ÉLEMENTS DE COURS

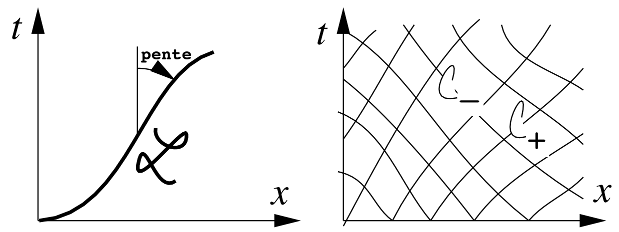
Système hyperbolique et caractéristiques

On considère un système d'équations aux dérivées partielles s'écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} A_1\, u_{,t} + B_1\, u_{,t} + C_1\, v_{,t} + D_1\, v_{,x} & = & E_1 \\ A_2\, u_{,t} + B_2\, u_{,t} + C_2\, v_{,t} + D_2\, v_{,x} & = & E_2 \end{cases} \tag{1}$$

où $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1)$ et $(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2)$ sont des fonctions de (x, t). Ce système fait apparaître les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ que l'on peut respectivement interpréter comme la dérivée le long des droites $x = cste$ ou des droites $t = cste$. On cherche à obtenir un système faisant intervenir les dérivées selon un réseau de courbes autres que le maillage cartésien du plan (x, t). Étant donnée une courbe $\mathcal{L}$ définie par la trajectoire $x(t)$, on note $\lambda(x, t)$ l'inverse de sa pente en x dans le plan (x, t) et l'on écrit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}} =: \dot{x}(t) = \lambda[x(t), t]\ . \tag{2}$$



La dérivée du champ $a(x, t)$ le long de la courbe $\mathcal{L}$ est alors définie par la relation

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{\partial a}{\partial t} + \lambda(x, t)\, \frac{\partial a}{\partial x} = a_{,t} + \lambda\, a_{,x}\ . \tag{3}$$

Pour transformer le système (1) en un système faisant intervenir des dérivées selons des courbes autres que les axes, on écrit le système des quatre relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,t} \\ u_{,x} \\ v_{,t} \\ v_{,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{L}} \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{L}} \end{pmatrix}\ . \tag{4}$$

Les deux premières équations ne sont celle du système (1) et les deux dernières ne font que reprendre la définition de la dérivée le long d'une courbe $\mathcal{L}$ appliquée à u puis à v.

Pour un couple (x,t) donné, on cherche alors la ou les valeurs de λ pour lesquelles la matrice 4×4 de ce système n'est pas inversible. Il suffit d'annuler son déterminant qui est un polynôme de degré 2 en λ. On note $\lambda_+(x,t)$ et $\lambda_-(x,t)$ les deux racines réelles lorsqu'elles existent. On dit que le système (1) est "hyperbolique" dans le domaine du plan (x,t) pour lequel il existe deux racines réelles (parabolique pour une racine double et elliptique sinon). Dans ce domaine, on peut définir deux familles de courbes notées $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$, appelées "courbes caractéristiques", et définies par leurs trajectoires respectives

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} = \lambda_+(x,t) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} = \lambda_-(x,t)\ . \tag{5}$$

Relations de compatibilités et invariants de Riemann

S'il existe une solution $[u(x,t), v(x,t)]$ au système (1) dans le domaine où il est hyperbolique, le système (4) obtenu en choisissant $\mathcal{L} = \mathcal{C}_+$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{C}_-$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda_+(x,t)$ ou $\lambda = \lambda_-(x,t)$, doit obligatoirement avoir des solutions. Son second membre appartient donc à l'espace vectoriel engendré par les quatre colonnes de la matrice 4×4. Si les trois dernières colonnes engendrent cet espace, cette appartenance s'écrit en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} E_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ E_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & \lambda & 0 & 0 \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0\ , \tag{6}$$

où $\mathcal{C}$ désigne une courbe $\mathcal{C}_+$ ou $\mathcal{C}_-$. On peut choisir de substituer n'importe quelle autre colonne par le second membre, sauf dans le cas particulier où deux colonnes sont proportionnelles. Le cas où la matrice 4×4 n'est pas de rang 3 n'est pas considéré ici. Les deux relations de compatibilité ainsi obtenues pour les deux familles de courbes caractéristique sont des relations de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{U}_+(x,t)\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} + \mathcal{V}_+(x,t)\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} & = & \mathcal{W}_+(x,t) \\ \mathcal{U}_-(x,t)\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} + \mathcal{V}_-(x,t)\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} & = & \mathcal{W}_-(x,t) \end{cases}\ , \tag{7}$$

où $\mathcal{U}_\pm(x,t)$, $\mathcal{V}_\pm(x,t)$ et $\mathcal{W}_\pm(x,t)$ sont des fonctions de (x,t) s'exprimant à partir des coefficients du système (1) ainsi que des solutions $u(x,t)$ et $v(x,t)$. Ce nouveau système, faisant intervenir uniquement des dérivées le long des deux familles de courbes caractéristiques, est équivalent au système initial (1). Par simplicité, on peut le noter

$$\mathcal{U}_\pm \ (du)_{\mathcal{C}_\pm} + \mathcal{V}_\pm \ (dv)_{\mathcal{C}_\pm} = \mathcal{W}_\pm \ dt \ .$$

Contrairement au système initial, qui mélangeait les dérivées le long des deux familles de droites parallèles aux axes du plan (x, t), le nouveau système découple les dérivations selon les deux familles de courbes transverses que forment les caractéristiques. Ce découplage permet de construire des algorithmes de résolution numérique plus précis, et, dans certains cas favorables, de trouver des solutions analytiques. C'est le cas lorsque l'on peut intégrer le système (7) pour le mettre sous la forme $(dJ_\pm)_{\mathcal{C}_\pm} = 0$ où $J_+(u, v)$ et $J_-(u, v)$ sont des fonctions de (u, v) appelées "invariants de Riemann". Ces fonctions sont en effet respectivement constantes sur les courbes carcactéristiques $\mathcal{C}_+$ ou $\mathcal{C}_-$.