Projet expérimental d'Hydraulique à Surface Libre

Hydraulique à Surface Libre

Professeur :
Olivier Thual

Table des matières

Introduction **2**

1 Ligne d'eau **3**

1.1 Tracé des lignes d'eau en fonction de la pente . . . 3

1.2 Analyse des courbes de remous . . . 6

1.3 Pertes de charge dans le ressaut hydraulique . . . 8

2 Détermination de la position du ressaut **9**

2.1 Méthodologie . . . 9

2.2 Code pour la détermination . . . 9

2.3 Analyse des résultats . . . 10

3 Vitesse de propagation **14**

3.1 Propagation du ressaut . . . 14

3.2 Propagation de l'information . . . 15

Conclusion **17**

Bibliographie **18**

Code **19**

Introduction

Dans le cadre de ce projet expérimental d'hydraulique à surface libre, nous nous sommes intéressés au phénomène du ressaut hydraulique. Celui-ci est généré dans les salles de TP à l'aide d'une vanne descendante ou bien d'un seuil en amont et d'une vanne ascendante à l'aval. Le premier élément permet d'obtenir un écoulement torrentiel en amont et le second élément permet de créer un écoulement fluvial à l'aval. A l'interface entre ces deux écoulements va se créer un ressaut.
Nous allons ici tenter de mettre en évidence un certain nombre de paramètres du ressaut hydraulique et de faire le lien avec la théorie. Premièrement nous allons vous présenter les mesures de lignes d'eau en fonction de divers paramètres, notamment l'influence de la pente, ainsi que les analyses qui en découlent. Ensuite, nous avons travaillé à la détermination de la position du ressaut. Enfin, le dernier point étudié est la propagation du ressaut et de l'information lors d'une montée de vanne.

1 Ligne d'eau

1.1 Tracé des lignes d'eau en fonction de la pente

Nous réalisons une série d'expériences qui nous permettra de vérifier les équations de hauteur critique (1), de Bélanger (2) ainsi que la fonction d'impulsion (3).

$$h_c = (\frac{q^2}{g})^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

$$h_{R,\text{théorique}} = h_L \frac{-1+\sqrt{1+8Fr^2}}{2} \tag{2}$$

$$I(q,h) = \frac{g}{h}(h_c^3 + \frac{h^3}{2}) \tag{3}$$

Expériences

Les expériences sont toutes réalisées avec un débit constant Q= 0.0106 m^3s^{-1} avec un seuil présent à 2m30 de notre origine et d'une hauteur de 0,25 m . Pour trois pentes différentes, nous obtenons les courbes suivantes :

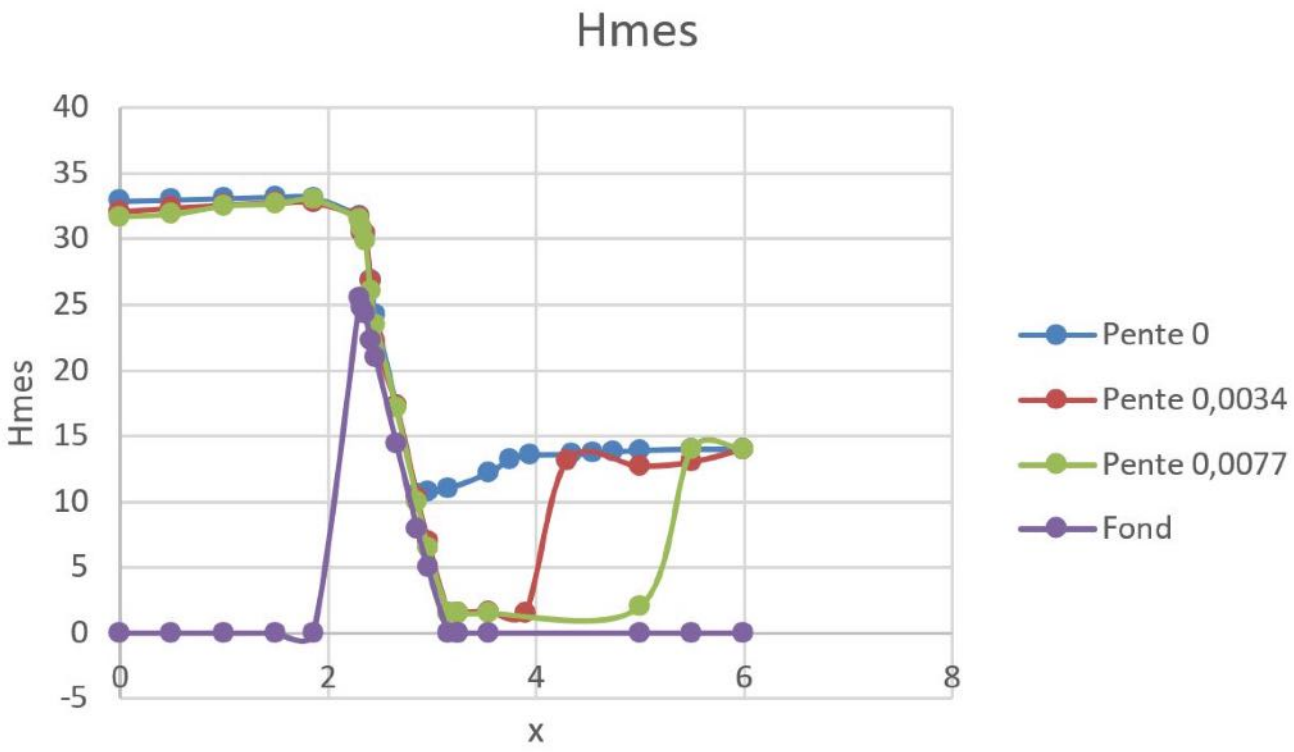

Figure 1 – Ligne d'eau en fonction de x pour plusieurs pentes

La figure 1 représente la hauteur de la ligne d'eau. On constate qu'avant le seuil, l'écoulement est fluvial puis passe à un écoulement torrentiel à partir du sommet du seuil. La vanne à l'aval du canal est levée, d'où l'apparition d'un ressaut en aval du seuil. Enfin, le régime redevient fluvial à l'aval du ressaut. On constate par ailleurs que la position du ressaut change en fonction de la pente. Cet aspect sera vu, plus en détail, dans la partie 2.

Hauteur critique

Nous souhaitons vérifier expérimentalement la relation liant la hauteur critique au débit, à savoir :

$$h_c = (\frac{q^2}{g})^{\frac{1}{3}} \tag{4}$$

Dans le cadre de nos expériences, nous nous sommes placés à un débit $Q = 0.0106m^3/s$.

$$\Rightarrow q = \frac{Q}{L} = \frac{0.0106}{0.25} = 0.0424m^2/s$$

$$\Rightarrow h_c = (\frac{0.0424^2}{9.81})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{c,theorique} = 0.0568m = 5.68cm}$$

Du coté expérimental, nous obtenons la hauteur h, représentant la différence entre la hauteur de la ligne d'eau et le fond, pour différentes valeurs de pente :

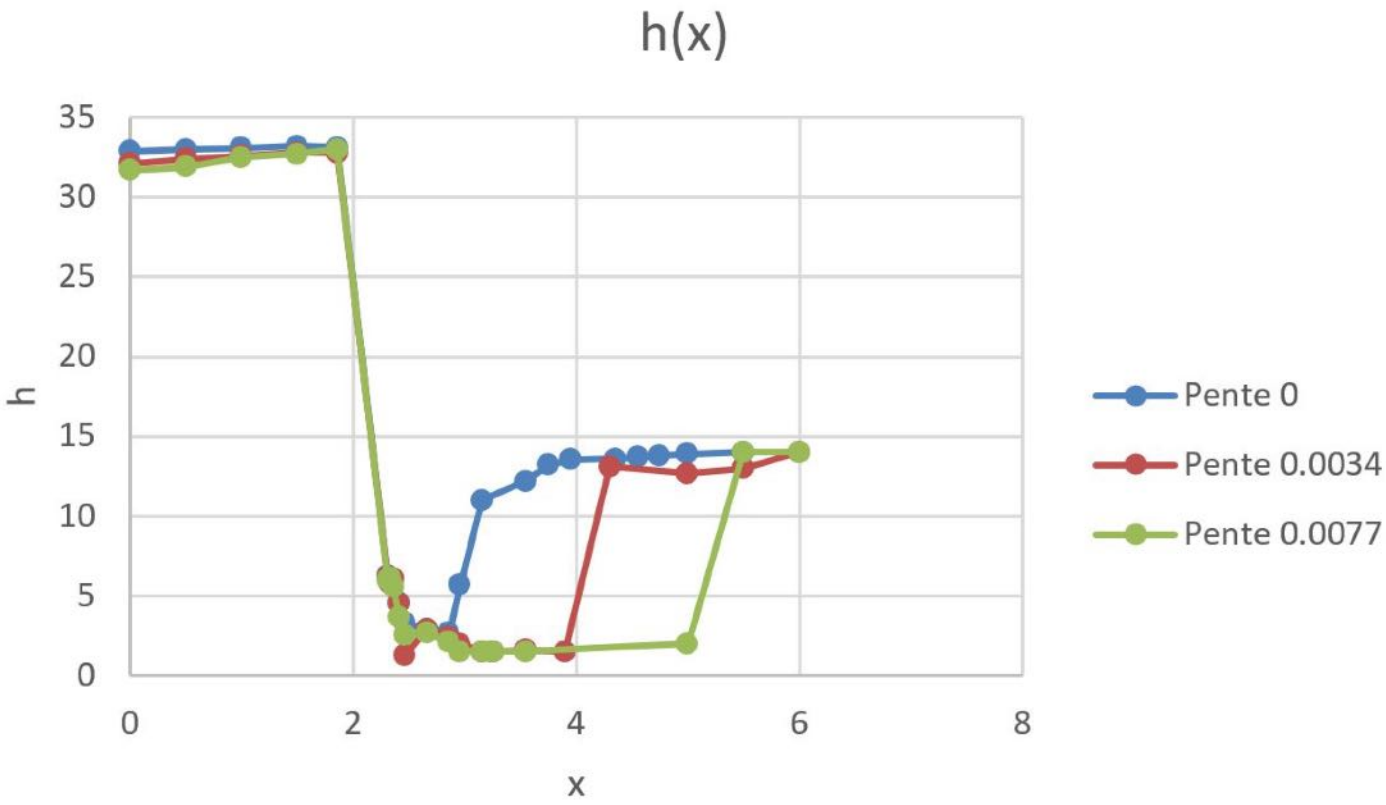

FIGURE 2 – Hauteur h en fonction de x pour plusieurs pentes

Nous pouvons constater avec la figure 2 que, pour n'importe quelle pente, l'écoulement passe de l'état sous-critique (fluvial) à l'état sur-critique (torrentiel) au niveau du seuil. Dans ce cas de figure, ce passage se fait au niveau du sommet du seuil. Nous pouvons ainsi identifier la valeur expérimentale de h_c.

$$\Rightarrow \boxed{h_{c,exprimental} = 6,1cm}$$

On constate donc que ces valeurs présentent une erreur très faible, d'environ 7%, ce qui nous permet bien de vérifier la formule théorique.

Équation de Bélanger

Nous nous intéressons à présent à l'équation de Bélanger afin de déterminer $h_{R,thorique}$

$$h_{R,theorique} = h_L \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr^2}}{2} \tag{5}$$

Or, pour une pente de 0.0077, nous avions un Froude de :

$$Fr_L = \frac{Q^2}{L^2 h_L^2 \sqrt{g h_L}} = \frac{0.0106^2}{0.25^2 \times 0.015^2 \sqrt{9.81 \times 0.015}} = 7.37$$

On peut donc calculer notre hauteur d'eau théorique à droite du ressaut d'après la formule de Bélanger :

$$h_{R,thorique} = 0.015\frac{-1+\sqrt{1+8*7.37^2}}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow h_{R,theorique} = 0.149m = 14.9cm}$$

Or, d'après la ligne d'eau que nous avons tracé nous observons expérimentalement que $\boxed{h_R = 14cm}$. **Nous vérifions donc l'équation de Bélanger**, l'erreur étant de seulement 6%.

Fonction d'impulsion

Nous pouvons à présent vérifier que l'impulsion est conservée en aval et en amont du ressaut. La fonction d'impulsion est donnée par la formule :

$$I(q,h) = \frac{g}{h}(h_c^3 + \frac{h^3}{2}) \tag{6}$$

Le calcul en amont du ressaut donne : I(q,h) = 0,113611101 m^2s^{-2}.
Le calcul en aval du ressaut donne : I(q,h) = 0,10897862 m^2s^{-2}.

Nous constatons que les deux impulsions sont très proches ! Nous pouvons considérer que **l'impulsion se conserve de part et d'autre du ressaut**.

1.2 Analyse des courbes de remous

Ces tracés de lignes d'eau nous donnent les informations nécessaires afin de déterminer dans quel type de courbe de remous on se situe à un endroit du canal donné et pour une configuration donnée. Dans nos expérience, nous avons testé 3 pentes différentes : 0 ; 0.0034 ; 0.0077

Nous souhaitons dans un premier temps savoir la pente qui délimite une pente forte d'une pente faible. Pour cela, nous traçons l'évolution de h_c et de h_n en fonction de la pente sur la figure (3). L'intersection de ces 2 pentes sera la pente limite.

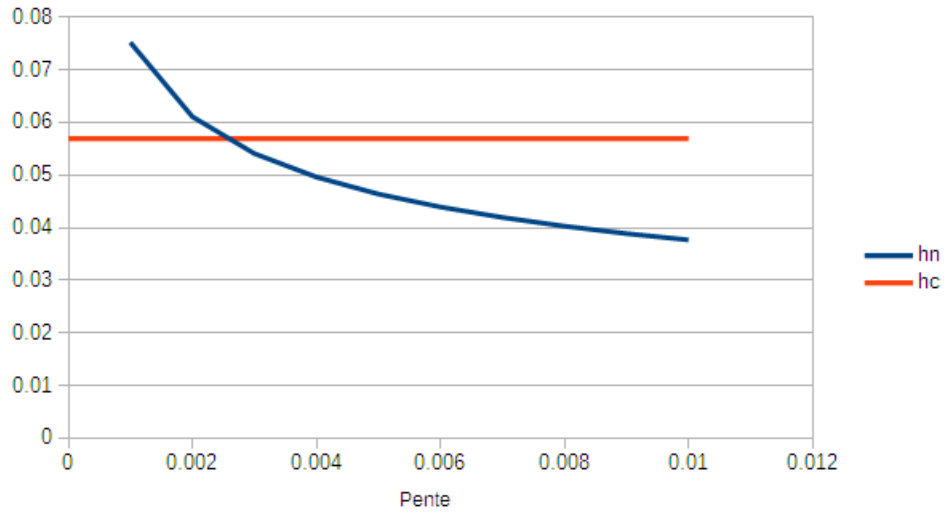

FIGURE 3 – Evolution de hn et hc en fonction de la pente.

La pente limite étant autour de 0.0025, nos pentes de 0.0034 et 0.0077 sont par conséquent des **pentes fortes**. Nous pouvons donc en déduire qu'avant le seuil nous sommes dans le cas d'une S1. En effet, l'écoulement à cet endroit est fluvial, la pente est forte et on constate que la hauteur d'eau augmente légèrement comme le montre notre relevé de ligne d'eau. Après le passage du seuil, la pente est encore forte (la même qu'avant le seuil), l'écoulement est torrentiel et la hauteur d'eau augmente légèrement. Cela signifie que cette partie de l'écoulement est de type **S3**. Après le ressaut hydraulique, l'écoulement redevient fluvial, la pente est toujours forte et la hauteur d'eau augmente légèrement. Cela signifie que cette partie de l'écoulement est de type **S1**.

Donc, dans nos cas de figure où la pente est forte (0.0034 et 0.0077), **le ressaut permet le passage d'une S1 à une S3**.

1.3 Pertes de charge dans le ressaut hydraulique

Nous souhaitons, dans cette partie, caractériser les pertes de charge dans le ressaut. Pour cela, nous nous intéressons à l'énergie spécifique en différentes positions et allons de nouveau vérifier la correspondance des mesures effectuées avec la théorie. La formule donnant la variation d'énergie spécifique dans le ressaut est la suivante :

$$\Delta E = \frac{(h_R - h_L)^3}{4h_L h_R} \tag{7}$$

Cela correspond à la perte de charge en mètres que provoque le ressaut. D'après cette formule, elle serait donc de :

$$\Delta E = \frac{(0.14 - 0.015)^3}{4 \times 0.015 \times 0.14}$$

$$\Rightarrow \Delta E = 0.233m = 23.3cm$$

Or, expérimentalement grâce à des tubes de Pitot en appliquant la formule de l'énergie spécifique $E = h + \frac{V^2}{2g}$, nous obtenons :

$$E_L = 42.2cm \;\; et \;\; E_R = 14.5cm$$

$$\Delta E_{exp} = 27.7cm$$

On constate donc que la perte de charge expérimentale est supérieure à la perte de charge théorique. Cela peut signifier que la formule théorique est obtenue en négligeant des effets, tels que certains frottements ou recirculations, qui ne sont ,dans notre cas, pas négligeables.

2 Détermination de la position du ressaut

2.1 Méthodologie

La méthodologie pour déterminer théoriquement la position d'un ressaut est la suivante :

- Déterminer les grandeurs suivantes : Q le débit, h_2 la hauteur d'eau imposée par la vanne aval, h_{0_1} la hauteur d'eau à l'aval direct du seuil, I la pente du canal.
- Déterminer si la pente est forte ou faible.
- Tracer la courbe de remous correspondant à la ligne d'eau amont du ressaut (M3 ou S3 selon la pente) ainsi que les hauteurs d'eau conjuguées.
- A partir de la lecture de la hauteur conjuguée à h_2, on en déduit la distance entre le point de mesure de h_{0_1} et le ressaut, x_r

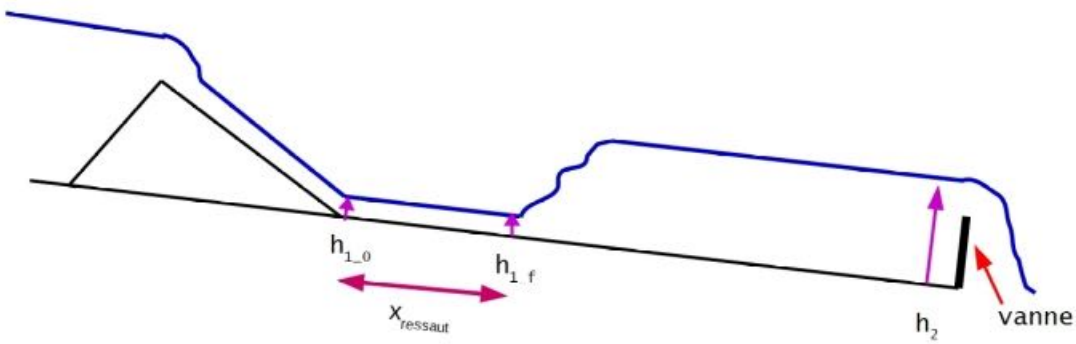

FIGURE 4 – Schéma de l'expérience

2.2 Code pour la détermination

Pour l'estimation en négligeant la pente :
La courbe M3 est déterminée analytiquement grâce à l'équation du Devoir Maison question 20 :

$$X = \frac{3}{4}H^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{13}H^{\frac{13}{3}} \tag{8}$$

Avec $H = \frac{h}{h_c}$ et $X = xA$ et $A = q^2Ks^{-2}h^{-\frac{13}{3}}$.
H étant adimensionnalisé, on prendra $H \in [0, 3]$ pour déterminer la position x adéquate.

Pour l'estimation avec pente : Les courbes M3 et S3 ne peuvent être déterminées analytiquement. On procède dont à une résolution numérique à partir de l'équation 4.37 du livre "Hydrodynamique de l'environnement" :

$$\frac{dh}{dx} = I(\frac{1 - \frac{h}{hn}^{-\frac{10}{3}}}{1 - \frac{h}{hc}^{-3}}) \tag{9}$$

Discrétisée comme suit :

$$h_{i+1} = h_i + I\Delta x(\frac{1 - \frac{h_i}{hn}^{-\frac{10}{3}}}{1 - \frac{h_i}{hc}^{-3}}) \tag{10}$$

Pour trouver les hauteurs d'eau conjuguées aux courbes M3 et S3, nous calculons l'impulsion associée à chaque hauteur d'eau de ces courbes puis nous inversons la relation $Impulsion = \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}$ à l'aide de la méthode de résolution des équations du troisième degrés de Cardan amélioré :

$$h_{conjugue} = 2\sqrt{\frac{2I}{3g}}\cos\left(\frac{acos\left(\frac{-q^2}{g\sqrt{\frac{2I}{g}}}^{\frac{3}{27}}\right) + 6\pi}{3}\right) \tag{11}$$

2.3 Analyse des résultats

Par la suite, nous avons fait varier la pente du canal en maintenant un débit et une hauteur de vanne constants : $Q = 10.6L.s^{-1}$.

Pour savoir si nous nous situons en pente forte ou faible, nous avons calculé la pente critique telle que $h_c = h_n$.

$$\boxed{I_c = \frac{q^2}{Ks^2}\frac{g}{q^2}\frac{10}{9} = 0.0025}$$

En pente faible, le ressaut hydraulique se forme par la jonction d'une courbe de remous M3 et d'une M2 ou d'une M1.
En pente forte, le ressaut hydraulique se forme par la jonction d'une courbe de remous S3 et d'une S2 ou d'une S1.

Dans le cadre d'une pente faible, on peut négliger la pente dans la détermination de la position d'un ressaut.
En effet, le code permet de déterminer que pour une pente critique de **I = 0.0025** :
- en négligeant la pente, le ressaut devrait se trouver à $x_r = 0.39$ m.
- sans négliger la pente, le ressaut devrait se trouver à $x_r = 0.44$ m.

La différence de position est de 5cm, soit 13% d'écart. Compte-tenu de la précision de mesure de la position du ressaut, dû à son étalement longitudinal, nous pouvons en conclure que l'influence de la pente est effectivement négligeable.

Compte-tenu de la longueur du canal (6m) et de nos outils de mesure de pente et de hauteur d'eau (une règle), nous savons que nos mesures souffriront d'une incertitude non négligeable.
Nos trois expériences possédaient donc une pente de respectivement environ 0, 0.0034 et 0.0077.

Expérience sans pente : Dans un premier temps, nous avons déterminé la position du ressaut dans le cas où la pente était nulle. Nous avons donc pu tracer la courbe M3 représentant la hauteur d'eau en mètre en fonction de la position x lorsque la hauteur d'eau est plus faible de hc.

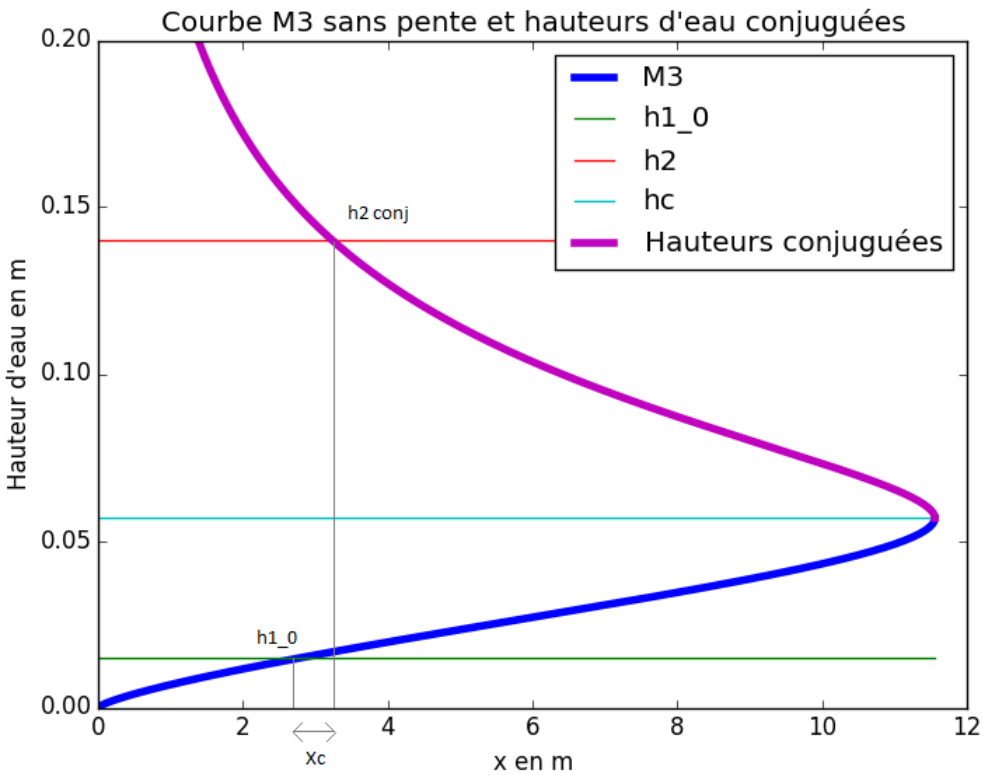

FIGURE 5 – Courbe M3 sans pente et hauteurs d'eau conjuguées

A partir de celle-ci, nous avons pu déterminer la hauteur critique conjuguée afin de trouver x_r la position du ressaut. Nous avons trouvé une valeur théorique de :

$$x_{r_{theorique}} = 0.39m \tag{12}$$

Dans ce cas-ci, le seuil est noyé par le ressaut, de ce fait nous ne pouvons conclure.

Expérience avec pente :
Nous nous sommes ainsi demandés si la théorie permettait de se rapprocher de la position mesurée du ressaut et si le terme de pente était encore négligeable.

Pour la première expérience nous avons choisi une valeur de pente $I = 0.0034$. Nous avons donc pris en compte le terme de pente dans notre simulation numérique et nous avons pu tracer la courbe S3 représentant la hauteur d'eau en mètre en fonction de la position x, en effet ici $h_n < h_c$ nous sommes dans le cas des pentes fortes.

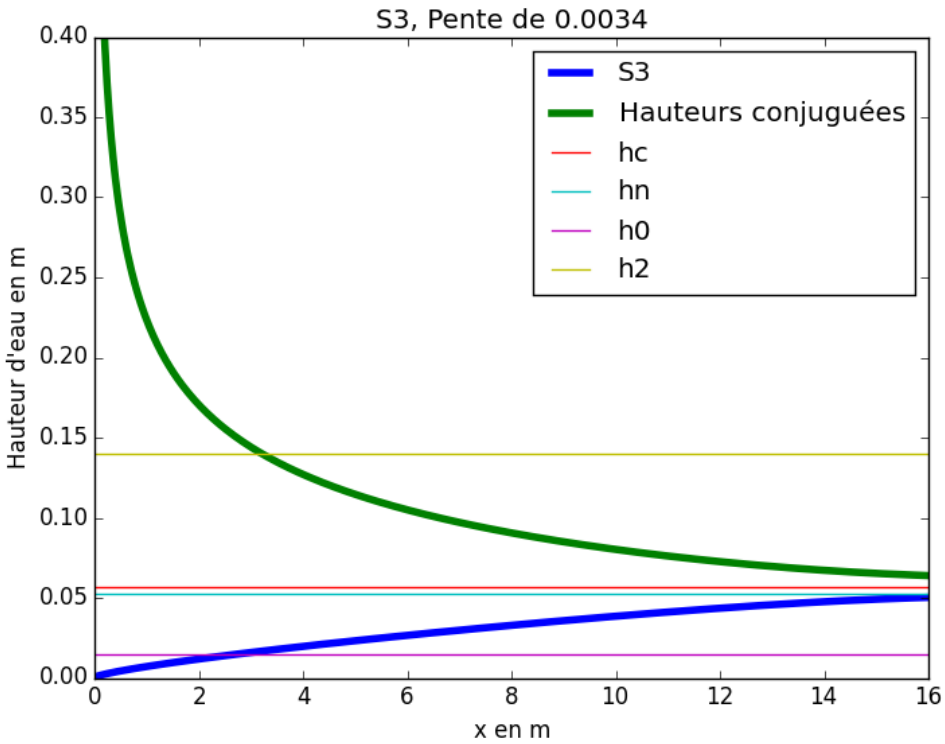

FIGURE 6 – Courbe S3 avec pente de 0.0034 et hauteurs d'eau conjuguées

On observe bien ici que h_n et h_c sont proches. On est proche de la pente critique.

Les résultats obtenus sont :

$$x_{r_{theorique}} = 0.44m \tag{13}$$

$$x_{r_{experimental}} = 0.50m \tag{14}$$

Soit une erreur relative de 14% par rapport à la valeur calculée.
Cela corrobore bien la théorie pour cette mesure, la légère différence peut s'expliquer facilement par la précision des mesures effectuées lors des séances de TP. De plus on constate que lorsque la pente augmente, le ressaut se déplace vers l'aval du canal, x_r augmente.
Cela conforte et confirme bien notre intuition initiale.

Par la suite nous avons réitéré l'expérience en augmentant la pente $I = 0.0077$ et en maintenant toujours un débit et une hauteur de vanne aval constante.

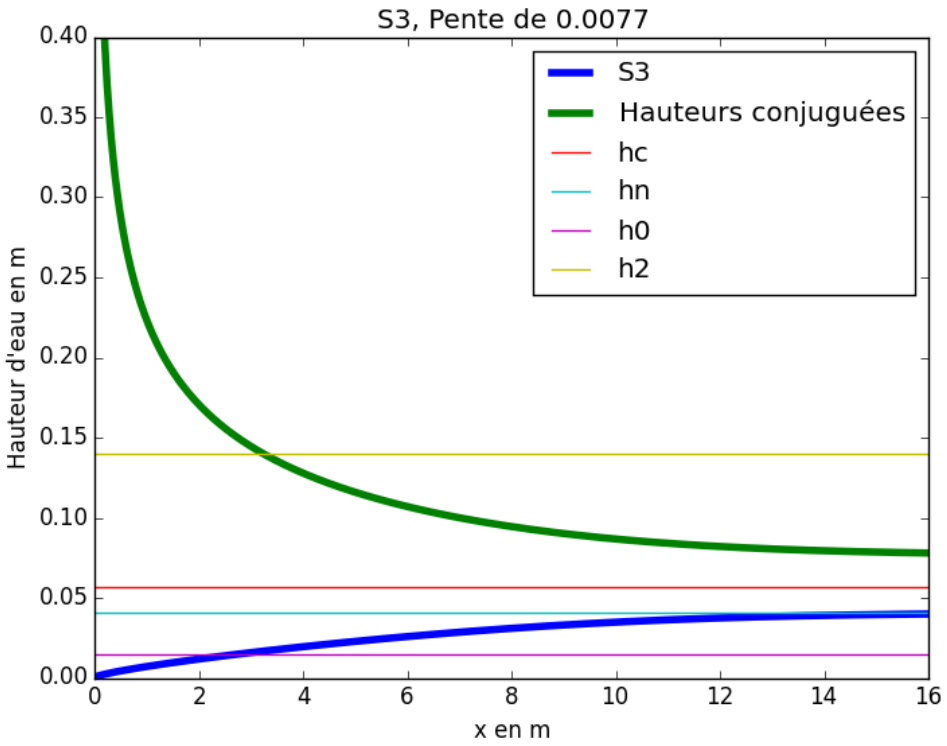

FIGURE 7 – Courbe S3 avec pente de 0.0077 et hauteurs d'eau conjuguées

Nous avons obtenu les résultats suivants :

$$x_{r_{theorique}} = 0.48m \tag{15}$$

$$x_{r_{experimental}} = 0.55m \tag{16}$$

A nouveau la position du ressaut mesurée est proche de celle calculée, pour cette mesure nous avons une erreur relative de 15% par rapport à la valeur théorique.

On peut aussi se rendre compte que les pentes ne peuvent pas être négligées car en effet, en considérant le résultat théorique de la partie sans pente et en la comparant avec les résultats mesurées, on obtient une erreur relative de 22% pour la pente la plus faible et plus de 30% pour la pente la plus forte. Nous avons un écart entre l'estimation théorique sans pente et l'expérience trop important, Nous allons privilégier une estimation théorique avec pente pour ce rapprocher des valeurs expérimentales.

3 Vitesse de propagation

3.1 Propagation du ressaut

On cherche dans cette partie à mesurer la vitesse de propagation du ressaut hydraulique dans un canal sans pente. Pour cela, la manipulation consistait à lever brusquement la vanne aval du canal et à mesurer la vitesse du ressaut (figure(9)).

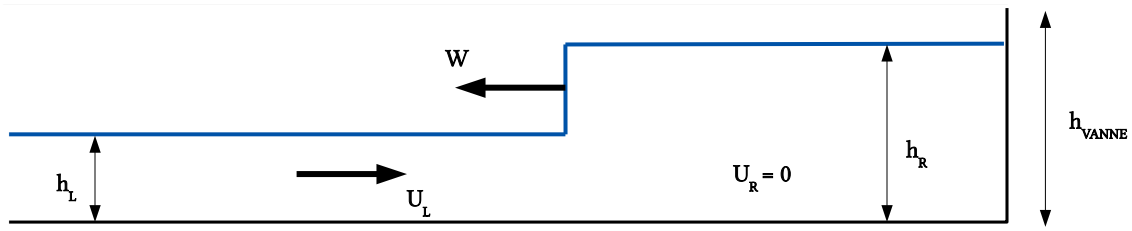

FIGURE 8 – Montage expérimental pour la mesure de la vitesse du ressaut.

On introduit les relations de saut suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_L(U_L - W) & = & h_R(U_R - W) \\ h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2} g h_L^2 & = & h_R U_R(U_R - W) + \frac{1}{2} g h_R^2 \end{array} \right. \quad (17)$$

Dans le cas de notre expérience, on connaît les valeurs de h_L, h_R, U_L et U_R :

- $U_L = \frac{Q}{S}$.
- $U_R = 0$, il n'y pas d'écoulement à droite du ressaut tant que la hauteur de vanne est supérieure à h_R.

Les relations de saut (18) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_L(U_L - W) & = & -h_R W \\ h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2} g h_L^2 & = & \frac{1}{2} g h_R^2 \end{array} \right. \quad (18)$$

Il existe donc deux solutions pour la vitesse du ressaut, $W = \pm\sqrt{g \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2}\right)}$ mais une seule est physique.
On trouve finalement,

$$\boxed{W = -\sqrt{g \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2}\right)}} \quad (19)$$

Expérimentalement, on évalue le temps que met le ressaut pour parcourir $9m$. Cette valeur est fixée afin d'avoir une distance suffisament grande pour améliorer notre précision, et suffisament faible pour ne pas avoir d'écoulement par dessus la vanne, c'est-à-dire que la vitesse $U_R = 0$.

h_L(cm)	h_R	Temps pour parcourir $8m$ (s)	$W_{experimentale}$	$W_{theorique}$
5.5	18.5	15	-0.6	-0.59

On trouve un $W_{exprimentale} \approx W_{thorique}$ et il semblerait que l'expression théorique utilisée soit valable. On notera toutefois qu'il s'agit d'un cas simplifié dans lequel la vitesse du ressaut W est constante car $U_R = 0$. A partir du moment où l'écoulement reprend au dessus de la vanne ($U_R \neq 0$), le ressaut ralentit jusqu'à se stabiliser à une position

étudiée dans la **Partie 2 : Détermination de la position du ressaut**. De même, nous avons négligé le temps de mise en mouvement du ressaut pour passer d'une vitesse nulle à $W = -0.6m/s$.

3.2 Propagation de l'information

A ce stade de notre projet expérimental, le but est d'observer la propagation d'un choc crée par le changement de hauteur de la vanne aval. L'aval du ressaut étant en **régime fluvial** (c'est-à-dire que le Froude est inférieur à 1) la vitesse des ondes $\sqrt{gh}$, est supérieure à la vitesse de l'écoulement : **l'information va réussir à "remonter" le cours d'eau**.
Lors de cette expérience, on part d'un ressaut immobile et on change la hauteur de la vanne aval. On détermine ensuite le temps que met le ressaut à se mettre en mouvement.
Dans la suite, on appellera $h_R = 12.5cm$ la hauteur à l'aval du ressaut dans la position initiale (quand $h_{VANNE,0} = 50mm$) et h_f, U_f respectivement la hauteur et la vitesse à droite du ressaut dans les premiers instants qui suivent l'abaissement de la vanne. On monte la vanne aval suffisamment haut pour ne pas avoir d'écoulement à l'aval de la vanne durant l'expérience.

h_{VANNE}(mm)	$h_{VANNE} - h_{VANNE,0}$ (mm)	Temps de mise en mouvement(s)	h_f(cm)	V_{exp}
230	180	8.4	19	-1.04

On souhaite comparer les valeurs expérimentales ci-dessus à celles obtenues théoriquement par la formule : $\lambda = U_R - c_R = -c_R$ avec $c_R = \sqrt{gh_R} = 1.1$ m/s et $U_R = 0$ m/s.
On trouve ainsi :

$$\boxed{\lambda = -1.1 \text{ m/s} \sim \text{V}_{exp}}$$

On détermine finalement la vitesse U_f à droite du ressaut dans les premiers instants qui suivent l'abaissement de la vanne. Pour cela, on utilise l'invariance de Riemann $J_1 = U + 2c$ le long d'une caractéristique C_1 reliant l'axe des x à $t = 0$ à l'axe des t à $x = -9$m. Ceci donne $U_R + 2c_R = U_f + 2c_f$, où $c_f = \sqrt{gh_f} = 1.36$m/s.
On a donc,

$$\boxed{U_f = U_R + 2(c_R - c_f) = -0.52\text{m/s}}$$

Nous allons tracer sur un même graphique les caractéristiques des équations de Saint-Venant lorsque le ressaut est stationnaire, puis mobile (lors de la montée de la vanne aval) et enfin quand il se stabilise à nouveau. On se place dans le cas d'une pente est nulle et nous reprenons les valeurs de U_R ,U_f, c_f, c_R et de W calculées précédemment.

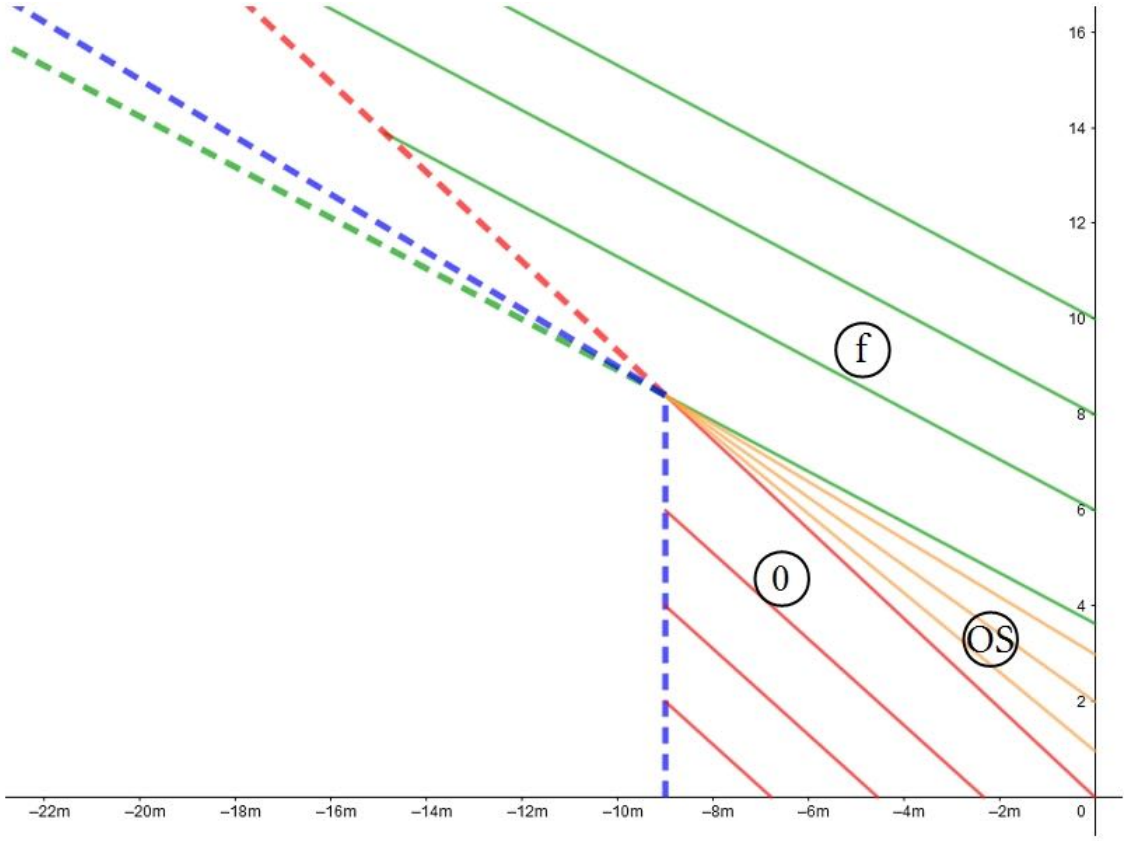

FIGURE 9 – Tracé des caractéristiques sur (t,x) pour l'onde de compression

Dans notre graphique nous avons tracé les caractéristiques d'équations : $\lambda = \dot{x} = U - c$. Les caractéristiques rouges correspondent aux paramètre U_R et c_R. Les caractéristiques vertes au domaine U_f et c_f. Enfin, nous traçons le choc (ressaut) en bleu. Nous observons que la position de ressaut varie dès lors que nous avons passé le temps de mise en mouvement de 8.4 secondes. Après un court régime transitoire, le ressaut avance à la vitesse constante W déterminée précédemment. Les caractéristiques oranges représentent l'onde de compression. Enfin, en vert, on a les caractéristiques du ressaut avec U_f et c_f peu de temps après la montée de la vanne.

Conclusion

Cette série de TP expérimentaux nous a permis d'approfondir nos connaissances des ressauts hydrauliques. Nous avons dû réaliser une batterie d'expériences, établir des protocoles et les suivre afin de vérifier plusieurs équations d'écoulement à surface libre. Nous avons pu ainsi mettre en application nos connaissances et les tester expérimentalement.
Les relevés des lignes d'eau ont permis de vérifier les équations de Bélanger, les fonctions d'impulsions ainsi que la hauteur critique. Pour nos trois différentes pentes, les valeurs expérimentales trouvées sont proches de celle trouvées théoriquement. Les équations sont donc vérifiées pour les canaux des salles de TP.
Nous avons aussi pu montrer l'influence de la pente sur la vitesse et la position de ressaut. En effet, plus la pente est forte, plus le ressaut recule vers l'aval. Nos calculs nous ont permis de tracer la courbe M3 ou S3, représentant l'évolution de la hauteur de la ligne d'eau en fonction de x.
Finalement, nous avons montré comment évolue le ressaut lorsque qu'une consigne est donnée à la vanne. Nous avons pu, à l'aide du grand canal, calculer la vitesse de l'information en fonction de l'élévation de la vanne et l'allure du ressaut. Ainsi, lorsque l'information arrive au ressaut et après un court régime transitoire, le ressaut avance à allure constante jusqu'à se positionner à une nouvelle position d'équilibre. Ici aussi, la valeur expérimentale de la vitesse du ressaut correspond à celle trouvée théoriquement. D'autre part avoir un projet expérimental avec un grand nombre de personnes permet d'améliorer notre écoute des divers critiques et notre esprit d'équipe, ce qui essentiel pour un futur ingénieur.

Bibliographie

Hydrodynamique de l'environnement, Olivier Thual
Devoir Maison sur le ressaut hydraulique, Olivier Thual
Méthode Cardan améliorée : http ://serge.mehl.free.fr/anx/equ_deg3.html

Code

```
#Courbes de remous : trac  et hauteurs conjugu es pour les M3, S3
#A partir de l' quation  4.27 du livre d'Olivier Thual : Hydrodynamique de l'environnement



import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt
from math import acos
from math import cos
from math import pi

plt.close()
plt.close()
plt.close()
plt.close()

##Param tres d'entr e num riques et physiques
N = 400 #nombre de points spatiaux
g=9.81
L = 0.25 #largeur du canal
Q = 10.6e-3 #d bit en m3.s-1
q = Q/L #d bit lin ique
hc = (q**2/g)**(1./3.) #hauteur critique
Ks = 100  #strickler du canal
h1_0 = 0.015 #hauteur d'eau    la sortie du seuil
h2_f = 0.14 #hauteur d'eau en amont de la vanne avale, hauteur impos e par la vanne avale
A = q**2*Ks**(-2)*hc**(-13./3.)
pente = 0.0025
hn = (q**2/pente/Ks**2)**(3./10.) #hauteur normal


## Cas pente n glig e , M3 et hauteurs conjugu es pour d termination de la position d'un ressau
#A partir des  quations  du DM (Q.19)

A = q**2*Ks**(-2)*hc**(-13./3.)
H = np.linspace(0, 1, num=N) #hauteur d'eau adimmensionnalise b: h/hc
X=np.zeros(N) #position adim X = xA


h = H*hc #hauteur d'eau
I = h**2/2*g+q**2/h #vecteur des impulsions associ es aux hauteurs d'eau

#calcul des hauteurs d'eau conjugu es
p_int = -2*I/g
q_int = 2*q**2/g

r = np.zeros(N)
t = np.zeros(N)

hconj = np.zeros(N) #vecteur des hauteurs d'eau conjugu es

for i in range(N) :
```

```
    r[i] = sqrt(-p_int[i]**3/27)
    t[i] = acos(-q_int/2/r[i])

for i in range(N) :
    X[i] = 3/4*H[i]**(4./3.) -3/13*H[i]**(13./3.) #calcul de la position X
    #calcul de la hauteur d'eau conjugu e
    h_1 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+2*pi)/3)
    h_2 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+4*pi)/3)
    h_3 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+6*pi)/3)
    hconj[i] = max(h_1, h_2, h_3)

x = X/A

#Pour tracer les hauteurs h1_0, h2 et hc
h0 = h1_0*np.ones(N)
h2 = h2_f*np.ones(N)
HC = hc*np.ones(N)

#Pour d terminer la distance entre le point de mesure h1_0 (   la base avale du seuil) et le ress
i = 0
while abs(hconj[i]-h2_f)> 1e-3:
    i = i+1
k = i

i=0
while abs(h[i]-h1_0)>1e-4:
    i = i+1

xc = x[k] - x[i]
print('Position du ressaut sans pente : ',xc) #affichage de la position du ressaut

#affichage
plt.figure(1)
plt.plot(x, h, label='M3',linewidth=4)
plt.plot(x,h0, label='h1_0')
plt.plot(x,h2, label='h2')
plt.plot(x,HC, label='hc')
plt.plot(x, hconj, label='Hauteurs conjugu es',linewidth=4)
plt.legend()
plt.ylim([0, 0.2])
plt.title("Courbe M3 sans pente et hauteurs d'eau conjugu es")
plt.xlabel('x en m')
plt.ylabel("Hauteur d'eau en m")
plt.show()

## Cas avec pente, M3 ou S3 et hauteurs conjugu es pour d termination de la position d'un ressau

x = np.linspace(0,16,N)
h0 = 0.0001 #initialisation pour calcul et trac  d'une M3 ou S3
h = np.zeros(N)
h[0]=h0

#r solution num rique    partir de l' quation  4.37 du livre
for i in range(1,N):
    h[i]= h[i-1] + (x[i]-x[i-1])*pente*(1-(h[i-1]/hn)**(-10/3))/(1-(h[i-1]/hc)**(-3))
```

```
#calcul de la hauteur d'eau conjugu e
I = h**2/2*g+q**2/h #Impulsion associ e    la hauteur d'eau
p_int = -2*I/g
q_int = 2*q**2/g
r = np.zeros(N)
t = np.zeros(N)
hconj = np.zeros(N)

for i in range(N) :
    r[i] = sqrt(-p_int[i]**3/27)
    t[i] = acos(-q_int/2/r[i])
    h_1 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+2*pi)/3)
    h_2 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+4*pi)/3)
    h_3 = 2*sqrt(-p_int[i]/3)*cos((t[i]+6*pi)/3)
    hconj[i] = max(h_1, h_2, h_3)

#Pour tracer hc, hn, h1_0 et h2
HC = hc*np.ones(N)
HN = hn*np.ones(N)
h0 = h1_0*np.ones(N)
h2 = h2_f*np.ones(N)

# donne l' cart  en m tre entre h1_0 et h1_f , soit la position relative du ressaut
i = 0
while abs(hconj[i]-h2_f)> 0.5e-3:
    i = i+1
k = i
i=0
while abs(h[i]-h1_0)>1e-4:
    i = i+1
xc =0
xc = x[k] - x[i]
print('Position relative du ressaut en consid rant la pente :', xc)

#Affichage
plt.figure(3)
if pente<0.0027 :
    plt.plot(x,h, label='M3',linewidth=4)
    plt.title('M3, Pente quasi nulle')
    plt.ylim([0,1])
else:
    plt.title('S3, Pente de 0.0077' )#'pente)
    plt.plot(x,h, label='S3',linewidth=4)
    plt.ylim([0,0.4])

plt.plot(x, hconj, label='Hauteurs conjugu es',linewidth=4)

plt.plot(x,HC, label='hc')
plt.plot(x,HN,label='hn')
plt.plot(x,h0,label='h0')
plt.plot(x,h2,label='h2')
plt.legend()
plt.xlabel('x en m')
plt.ylabel("Hauteur d'eau en m")
plt.show()
```