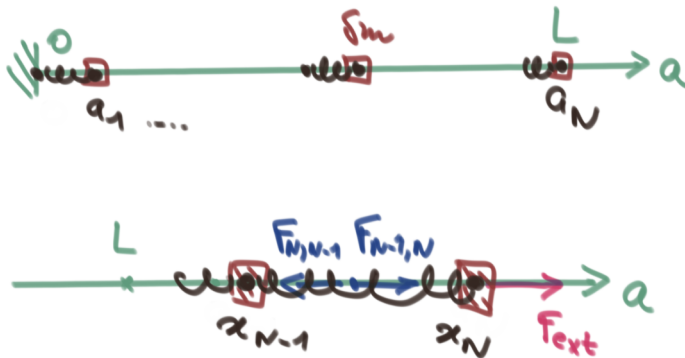
où a_* est une constante arbitraire. On en déduit $2F(a) = \xi_0(a) - \phi_0(a)$ et $2G(a) = \xi_0(a) + \phi_0(a)$.

✂ Méthode : Expression de la solution

On a donc obtenu l'expression de la solution de l'équation de D'Alembert issue des conditions initiales :

$$\begin{aligned}\xi(a, t) &= \frac{1}{2} [\xi_0(a - ct) + \xi_0(a + ct)] + \frac{1}{2c} \left[- \int_{a_*}^{a-ct} v_0(s) ds + \int_{a_*}^{a+ct} v_0(s) ds \right], \\ &= \frac{1}{2} [\xi_0(a - ct) + \xi_0(a + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{a-ct}^{a+ct} v_0(s) ds.\end{aligned}$$

3.2. Conditions aux limites



Nous avons établi que l'équation du mouvement d'un matériau élastique était régi par l'équation de D'Alembert 1D $\frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial a^2}$, où $\xi(a, t)$ est le champ de déplacement. Dans certains cas, on peut considérer que la matière 1D est d'extension infinie si on se place loin des extrémités. Dans le cas d'une longueur finie L avec $a \in [0, L]$, il convient de spécifier des conditions aux limites aux extrémités.

✂ Méthode : Déplacement imposé

La condition aux limites la plus simple consiste à supposer que le déplacement est fixé. Dans le cas de l'extrémité $a = 0$, on écrit alors $\xi(0, t) = 0$.

✂ Méthode : Contrainte imposée

On suppose ici que l'on impose une force extérieure F_{ext} en $a = L$. En revenant à l'approximation de la déformation par une chaîne de ressorts, la force intérieure $F_{N-1, N}$ du dernier ressort vérifie :

$$F_{ext} = F_{N-1, N} = \frac{\alpha}{\delta a} [\xi_N(t) - \xi_{N-1}(t)] = \alpha \frac{\xi(a_N, t) - \xi(a_{N-1}, t)}{\delta a} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \alpha \frac{\partial \xi(a_N, t)}{\partial a}.$$

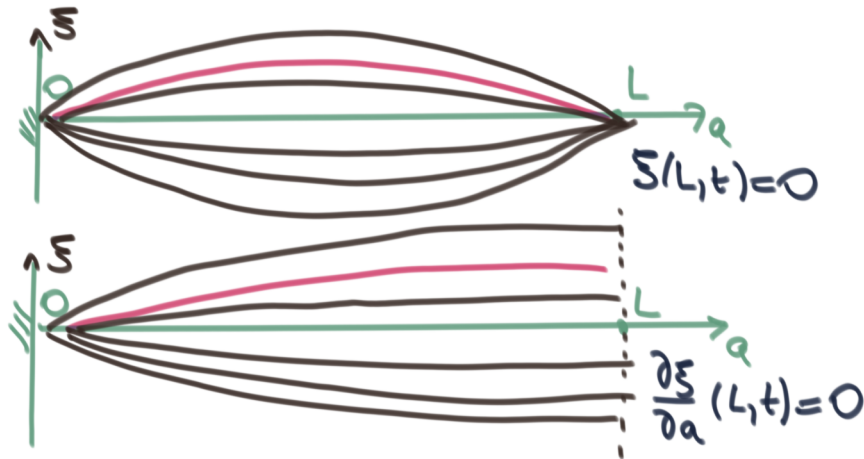
La condition aux limites en $a = L$ s'écrit donc $F_{ext} = \alpha \frac{\partial \xi(L, t)}{\partial a}$.



Complément : Conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann

On appelle "conditions aux limites de Dirichlet" celles qui consistent à imposer la valeur d'un champ, comme par exemple la condition de déplacement nul $\xi(0, t) = 0$, et "conditions aux limites de Neumann" celles qui consistent à imposer la dérivée de valeur d'un champ, comme par exemple la condition de contrainte $F_{ext} = \alpha \frac{\partial \xi(L, t)}{\partial a}$.

3.3. Exemples de solutions stationnaires



On présente ici des exemples de solutions stationnaires de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(a, t)}{\partial a^2}$ en présence de conditions aux limites aux bornes de l'intervalle $[0, L]$.

Exemple : Déplacements nuls aux extrémités

On impose ici les déplacements nuls $\xi(0, t) = 0$ et $\xi(L, t) = 0$ aux bornes de l'intervalle. On vérifie alors l'existence de la solution :

$$\xi(a, t) = \xi_{max} \sin(ka) \cos(\omega t)$$

pour $k = \pi/L$ et $\omega = kc$. Cette solution stationnaire comporte deux noeuds, aux extrémités, et un ventre, au centre de l'intervalle.

Exemple : Déplacement nul à une seule extrémité

On impose ici le déplacement nul $\xi(0, t) = 0$ et la contrainte nulle $\frac{\partial \xi(L, t)}{\partial a} = 0$ aux bornes de l'intervalle. On vérifie alors l'existence de la solution :

$$\xi(a, t) = \xi_{max} \sin(ka) \cos(\omega t)$$

pour cette fois $k = \pi/(2L)$ et $\omega = kc$. Cette solution stationnaire comporte un noeud, en $a = 0$, et un ventre, en $a = L$.

Ondes non dispersives

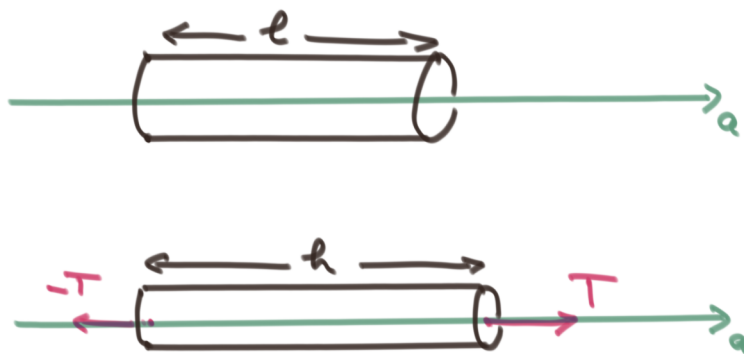


Dans ce chapitre, on montre que l'équation de D'Alembert 1D, ou équation des ondes 1D, décrit la propagation de signaux qui ne se déforment pas. Les ondes monochromatiques se propagent toutes à la même vitesse, indépendamment de leur longueur d'onde. On dit que ces ondes sont "non dispersives". Au-delà des ondes élastiques longitudinales, qui sont présentées ici avec un autre point de vue, les ondes élastiques transversales d'une corde tendue obéissent à la même équation. Les exemples des ondes sonores et électriques le long d'un coaxial complètent cette collection d'ondes non dispersives. L'exemple des ondes de surface en milieu très profond est évoqué pour illustrer la notion d'ondes dispersives, lorsque la vitesse de ondes dépend de leur longueur d'onde.

1. Ondes élastiques longitudinales

L'exemple des chaînes de ressorts, la loi de comportement élastique d'une barre soumise à des forces dans la direction de son axe conduit à la modélisation de son champ de déplacement par l'équation des ondes. La formulation des conditions aux limites est illustrée en discrétisant le barreau en petits éléments infinitésimaux, dans l'esprit du passage au continu des chaînes de ressort. L'exemple des ondes sismique est évoqué dans ce paragraphe pour illustrer ces ondes longitudinales.

1.1. Module de Young



On considère un barreau élastique dont l'aire S de la section est constante, d'axe Oa et de longueur l en l'absence de contraintes. On impose alors les forces respectives $-T$ et T (en Newton : N) à ses deux extrémités. Il en résulte une déformation et on note h la nouvelle longueur du barreau.

Définition : Force surfacique et allongement

On note alors $F = T/S$ la force surfacique (en Pascal : Pa) exercée sur les deux faces d'aire S . On note $\Delta = (h - l)/l$ l'allongement du barreau dans la direction de l'axe.

Texte légal : Loi de Hooke

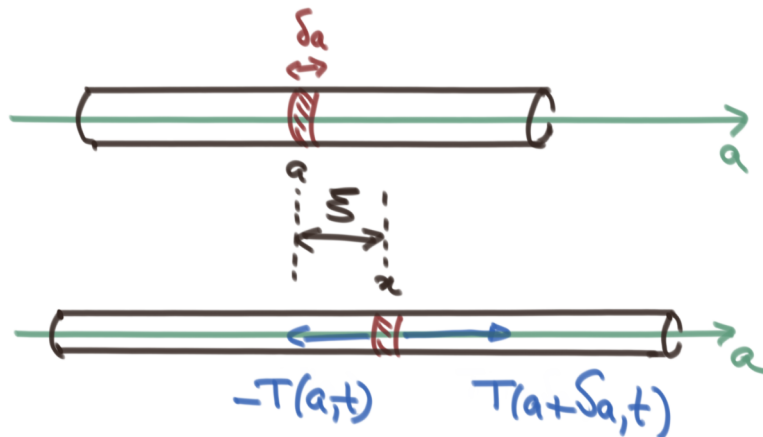
Le comportement élastique du barreau est régi par la loi de Hooke qui s'écrit $F = E \Delta$ où E est le module de Young (en Pascal : Pa). La loi de Hooke spécifie également de rétrécissement dans les directions transversale (coefficient de Poisson), mais cette propriété n'est pas nécessaire pour la suite.

Exemple : Exemple de valeur du module de Young

La valeur de E pour les matériaux courants est comprise entre 10^{11} Pa et 10^{12} Pa, comme par exemple :

- Acier à ressort : $E = 220 \cdot 10^9$ Pa,
- Fer : $E = 196 \cdot 10^9$ Pa,
- Aluminium : $E = 69 \cdot 10^9$ Pa.

1.2. Modélisation du mouvement



On considère un barreau élastique de section S constante, d'axe Oa et de densité linéique ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$). On note $\xi(a, t)$ le champ de déplacement dans ce milieu continu. On note $T(a, t)$ le champ de forces intérieures dans le barreau. La loi de Hooke relie ces deux champs à travers la relation :

$$T(a, t) = E S \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} .$$

◆ Rappel : Principe fondamental de la dynamique

L'application du principe fondamental de la dynamique à une portion du barreau de longueur δa et donc de masse $\delta m = \rho \delta a$ s'écrit :

$$\delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = T(a + \delta a, t) - T(a, t) = E S \left[\frac{\partial \xi}{\partial a}(a + \delta a, t) - \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) \right] .$$

En utilisant $\delta m = \rho \delta a$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = T(a + \delta a, t) - T(a, t) = \frac{E S}{\rho} \frac{\frac{\partial \xi}{\partial a}(a + \delta a, t) - \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t)}{\delta a} .$$

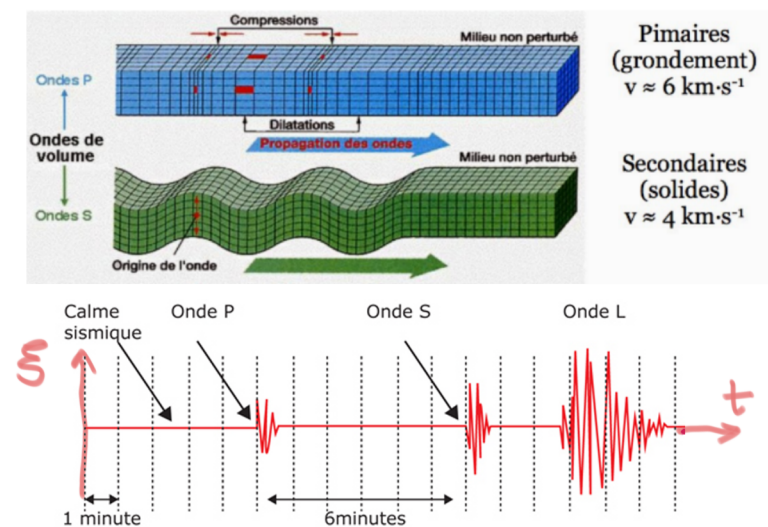
✂ Méthode : Passage à la limite d'une portion infinitésimale

En faisant tendre δa vers zéro, on obtient l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) ,$$

avec $c = \sqrt{E S / \rho}$.

1.3. Exemples des ondes sismiques



Les ondes sismiques peuvent être considérées comme des ondes élastiques basées sur la compressibilité des roches. Lors d'un tremblement de terre, les ondes les plus rapides, appelées "ondes primaires" (P), sont des ondes longitudinales, semblables aux ondes élastiques dans le barreau dont nous avons considéré uniquement les déplacements le long de son axe.

Après les "ondes P" arrivent les "ondes secondaires" (S), qui correspondent à des déplacements orthogonaux à la direction de propagation de l'onde. Ces ondes peuvent être comparées aux ondes transversales qui seront étudiées plus loin dans le cas des cordes tendues.

Un troisième type d'ondes, appelées "ondes de Rayleigh" ou "ondes L", se propagent moins vite que les ondes P et les ondes S, mais font beaucoup plus de dégâts. On peut les comparer aux ondes de surface à l'interface de deux fluides.

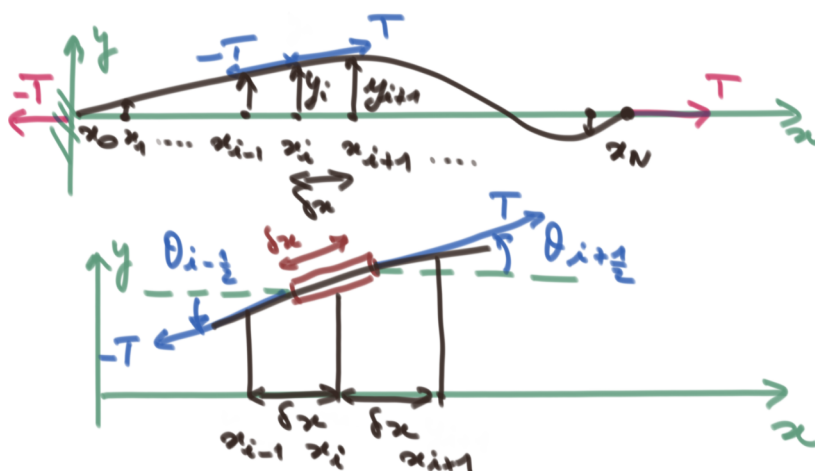
Méthode : Exemple numérique

En utilisant l'estimation $E = 60 \cdot 10^9$ Pa du coefficient de Poisson du granite et $\rho = 2 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ la masse linéique d'un barreau de matériau pour une section d'aire $S = 1$ m², on obtient une vitesse de propagation des ondes longitudinales de $c = \sqrt{E S / \rho} = 8 \cdot 10^3$ m.s⁻¹.

2. Ondes élastiques transversales

Les vibrations d'une corde tendue dans une direction perpendiculaire à son axe s'expliquent par la force de rappel qui la ramène vers sa position d'équilibre. En faisant l'hypothèse des petits déplacements, on montre qu'ils obéissent à l'équation des ondes 1D. L'expression de la vitesse C en fonction de l'intensité de la tension de la corde et de sa masse linéique est calculée et les conditions aux limites aux extrémités sont formulées. Des exemples de solutions stationnaires sont donnés dans ce paragraphe pour illustrer la famille des modes propres d'oscillation des cordes tendues.

2.1. Cordes tendues



On considère une corde tendue avec une tension T (Newton : N) et on s'intéresse à ses petits déplacements dans le direction Oy perpendiculaire à son axe Ox . Pour établir les équations de ces vibrations, on discrétise la corde en $N - 1$ portions de longueur δx et de masse $\delta m = \rho \delta x$ où ρ est la masse linéique de la corde (kg.m⁻¹).

Définition : Angle de la corde avec l'axe

On note y_i , pour $i = 1, 2, \dots, N$ les petits déplacements des points x_i situés au centre des éléments de longueur δx et $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ pour $i = 0, 2, \dots, N$ l'angle que fait la corde avec l'axe Ox à la jonction de ces éléments. En approximant la corde par des segments de droite, on peut écrire :

$$y_{i+1} - y_i = \delta x \tan\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Rappel : Principe fondamental de la dynamique

Les forces de contact appliquées à un petit élément de centre x_i sont de module T et font respectivement un angle $\theta_{i-\frac{1}{2}}$ (sens négatif) et $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ (sens positif) avec l'axe des x . En projetant sur l'axe Ox le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément, on obtient :

$$\delta m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = T \left[\sin\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right) - \sin\left(\theta_{i-\frac{1}{2}}\right) \right].$$

Méthode : Petites oscillations

On peut estimer que les oscillations sont petites lorsque $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \ll 1$. Dans ce cas, on peut approximer tous les angles θ par les relations $\theta \sim \sin \theta \sim \tan \theta$ dans la mesure où $\theta \ll 1$. L'équation du mouvement devient alors :

$$\rho \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{T}{\delta x^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}).$$

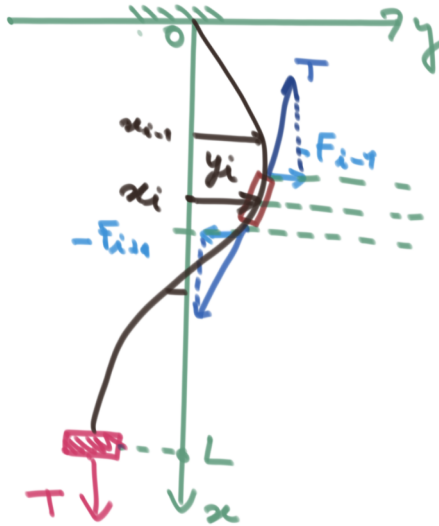
📖 *Texte légal : Limite continue*

En passant à la limite $\delta x \rightarrow 0$, on obtient l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2},$$

avec $c = \sqrt{T/\rho}$.

2.2. Conditions aux limites



Nous avons établi que l'équation des ondes $\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ régit les petits déplacements transversaux y d'une corde tendue de masse linéique ρ et de tension T . Il s'agit ici de formuler les conditions aux limites de cette équation aux dérivées partielles.

📖 *Rappel : Projection de la tension dans la direction transversales*

La grandeur $F = T \frac{\partial y}{\partial x} = T \tan(\theta) \sim T \theta \sim T \sin \theta$ peut être vue comme la projection de la tension dans la direction y puisque son angle θ avec l'axe de la corde est supposé petit (faibles perturbations autour de la position d'équilibre).

Une seconde démonstration du passage au continu consiste à utiliser cette interprétation pour appliquer le principe fondamental de la dynamique, projeté dans la direction Oy , à l'élément de longueur $2 \delta x$ compris entre x_{i-1} et x_{i+1} pour $i = 2, 3, \dots, N - 1$:

$$2 \delta m \ddot{y}_i(t) = F_{i+1} - F_{i-1}.$$

En utilisant $\delta m = \rho \delta x$, le passage à la limite $\delta x \rightarrow 0$ s'écrit :

$$\rho \ddot{y}_i(t) = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2 \delta x} \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.$$

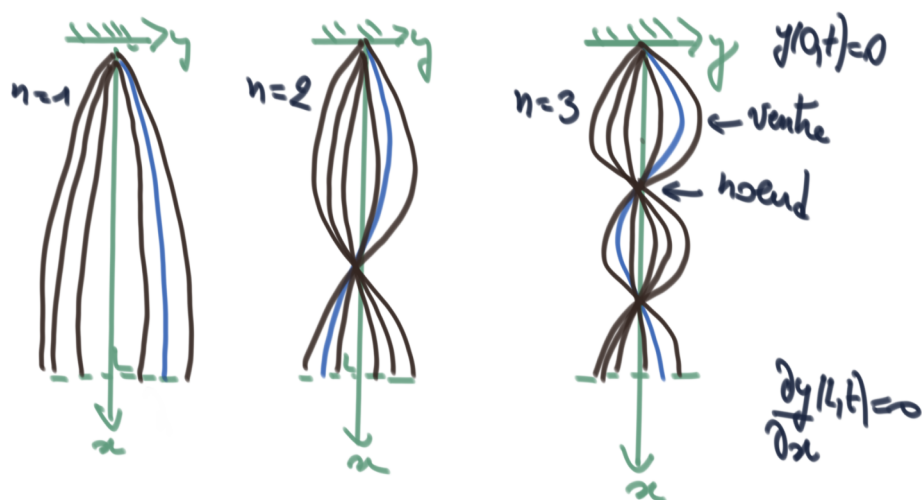
✂ Méthode : Déplacement imposé

Lorsqu'une extrémité de la corde est accrochée à un support fixe ou mobile, la condition aux limites consiste à imposer le déplacement. Si le support est immobile, par exemple en $x = 0$, on impose $y(0, t) = 0$ pour tout temps.

✂ Méthode : Contrainte imposée

Un autre type de condition aux limites consiste à imposer la projection de la tension sur l'axe Oy à une extrémité. Si la tension reste parallèle à l'axe Oy , par exemple dans le cas d'une masse attaché à l'extrémité $x = L$ dont le poids est responsable de la tension T , la condition aux limites pour cette extrémité libre de se déplacer s'écrit $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$ pour tout temps.

2.3. Exemples de solutions stationnaires



On considère une corde tendue de longueur L dont les petits déplacements transversaux sont régis par l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, avec $c = \sqrt{T/\rho}$ où T est la tension et ρ la masse linéique. On présente des exemples de solutions stationnaires permettant de satisfaire deux jeux de conditions aux limites.

◆ Rappel : Expression analytique d'une solution stationnaire

On vérifie aisément que le champ de déplacement $y(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t)$ est solution de l'équation des ondes à condition que $\omega = \pm kc$. On effect, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -c^2 k^2 y$. Les conditions aux limites vont quantifier le choix des nombres d'onde k .

✂ Méthode : Cordes avec deux extrémités fixes

On suppose ici que les extrémités de la corde sont fixées, ce que l'on traduit par les conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$. Si la première condition est trivialement satisfaite, la seconde impose $\sin(kL) = 0$. On en déduit que $k = n\pi/L$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier strictement positif.

Le tracé des solutions montre que n est le nombre des ventres tandis que le nombre de noeuds, en comptant les extrémités, est $n + 1$.

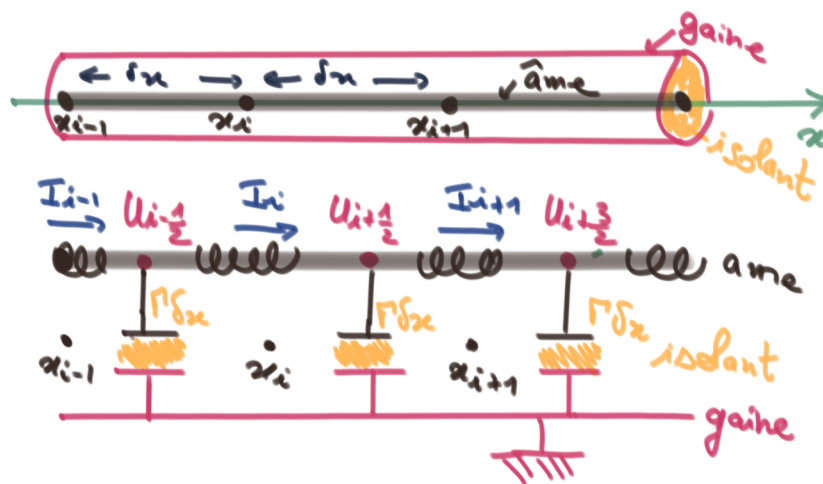
✕ Méthode : Cordes avec une extrémité fixe et une extrémité libre

On suppose ici que $y(0, t) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$, ce qui correspond au cas où l'extrémité $x = 0$ est fixée tandis que l'extrémité L est libre. On en déduit que $k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi/L$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier strictement positif. Le tracé des solutions montre que n est le nombre des noeuds et de ventres, avec un noeud en $x = 0$ et un ventre en $x = L$.

3. Autres types d'ondes

Au-delà des ondes élastiques longitudinales ou transversales, d'autres exemples d'ondes non dispersives sont présentés dans ce paragraphe : les ondes électriques dans les coaxiaux et les ondes sonores dans les tubes. Des éléments sur les ondes surfaces sont ensuite rapidement abordées, à titre d'exemple d'ondes non dispersives.

3.1. Ondes électriques dans un coaxial



On considère un câble coaxial dont l'âme central est un fil de cuivre entouré d'un isolant, lui-même entouré d'une gaine de cuivre. On discrétise le coaxial par des petits éléments de taille δx constitué d'une inductance $\Lambda \delta x$ et d'une capacité $\Gamma \delta x$. On s'intéresse aux fluctuations du courant électrique et de la tension le long du coaxial.

◆ Rappel : Couplage entre le courant et la tension

On note I_i le courant dans l'élément de longueur δx de la gaine considéré comme une inductance $\Lambda \delta x$ centrée autour de la position x_i . On note $U_{i+\frac{1}{2}}$ la tension à l'interface de deux tels éléments de coordonnées respectives x_i et x_{i+1} et on la considère comme étant la tension aux bornes de la capacité $\Gamma \delta x$, la gaine étant supposée reliée à terre. Les lois des mailles et des noeuds s'écrivent respectivement :

$$U_{i-\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2}} = \Lambda \delta x \frac{\partial I_i}{\partial t} \quad \text{et} \quad I_i - I_{i+1} = \Gamma \delta x \frac{\partial U_{i+\frac{1}{2}}}{\partial t} .$$

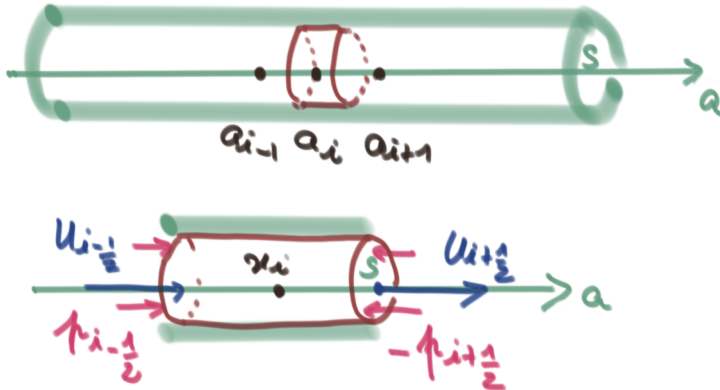
✂ **Méthode : Passage au continu**

En faisant tendre δx vers zéro, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial U}{\partial t} .$$

En combinant ces deux équations, on obtient l'équation des ondes $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ avec $c = \sqrt{1/(\Lambda \Gamma)}$.

3.2. Ondes sonores dans un tube



On considère un tube de section constante S rempli d'un gaz compressible dont la pression au repos est p_0 , la masse linéique ρ_0 ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) et l'entropie s_0 . On s'intéresse aux petites fluctuations de pression, de masse linéique et de vitesse autour de cet équilibre. On suppose que ces grandeurs sont homogènes dans chaque section et on note $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ et $u(x, t)$ les champs de pression, de masse linéique et de vitesse longitudinale.

🔗 **Définition : Linéarisation de la loi d'état**

On suppose que l'entropie reste constante lors de ces fluctuations et que la loi d'état pour la pression s'écrit $p = \mathcal{P}(\rho, s)$. En supposant que les fluctuations sont petites, on peut écrire :

$$p - p_0 \sim c^2 \frac{\rho - \rho_0}{S} \quad \text{avec} \quad c^2 = S \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}(\rho_0, s_0) .$$

Le coefficient de compressibilité $1/c^2$ est forcément positif dans la mesure où la pression augmente lorsque le volume diminue.

✂ **Méthode : Modélisation discrète du mouvement**

On découpe le volume de gaz contenu dans le tube en petits tronçons de tailles δa et de centres a_i pour $i \in \mathbb{Z}$ et on note ρ_i la masse linéique de chaque tronçon. On note alors $u_{i+\frac{1}{2}}$ et $p_{i+\frac{1}{2}}$ la vitesse et la pression à l'interface des tronçons de centres a_i et a_{i+1} .

◆ *Rappel : Conservation de la masse*

Lors des petites fluctuations, le volume de gaz initialement contenu dans un tronçon varie sans perte de masse, ce qui induit des variations de la masse linéique. On note $\zeta_i(t) = \delta a + d\zeta_i(t)$ la longueur variable du tronçon de position a_i et $\rho_i(t) = \rho_0 + d\rho_i(t)$ sa masse linéique. La conservation de la masse implique que le produit $\rho_i(t) \zeta_i(t) = \rho_0 \delta a$ est indépendant du temps. En considérant que les fluctuations sont petites, on peut écrire :

$$d(\rho_i \zeta_i) \sim \rho_0 d\zeta_i + da d\rho_i \quad \implies \quad da \dot{\rho}_i(t) = -\rho_0 \dot{\zeta}_i(t) .$$

On établit alors que $\dot{\zeta}_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}$ où $u_{i-\frac{1}{2}}$ et $u_{i+\frac{1}{2}}$ sont les vitesses des frontières du tronçon de position a_i . La loi de conservation de la masse s'écrit finalement :

$$\delta a \dot{\rho}_i(t) = -\rho_0 \left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right) .$$

🔍 *Remarque : Conservation de la quantité de mouvement*

Les pressions $p_{i-\frac{1}{2}}$ et $p_{i+\frac{1}{2}}$ aux frontières du tronçon de position a_i exercent des forces qui conduisent à l'écriture suivant du principe fondamental de la dynamique :

$$\rho_0 \delta a S \dot{u}_i(t) = -S \left(p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}} \right) ,$$

ou u_i est la vitesse du tronçon de position a_i .

✂ *Méthode : Passage au continu*

Dans la limite $\delta a \rightarrow 0$, les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement deviennent respectivement :

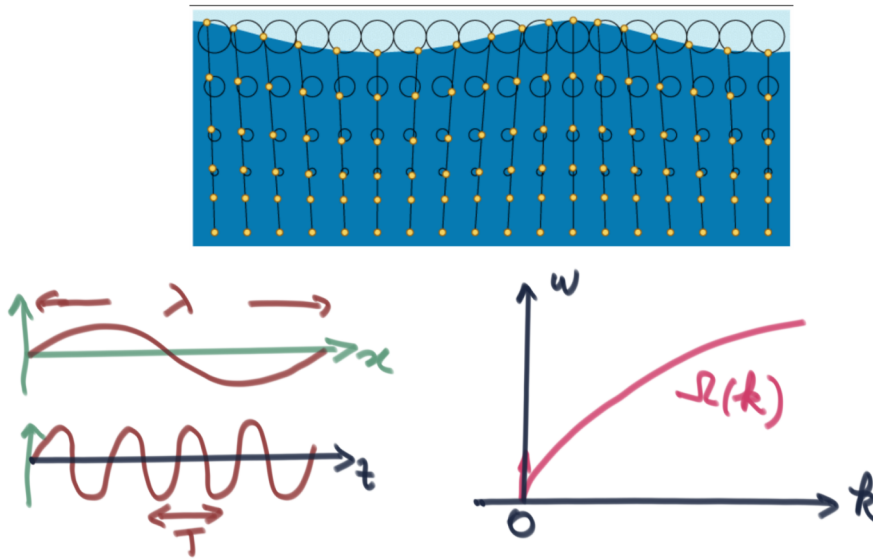
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{S}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial a} ,$$

où l'on a utilisé la loi d'état linéarisée $p - p_0 \sim c^2 \frac{\rho - \rho_0}{S}$.

📖 *Texte légal : Équation des ondes sonores 1D*

En combinant ces équations aux dérivées partielles, on obtient l'équation des ondes 1D $\frac{\partial^2 \rho(a,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho(a,t)}{\partial a^2}$. La vitesse du son vaut $c = 340$ m/s dans l'air et environ $c = 1500$ m/s dans l'eau.

3.3. Ondes de surface



Les ondes de surface s'observent à l'interface de deux fluides non miscibles, de masses volumiques différentes et considéré comme étant incompressibles. C'est le cas de l'interface entre l'air et l'eau que nous considérons ici à titre d'exemple. Ces ondes décrivent les petits mouvements des particules fluides et de l'interface sous l'action de la force de gravité.

🔑 Remarque : Trajectoires en profondeur infinie

Lors que la profondeur est grande devant les longueurs d'ondes, les trajectoires des particules d'eau sont des cercles dont le rayon décroît exponentiellement avec la profondeur.

🔑 Définition : Dispersion des ondes de surface

Les ondes de surface sont dispersives. Si on note λ la longueur d'onde d'une onde monochromatique et T sa période temporelle, la vitesse c_p des crêtes et des creux, appelée "vitesse de phase", dépend de λ . En note $k = 2\pi/\lambda$ et $\omega = 2\pi/T$, la vitesse de phase s'écrit $c_p = \omega/k$. On appelle "relation de dispersion" la fonction $\omega = \Omega(k)$ qui relie la pulsation au nombre d'onde.

Ondes progressives et stationnaires



Dans ce chapitre, on s'intéresse aux solutions de l'équation des ondes, ou équation de D'Alembert. Après avoir rappelé la forme générale des solutions unidimensionnelle (1D) de cette équation, on montre que les ondes stationnaires sont la superposition d'ondes progressives de même amplitude, qui se propagent dans des sens opposés. Ce modèle d'ondes non dispersives 1D est ensuite généralisé au cas des ondes amorties, dispersives ou tridimensionnelles.

1. Ondes progressives

Dans ce paragraphe, on démontre en détail que la forme générale des solutions de l'équation des ondes 1D décrit la propagation sans déformation de signaux dans l'une ou l'autre des directions de l'axe. On introduit alors la notation complexe pour décrire le cas des ondes progressives monochromatiques.

1.1. Solutions de l'équation des ondes

Comme indiqué précédemment, on admet que la forme générale de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$ s'écrit $\psi(x, t) = F(x - c t) + G(x + c t)$ où $F(X)$ et $G(X)$ sont des fonctions dérivables quelconques.

X *Méthode : Vérification de la validité des solutions*

Sans chercher à démontrer leur généralité, on peut vérifier que ces expressions sont bien solutions de l'équation des ondes en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= F'(x - c t) + G'(x + c t), & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= F''(x - c t) + G''(x + c t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -c F'(x - c t) + c G'(x + c t), & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c^2 F''(x - c t) + c^2 G''(x + c t). \end{aligned}$$

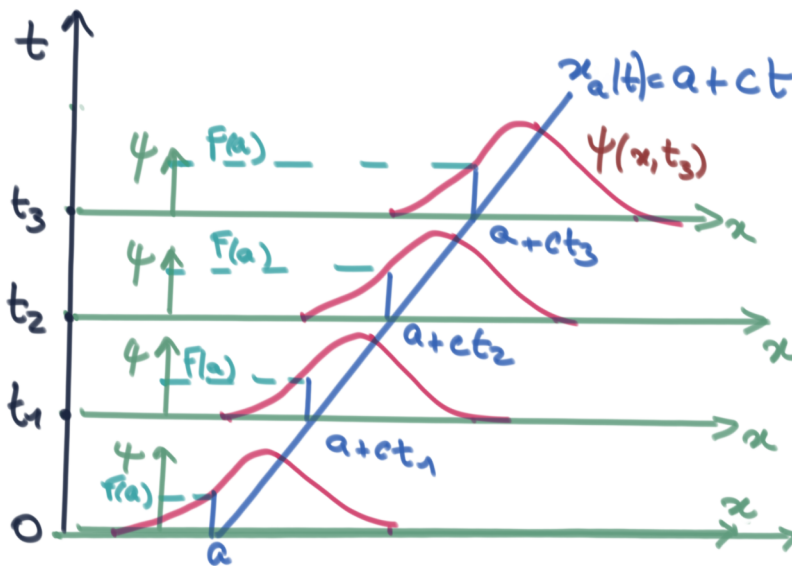
🔍 *Remarque : Autre expression générale*

L'expression générale des solution de l'équation des ondes 1D s'écrit également sous la forme $\psi(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ où $f(T)$ et $g(T)$ sont des fonctions dérivables quelconques.

📦 *Complément : Un changement de variable pour démontrer la généralité des solutions*

Sans présenter la démonstration qui attestent que toutes les solutions sont de la forme indiquée, on mentionne ici le changement de variable $u = x - c t$ et $v = x + c t$ qui permet de l'initier.

1.2. Propagation d'un signal



On considère un champ spatio-temporel de la forme $\psi(x, t) = F(x - c t)$ tel que $\psi(a, 0) = F(a)$ est un profil spatial connu. On cherche à tracer les profils spatiaux de ce champ lorsque de temps évolue. Notons qu'un tel champ est solution de l'équation des ondes 1D, mais le recours à cette équation n'est nécessaire dans ce paragraphe.

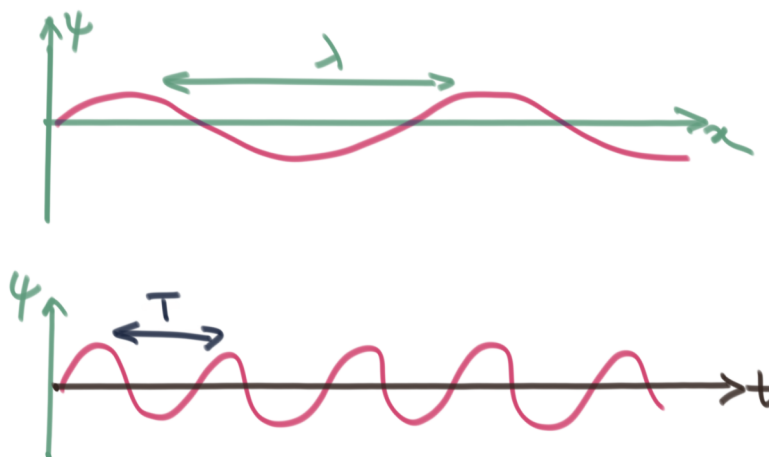
✂ Méthode : Signal vu par un observateur mobile

On considère la trajectoire $x_a(t) = a + c t$ pour une valeur de a fixée. On s'intéresse alors à la valeur $f_a(t)$ du signal observé en suivant cette trajectoire. Un simple calcul montre que $f_a(t) = \psi[x_a(t), t] = F(a)$ ne dépend pas du temps. On dit alors que le signal $F(a)$ se propage à la vitesse c . Plus généralement, le profil $F(a)$ se déplace à la vitesse c sans se déformer.

🔍 Remarque : Propagation dans le sens négatif

Une démonstration similaire permet d'établir que le champ $\psi(x, t) = G(x + c t)$ décrit la propagation sans déformation du signal $G(a)$ à la vitesse $-c$.

1.3. Ondes progressives monochromatiques



On appelle "onde progressive monochromatique" un champ de la forme :

$$\psi(x, t) = A \cos(k x - \omega t + \varphi) .$$

Cette expression est solution de l'équation des ondes pour $\omega = k c$. On définit alors la longueur d'onde $\lambda = 2 \pi / k$, où k est appelé le nombre d'onde, et la période temporelle $T = 2 \pi / \omega$, où ω est la pulsation. On définit alors la fréquence $f = 1 / T$ (Hertz : s^{-1}).

✂ Méthode : Notation complexe

On remarque que $\psi = \text{Re}(\underline{\psi})$ avec

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_m e^{i(k x - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \psi_m = A e^{i \varphi} \in \mathbb{C} ,$$

où $A \in \mathbb{R}$ est l'amplitude de l'onde et $\varphi \in \mathbb{R}$ est sa phase. En reportant l'expression complexe dans l'équation des ondes, on obtient :

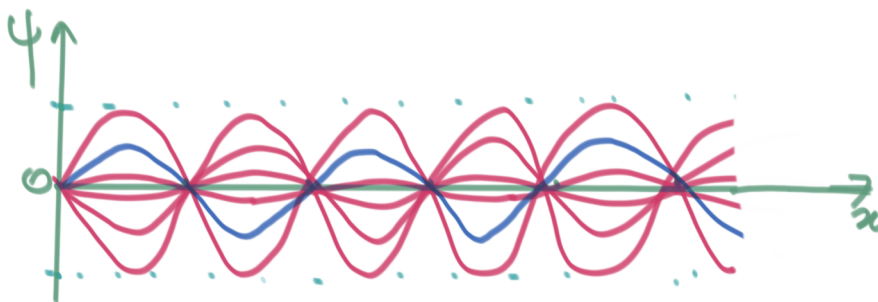
$$-\omega^2 \psi_m e^{i(k x - \omega t)} = -c^2 k^2 \psi_m e^{i(k x - \omega t)} .$$

Cette expression n'est solution que si l'une des deux relations de (non-)dispersion $\omega = k c$ ou $\omega = -k c$ est vérifiée.

2. Ondes stationnaires

Dans ce paragraphe, on définit les solutions stationnaires comme décrivant un signal temporel en tout point dont seule l'amplitude dépend de l'espace. On montre que toute solution stationnaire peut être vue comme la superposition d'ondes progressives monochromatiques se déplaçant en sens contraires.

2.1. Séparation de variables



On cherche ici des solutions de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$ sous la forme $\psi(x,t) = F(x) G(t)$. Ces solutions sont dites "stationnaires" dans la mesure où le signal temporel est partout proportionnel à la fonction $G(t)$. On appellera également "solution stationnaire" toute combinaison linéaire de telles solutions.

✂ Méthode : Choix d'une constante

En reportant l'expression recherchée dans l'équation des ondes, on obtient $F(x) G''(t) = c^2 F''(x) G(t)$, ce que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{G''}{G}(t) = c^2 \frac{F''}{F}(x) = \begin{cases} \gamma^2 \\ -\omega^2 \end{cases} .$$

En effet, l'égalité d'une fonction ne dépendant que de t avec une fonction ne dépendant que de x entraîne qu'elles sont toutes les deux constantes. Le choix d'une constante positive conduit à des solutions de la forme :

$$G(t) = B_+ e^{\gamma t} + B_- e^{-\gamma t} \quad \text{et} \quad F(x) = A_+ e^{\frac{\gamma x}{c}} + A_- e^{-\frac{\gamma x}{c}} .$$

Ces solutions divergent avec le temps si B_+ n'est pas nul, et tendent vers zéro sinon. On considère donc les solutions plus intéressantes de la forme

$$\underline{G}(t) = b_+ e^{i\omega t} + b_- e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{F}(x) = a_+ e^{i\frac{\omega x}{c}} + a_- e^{i\frac{\omega x}{c}},$$

avec (b_+, b_-, a_+, a_-) amplitudes complexes.

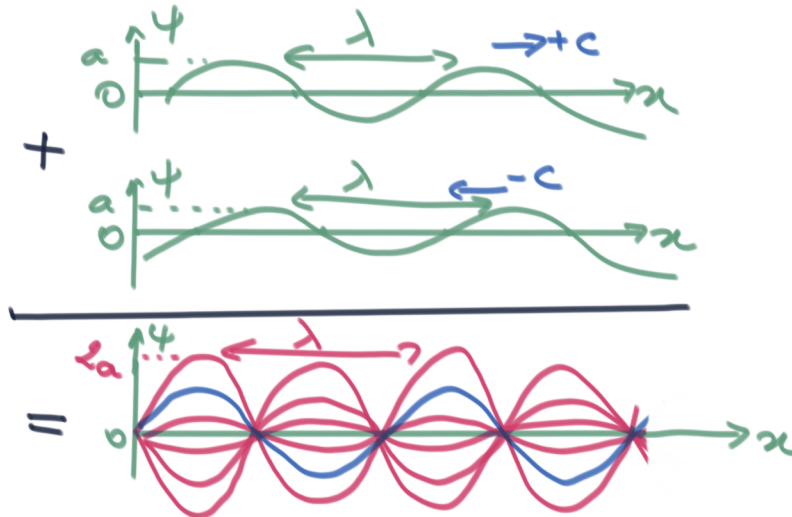
Texte légal : Forme générale des solutions stationnaires

On en déduit que $G(t) = \text{Re} [\underline{G}(t)] = b_m \cos(\omega t + \beta)$ et $F(x) = \text{Re} [\underline{F}(x)] = a_m \cos(\omega x / c + \alpha)$ où $(b_m, a_m, \beta, \alpha)$ sont des amplitudes ou des phases réelles. L'expression générale des solutions stationnaires de l'équation des ondes peut finalement s'écrire :

$$\psi(x, t) = \psi_m \cos [k(x - x_0)] \cos [\omega(t - t_0)],$$

avec $\omega = kc$. Cette expression permet de calculer la distance entre les noeuds et les ventres de l'onde stationnaire.

2.2. Superposition d'ondes progressives



On considère la superposition $\psi(x, t) = \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t)$ de deux ondes monochromatiques $\psi_+(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$ et $\psi_-(x, t) = a \cos(kx + \omega t)$, de même longueur d'onde et de même amplitude, mais se propageant dans des sens contraires. On va montrer que cette combinaison conduit à une onde stationnaire.

Méthode : Expression analytique

L'application de la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ permet d'écrire :

$$\psi(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + a \cos(kx + \omega t) = 2a \cos(kx) \cos(\omega t).$$

La superposition de ces ondes progressives, qui se propagent avec leurs vitesses respectives $c = \omega/k$ et $c = -\omega/k$, est donc une solution stationnaire.

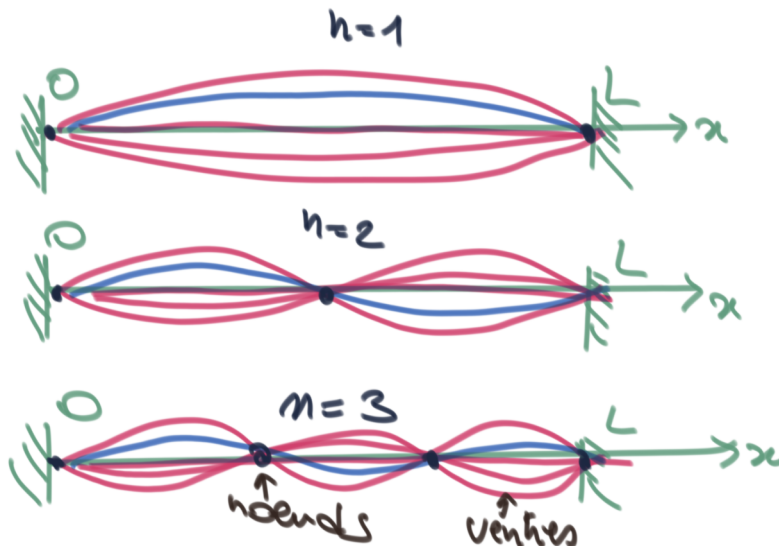
Remarque : Forme générale de la superposition

Même si on peut toujours se ramener aux expressions ci-dessus par changement d'origine de l'axe spatial et de l'axe temporel, l'expression générale traduisant cette superposition d'ondes monochromatique s'écrit :

$$\psi(x, t) = a \cos(kx - \omega t + \varphi_+) + a \cos(kx + \omega t + \varphi_-) = 2a \cos[k(x - x_0)] \cos[\omega(t - t_0)] ,$$

où x_0 et t_0 s'expriment en fonction des phases φ_+ et φ_- en appliquant la formule trigonométrique rappelée ci-dessus.

2.3. Décomposition en modes propres



Même si le raisonnement s'applique à tous les systèmes décrit par la même équation, on prend ici l'exemple des petits déplacements d'une corde tendue de longueur L avec deux extrémités bloquées, qui vérifie l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a, t)$ avec les conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

Définition : Modes propres d'oscillation

On appelle "modes propres" la suite de solutions $y_n(x, t) = a_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$, avec $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = k_n c$ pour les valeurs entières $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit d'une famille de solutions stationnaires dont le nombre de noeuds et de ventre augmente avec n . On montre que toute solution de l'équation des ondes avec les conditions aux limites considérées se décompose en une somme de modes propres :

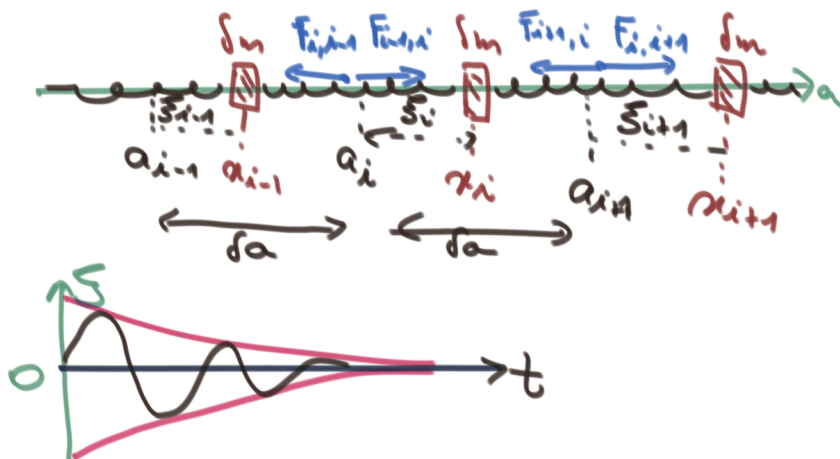
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) ,$$

Les modes propres forment donc une base dans l'espace des solutions du problème.

3. Au-delà de D'Alembert 1D

Dans ce paragraphe, on sort du cadre de l'équation des ondes 1D non dispersives pour évoquer l'exemple des ondes amorties, dispersives ou tridimensionnelles. Ces exemples, dont l'étude n'est que rapidement esquissée, permettent de bien mettre l'accent sur le caractère non amorti, non dispersif et unidimensionnel des ondes élastiques ou sonores, qui font l'objet principal de ce cours.

3.1. Ondes amorties



Pour illustrer la notion d'ondes amorties, on prend l'exemple d'une chaîne de petits ressorts de longueur δa couplant des petits solides de masse $\delta m = \rho \delta$ le long d'un axe. En plus des forces intérieures induites par l'élongation des ressorts, on suppose que le frottement des solides en mouvement dans un fluide induit des forces opposées à leur déplacement et dont l'intensité est proportionnelle à leur vitesse.

◆ *Rappel : Forces exercées par les ressorts.*

Les forces intérieures sont $F_{i,i+1} = (\alpha/\delta a) (\xi_{i+1} - \xi_i)$ où ξ_i est le déplacement des solides pour $i \in \mathbb{Z}$ et α une constante traduisant la raideur des ressorts. Dans la limite du continu $\delta a \rightarrow 0$, ces forces s'écrivent $F = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t)$, où $\xi(a, t)$ est le champ de déplacement.

🔗 *Définition : Forces de frottement*

On suppose qu'un petit solide dont le déplacement est $\xi_i(t)$ subit une force de frottement $G_i = -\beta \delta a \dot{\xi}_i$, où $\beta \geq 0$ dépend de la viscosité du fluide. Le principe fondamentale appliqué à un petit solide s'écrit donc :

$$\rho \delta a \ddot{\xi}_i = F_{i,i+1} - F_{i-1,i} + G_i = \frac{\alpha}{\delta a} (\xi_{i+1} - 2 \xi_i + \xi_{i-1}) - \beta \delta a \dot{\xi}_i .$$

Le passage au continu $\delta a \rightarrow 0$ s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - \beta \frac{\partial \xi}{\partial t} \iff \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - 2 \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} ,$$

avec $c^2 = \alpha/\rho$ et $\sigma = \beta/(2\rho)$.

✂ Méthode : Résolution à l'aide des solutions complexes

On cherche des solutions $\xi(a, t) = \text{Re} [\underline{\xi}(a, t)]$ avec :

$$\underline{\xi}(a, t) = \xi_m e^{i k x + s t} ,$$

où $\xi_m \in \mathbb{C}$ est une amplitude complexe, $k \in \mathbb{R}$ est un nombre d'onde et $s \in \mathbb{C}$ une nombre complexe. En reportant dans l'équation aux dérivées partielles du mouvement, on obtient :

$$(s^2 + 2 \sigma s + k^2 c^2) e^{i k a + s t} = 0 .$$

On en déduit que s doit être une des racines de l'équation du second degré $s^2 + 2 \lambda s + k^2 c^2 = 0$. Lorsque λ , qui traduit le frottement, est petit, ces racines sont $s \sim -\sigma \pm i \omega$ avec $\omega \sim k c$.

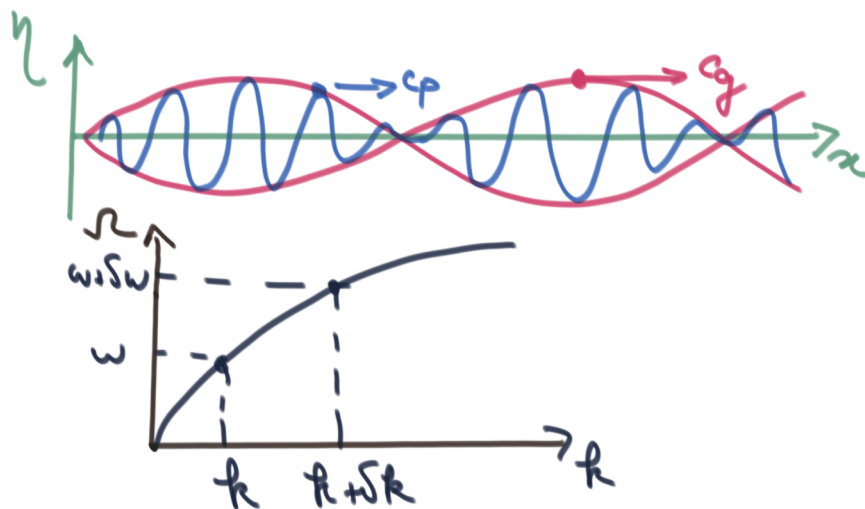
📖 Texte légal : Forme générale des solutions

En notant $\xi_m = |\xi_m| e^{i \varphi}$, on a donc trouvé des solutions réelles de la forme :

$$\xi(a, t) = |\xi_m| e^{-\sigma t} \cos(k a - \omega t + \varphi) .$$

Le frottement amortit donc exponentiellement l'amplitude des ondes.

3.2. Ondes dispersives



On considère des ondes de surface dans une couche fluide de profondeur infinie dont l'élévation est :

$$\eta(x, t) = a \cos[k x - \Omega(k) t + \varphi] ,$$

où k est un nombre d'onde, φ une phase et $\omega = \Omega(k) = \sqrt{g k}$ est la pulsation qui dépend de la gravité g et du nombre d'onde.

Définition : Vitesse de phase

La vitesse de phase $c_p = \omega/k$ est la vitesse à laquelle se propagent les crêtes et les creux des vagues. Elle dépend du nombre d'onde à travers la relation $c_p(k) = \Omega(k)/k = \sqrt{g/k}$. Ces ondes sont donc dispersives : leur vitesse de phase dépend de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. L'équation $\omega = \Omega(k)$ est appelée "relation de dispersion".

Définition : Vitesse de groupe

La vitesse de groupe est défini par la relation $c_g(k) = \Omega'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{g/k}$. C'est la vitesse de propagation de l'énergie ou des paquets d'ondes, comme on peut l'illustrer sur l'exemple de la superposition de deux ondes monochromatiques de nombres d'onde k et $k + \delta k$ voisins pour δk petit :

$$\eta(x, t) = a \cos[(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + a \cos[kx - \omega t],$$

où $\omega + \delta\omega = \Omega(k + \delta k) \sim \omega + c_g(k) \delta k$, en se restreignant au second ordre du développement limité en δk . L'application de la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ permet d'écrire :

$$\eta(x, t) = a \cos[k(x - c_p t)] \cos\left[\frac{\delta k}{2}(x - c_g t)\right]$$

où $c_p \sim \omega/k$ est proche de la vitesse de phase et $c_g \sim \delta\omega/\delta k$ est proche de la vitesse de groupe.

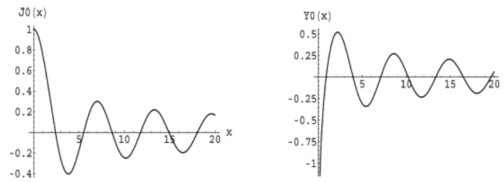
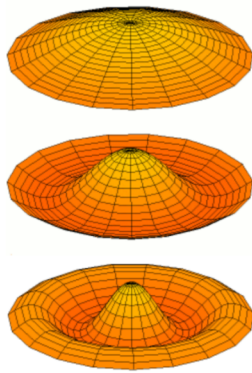
Définition : Onde porteuse et enveloppe

Par analogie avec le traitement du signal, ce paquet de deux ondes peut être vu comme la modulation d'une onde "porteuse" de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ par une enveloppe de période $\Lambda/2$, grande devant λ , avec $\Lambda = 4\pi/\delta k$. Les crêtes de l'onde porteuse se propagent à la vitesse de phase tandis que l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe. Dans le cas des ondes de surface en profondeur infinie, la vitesse de groupe est la moitié de la vitesse de phase.

Remarque : Paquet d'onde localisé dans l'espace

En superposant un grand nombre d'ondes monochromatiques de nombres d'onde voisins, l'enveloppe est localisée dans l'espace, ce qui met en évidence la propagation de l'énergie à la vitesse de groupe.

3.3. Ondes tridimensionnelles



On s'intéresse ici aux solutions $\psi(x, y, z, t)$ de l'équation des ondes tridimensionnelle (3D)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Définition : Ondes planes progressives monochromatiques

La représentation complexe des ondes planes progressives monochromatiques s'écrit :

$$\underline{\psi}(x, y, z, t) = \psi_m e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \psi_m e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)},$$

où $\psi_m \in \mathbb{C}$ est une amplitude complexe et \vec{k} un vecteur d'onde de coordonnées (k_x, k_y, k_z) dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 . Ces ondes sont solutions de l'équation des ondes 3D pour $\omega = \|\vec{k}\| c$. On peut toujours choisir la base du repère de telle sorte que $(k, 0, 0)$ soient les nouvelles coordonnées du vecteur d'onde avec $k > 0$. On se ramène ainsi à l'expression des ondes non dispersives de la forme $\psi(x, y, z, t) = F(x - ct)$.

Définition : Ondes sphériques

En utilisant les coordonnées sphériques, on montre l'existence d'ondes progressives sphériques, solutions de l'équation des ondes 3D, sous la forme complexe :

$$\underline{\psi}(x, y, z, t) = \frac{\psi_m}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

où $\psi_m \in \mathbb{C}$ est amplitude complexe, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la coordonnée radiale, $k > 0$ un nombre d'onde et $\omega = kc$ la pulsation associée. Cette onde propage ses crêtes de façon radiale du centre vers l'infini. On obtient des ondes progressives sphériques dont les vitesses de phase convergent vers le centre en changeant ω en $-\omega$ dans l'expression complexe. L'amplitude de ces ondes décroît avec r .

🔑 *Définition : Ondes cylindriques*

Les oscillations d'un tambour ou les ondes de surface en milieu peu profond sont des exemple d'onde bidimensionnelles non dispersives de la forme $\psi(x, y, t)$. En imposant la symétrie par rotation autour de l'axe Oz , on se restreint à des solutions de la forme $\psi(r, t)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est ici la coordonnée polaire. On obtient par exemple des ondes stationnaires de la forme :

$$\psi(r, t) = \psi_m J_0(k_n r) \cos(\omega_n t + \varphi) ,$$

où $J_0(X)$ est une fonction de Bessel, k_n un nombre d'onde, $\omega_n = k_n c$ une pulsation et φ une phase. Lorsque le domaine $r \in [0, R]$ est un disque borné avec des conditions aux limites aux frontières, les nombres d'onde k_n et les pulsations associées ω_n sont quantifiées avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ces ondes sont par exemple des modes propres d'oscillation d'un tambour ou d'un bassin peu profond, restreints aux ondes invariantes par rotation.

Les ondes progressives invariantes par rotation s'écrivent, en représentation complexe, sous la forme :

$$\underline{\psi}(r, t) = \psi_m [J_0(k r) + i Y_0(k r)] e^{-i\omega t} ,$$

où Y_0 est une fonction de Bessel "de deuxième espèce" et la pulsation et le nombre d'onde sont tels que $\omega = k c$. Lorsque r est grand, ces fonctions de Bessel se rapprochent de sinusoides d'amplitudes décroissantes avec r .

Conclusion



Je remercie Bruno BETBEDER et Jacques LEQUIN pour la documentation qu'ils m'ont aimablement transmise dans le cadre de la préparation de ce cours. La plupart des notions abordées sont incluses dans le programme PC de deuxième année des Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE), et plusieurs ouvrages pédagogiques ou documents en ligne consacrés à ce programme ont été consultés. Parmi eux l'ouvrage "Physique tout en un, Programme PC*" présente l'avantage de pouvoir être consulté en ligne sur *le portail Scholarvox de l'Université de Toulouse*.

Bibliographie



O. Thual, *Des ondes et des fluides*, Cépaduès 2005 (<http://www.cepadues.com>)

M.-N. Sanz, B.Salamito, D. Chardo, *Physique tout en un*, Programme PC, Dunod, 2016 : <http://univ-toulouse.scholarvox.com/catalog/book/88836168>



Webographie



O. Thual, *Ressources pédagogiques numériques*, Page professionnelle : <http://thual.perso.enseeiht.fr/PagePro/co/rpn.html>

O. Thual, *Hydraulique à surface libre*, Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 0122 (2020) 40h

P. Falstad, *Oscillations and Waves*, <http://www.falstad.com/>

A repository of Animated GIFs by Flipping Physics! : <https://www.flippingphysics.com/gifs.html>

O. Thual, 2019, vidéo teaser du cours "Dynamique des ondes", Toulouse INP - ENSEEIHT, 2MFEE : <https://prismes.univ-toulouse.fr/player.php?code=G8Q24k08&width=100%25&height=100%25>