ENSEEIHT – Année 2017–2018
Hydraulique à surface libre – TD numérique
V. Dupuis, O. Thual

TDN 1 : Écoulement sur un obstacle

On considère un écoulement de hauteur critique $h_c = 5\,\text{cm}$ dans un canal sans pente au fond duquel se trouve un obstacle. On note x la coordonnée selon l'axe parallèle au canal. La hauteur d'eau h est régie par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I(x)}{1 - (h_c/h)^3} \tag{1}$$

où I est la pente locale du fond. Prenons un obstacle de forme gaussienne centré en $x = 0$. La bathymétrie du canal est alors donnée par :

$$Z_f(x) = a \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2}$$

où $a = 3\,\text{cm}$ est la hauteur de l'obstacle et $\sigma = 20\,\text{cm}$ est sa largeur typique.

A) Intégration numérique par différences finies

1. Calculez le débit linéique de cet écoulement.
2. Calculez la pente locale $I(x) = -dZ_f/dx$ et tracez $Z_f(x)$ avec Matlab.
3. Écrivez un programme Matlab pour résoudre l'équation (1) avec la condition initiale $h(x = -1\,\text{m}) = h_0$ en prenant $h_0 = 12\,\text{cm}$ puis $2\,\text{cm}$. Vous utiliserez une méthode par différence finie en calculant la dérivée à l'aide d'un schéma numérique d'Euler. Que se passe-t-il pour $h_0 = 8\,\text{cm}$?
4. Déterminez la plage de variation de h_0 pour laquelle on obtient une solution correcte.
5. Utilisez ensuite la fonction Matlab `ode45` pour résoudre cette même équation.

B) Solution analytique

Comme vu dans le cours, on peut intégrer directement l'équation (1) et en déduire une solution analytique.

6. En utilisant la relation $I(x) = -dZ_f/dx$, intégrez l'équation (1) et montrez que la solution h est aussi solution du polynôme du troisième degré :

$$h^3 + h^2(Z_f(x) - K_0) + \frac{h_c^3}{2} = 0 \tag{3}$$

   où K_0 est une constante à exprimer en fonction de la condition initiale.
7. Pour une condition initiale donnée, résolvez l'équation polynomiale (3) avec Matlab. Quelles racines ont un sens physique ?
8. Tracez sur un même graphe les solutions numériques de l'équation différentielle et la solution analytique et observer les différences.

9. Résolvez à nouveau l'équation à l'aide des trois méthodes (Euler, `ode45` et polynôme) en prenant cette fois-ci un obstacle de forme triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Z_f(x) & = & \frac{a}{b}x + a \quad \text{si } -b < x < 0 \\ & = & -\frac{a}{b}x + a \quad \text{si } 0 \leqslant x < b \\ & = & 0 \quad \text{sinon} \end{array}\right. \tag{4}$$

où $a = 3\,\text{cm}$ est la hauteur du triangle et $b = 20\,\text{cm}$ est sa demi-largeur. Observez la solution pour $h_0 = 10\,\text{cm}$. Vous parait-elle physiquement possible ?

C) Courbe paramétrée dans le plan (x, h)

Afin de contourner la singularité $Fr = (h/h_c)^{3/2} = 1$ de l'équation (1), on peut réécrire cette équation en introduisant la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ du plan (x, h) d'équation $(x_p(s), h_p(s))$.

10. Montrez que si les fonctions x_p et h_p sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx_p}{ds} & = & 1 - \left(\frac{h_c}{h_p}\right)^3 \\ \frac{dh_p}{ds} & = & I(x_p) \end{array}\right. \tag{5}$$

alors la courbe $\mathscr{C}$ est solution de l'équation (1).

Aide : calculez la dérivée dh/dx le long de la courbe $\mathscr{C}$.

11. Résolvez le système (5) avec Matlab en utilisant la fonction `ode45`. Constatez-vous encore des instabilités numériques ?