ENSEEIHT – Année 2017–2018
Hydraulique à surface libre – TD numérique
V. Dupuis, O. Thual

TDN 3 : Propagation d'une crue

On étudie une portion de rivière de 200 km de long, de pente $I = 0.2\,\%$ et de hauteur uniforme $h_m = 1\,\mathrm{m}$. Le lit de la rivière est caractérisé par un coefficient de Strickler de $K_s = 35\,\mathrm{m}^{1/3}.\mathrm{s}^{-1}$. On note x l'axe parallèle au lit de la rivière. On suppose que la hauteur d'eau $h(t,x)$ évolue selon l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + f(t,x,h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

où f est une fonction qui dépend des hypothèses faites pour aborder le problème.

A) Modèle linéarisé

Dans le cas de faibles perturbations, l'équation (1) est linéaire avec $f(t,x,h) = (5/3)U_m$, où U_m est la vitesse débitante à l'équilibre. On note $a = (5/3)U_m$.

Soit une distribution de hauteur d'eau à l'instant initiale donnée par :

$$h(0,x) = h_0(x) = h_m + h_a \exp\left(-\frac{(x-x_a)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2}$$

où $h_a = 0.1\,\mathrm{m}$ est l'amplitude de la perturbation, $x_a = 20\,\mathrm{km}$ et $\sigma = 4\,\mathrm{km}$. On suppose qu'aucune perturbation n'arrive de l'amont : $h(t,0) = h_m$.

1. Déterminez la vitesse U_m à l'aide de l'équation de Manning-Strickler.
2. Donnez la solution analytique exacte de l'équation (1) linéaire.
3. Calculez numériquement sur Matlab l'évolution de la hauteur d'eau en adoptant un schéma FTBS (*foward-time-backward-space*) :

$$\frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} + a\frac{h_j^i - h_{j-1}^i}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

   où h_j^i est la valeur numérique de la hauteur d'eau au point (t_i, x_j) du maillage et où Δt et Δx sont les pas de temps et pas d'espace du maillage. Observez la solution obtenue pour différents temps de propagation. Que constatez-vous ?
4. A l'aide d'un développement de Taylor, montrez que la solution de l'équation algébrique (3) est en fait solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + a\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2}(1-\sigma_{CFL})\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \tag{4}$$

   avec $\sigma_{CFL} = a\Delta t/\Delta x$.
5. Quelle est la condition sur σ_{CFL} pour que le schéma numérique soit stable ?
6. Adoptez à présent un schéma CTCS (*centered-time-centered-space*). Observez à nouveau la solution numérique pour différents temps de propagation.
7. *(Facultatif)* Déterminez l'équation différentielle modifiée correspondant au schéma CTCS.

B) Modèle non-linéaire

On considère à présent une modélisation non-linéaire en prenant $f(t,x,h) = (5/3)K_s I^{1/2} h^{2/3}$. On va utiliser ici la méthode des caractéristiques. Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée du plan (t,x), paramétrée par s et d'équation $(t = t_p(s), x = x_p(s))$ avec $t_p(s) = s$,

$$\frac{dx_p}{ds} = f(s, x_p(s), h) \tag{5}$$

et la condition initiale $x_p(0) = \overline{x}$.

8. Montrez que si $h(t,x)$ est solution de l'équation différentielle (1), alors le long de la courbe $\mathscr{C}$ on a

$$\left.\frac{dh}{ds}\right|_{\mathscr{C}} = 0. \tag{6}$$

On rappelle que la dérivée d'une fonction $A(t,x)$ le long d'une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ du plan (t,x) d'équation $(t_p(s), x_p(s))$ est donnée par la formule :

$$\left.\frac{dA}{ds}\right|_{\mathscr{C}} = \frac{\partial A}{\partial t}\frac{dt_p}{ds} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx_p}{ds}. \tag{7}$$

9. D'après l'équation (6) la hauteur d'eau h ne dépend pas du paramètre s le long d'une caractéristique $\mathscr{C}$. Intégrez alors l'équation (5) pour trouver l'équation d'une caractéristique :

$$x_p(t) = \overline{x} + f_0(\overline{x})t \tag{8}$$

où $f_0(x) = (5/3)K_s I^{1/2} h_0(x)^{2/3}$ avec $h_0(x) = h(0,x)$.

10. Tracez avec Matlab le champ des caractéristiques correspondant au profil initial de hauteur d'eau :

$$h_0(x) = h_m + \frac{h_a}{2}\left(1 + \tanh\left(-\frac{x - x_a}{\sigma}\right)\right) \tag{9}$$

avec $h_a = 1\,\mathrm{m}$, $x_a = 50\,\mathrm{km}$ et $\sigma = 20\,\mathrm{km}$.

11. Soient deux caractéristiques d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{p,1}(t) & = & \overline{x_1} + f_0(\overline{x_1})t \\ x_{p,2}(t) & = & \overline{x_2} + f_0(\overline{x_2})t \end{array}\right. \tag{10}$$

A quelle condition ces caractéristiques se croisent-elles ? Dans ce cas à quel moment se produit le croisement ?

12. Déduisez-en que le premier croisement a lieu au temps $t_c = -1/\min_x f_0'(x)$. Calculez t_c et vérifiez sa valeur sur le champ des caractéristiques.

13. Tracez avec Matlab la solution pour un temps $t < t_c$. Comment se déforme la perturbation en se propageant ?

14. Appliquez à nouveau la méthode des caractéristiques en prenant cette fois-ci comme profil initial de hauteur d'eau :

$$h_0(x) = h_m + \frac{h_a}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{x - x_a}{\sigma}\right)\right). \tag{11}$$