ENSEEIHT – Année 2017–2018
Hydraulique à surface libre – TD numérique
V. Dupuis, O. Thual

TDN 4 : Ondes dans un port

On modélise un port de forme allongée de longueur $L = 200\,\mathrm{m}$ et ouvert sur la mer à l'une de ses extrémités. La hauteur d'eau à l'équilibre est $h_{ref} = 15\,\mathrm{m}$. L'action du vent peut créer localement des perturbations de la surface libre, induisant des écoulements dans le port. Ces écoulements, supposés unidimensionnels suivant la direction x qui longe le bassin, peuvent être modélisés par les équations de Saint-Venant suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + U\dfrac{\partial h}{\partial x} = -h\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} = -g\dfrac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

où h est la hauteur d'eau et U la vitesse. On a négligé ici le terme de frottement au fond du fait des faibles vitesses en jeu.

A) Propagation d'un bourrelet d'eau

On suppose qu'à l'instant initial un bourrelet d'eau s'est formé au milieu du port, la distribution de hauteur d'eau étant alors donnée par :

$$h_0(x) = h_{ref} + h_a \exp\left(\frac{-(x - x_a)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2}$$

où $h_a = 50\,\mathrm{cm}$ est la hauteur et $\sigma = 5\,\mathrm{m}$ la largeur typique du bourrelet et $x_a = 100\,\mathrm{m}$.

La distribution de vitesse est supposée nulle à l'instant initial.

En régime fluvial, le problème associé aux équations de Saint-Venant est bien posé si on impose une condition limite en amont du domaine $f_{up}(h, U) = 0$ et une condition limite en aval $f_{dw}(h, U) = 0$ et si les fonctions f_{up} et f_{dw} sont indépendantes pour le couple (h, U). Dans le problème envisagé, on impose une vitesse nulle à l'extrémité fermée du port. On suppose ensuite que la mer est suffisamment profonde à la sortie du port pour forcer la hauteur d'eau à rester constante à l'embouchure. Les conditions aux limites sont donc :

$$\begin{cases} h(t, x = 0\,\mathrm{m}) = h_{ref} \\ U(t, x = 200\,\mathrm{m}) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Implémentez le système d'équations (1) et les conditions initiales et aux limites associées dans un script Matlab.
2. Calculez le temps que met la perturbation pour arriver aux bords du bassin. Comparez la vitesse de propagation avec la vitesse de propagation de perturbations infinitésimales.
3. Choisissez à présent un bourrelet de même hauteur mais de largeur typique $\sigma = 1\,\mathrm{m}$ et observez le comportement de la solution numérique.

4. *(Facultatif)* On suppose maintenant que l'onde qui arrive à l'embouchure est entièrement dissipée dans la mer et donc que la réflexion est nulle. Il a été vu dans le cours qu'on peut transformer le système (1) en deux équations d'advection pour les variables J_1 et J_2. Dans le cas fluvial, la variable J_1 est propagée vers l'aval et la variable J_2 vers l'amont. L'information qui rentre dans le système à l'amont (ici l'embouchure du port) est donc déterminée par la condition aux limites sur J_1 (qui est nécessairement en $x = 0$). Pour modéliser le fait qu'aucune information ne revient de la mer, il suffit donc d'imposer J_1 constant à l'embouchure. Montrez alors que la condition aux limites à l'amont sur la hauteur d'eau devient :

$$h(t, x = 0) = \frac{\left(2\sqrt{gh_{ref}} - U(t, x = 0)\right)^2}{4g} \tag{4}$$

et résolvez ce nouveau problème avec Matlab.

B) Seiche

Un phénomène récurrent qui apparaît dans les lacs et les ports est celui d'oscillations périodiques de la surface libre sous la forme d'ondes stationnaires. Ce phénomène, appelé seiche, peut conduire à des dégâts importants pour les bateaux amarrés.

Pour reproduire ce phénomène on choisit les conditions aux limites (3) et on impose comme condition initiale sur la hauteur d'eau un profil sinusoïdal dont le quart de la longueur d'onde est un diviseur de la longueur du bassin tout en respectant les conditions aux limites :

$$h_0(x) = h_{ref} + h_b \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \tag{5}$$

où $h_b = 50\,\text{cm}$, $x_b = 100\,\text{m}$ et $\lambda/4 = L/5$. La condition initiale sur la vitesse sera prise nulle.

5. Tracez l'évolution de la hauteur d'eau dans le port avec Matlab. Déterminez le nombre et la position des nœuds et des ventres et la période d'oscillation.
6. Tracez l'évolution des vitesses d'écoulement dans le port et estimez la vitesse maximale.
7. Où vaut-il mieux ancrer son bateau pour qu'il risque le moins de s'endommager ?