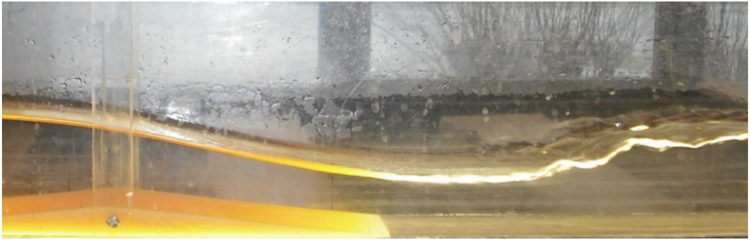
Hydraulique à surface libre

HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT, O. THUAL

13 avril 2020



Introduction

1. Charge hydraulique

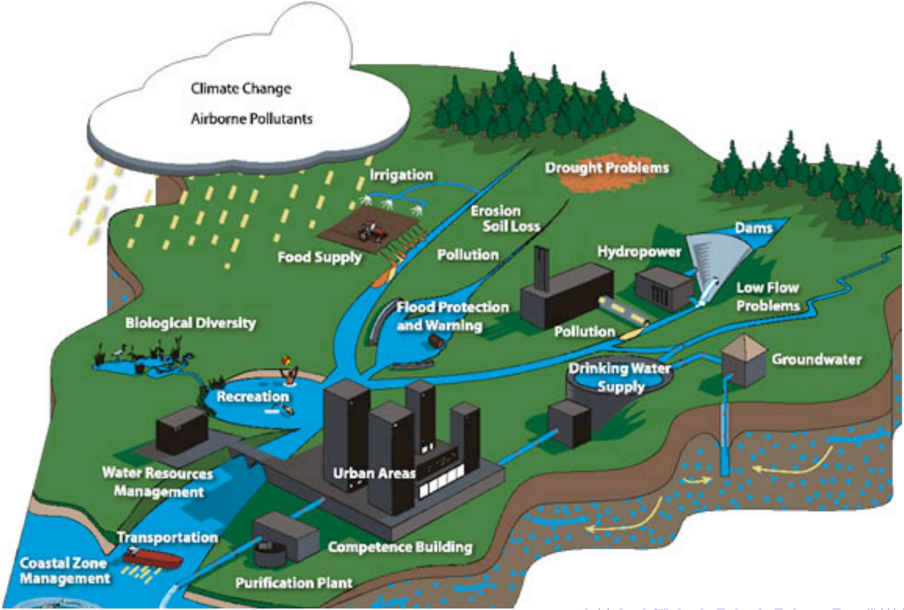
La charge hydraulique est définie à partir des équations de Navier-Stokes turbulentes. On moyenne ensuite cette charge sur la section d'un écoulement à surface à libre dans un canal.

2. Ressauts hydrauliques

Le tracé de la charge spécifique permet de décrire l'écoulement stationnaire sur un obstacle d'extension finie et de faible pente. Le tracé de l'impulsion permet de décrire les ressauts stationnaires.

3. Courbes de remous

On paramétrise le frottement, proportionnel à la perte charge, à l'aide d'un coefficient de Strickler, et on trace les courbes de remous des écoulements stationnaires.


Climate Change
Airborne Pollutants
Irrigation
Drought Problems
Erosion
Soil Loss
Food Supply
Pollution
Hydropower
Dams
Low Flow
Problems
Biological Diversity
Flood Protection
and Warning
Pollution
Groundwater
Drinking Water
Supply
Recreation
Water Resources
Management
Urban Areas
Transportation
Competence Building
Coastal Zone
Management
Purification Plant

Barrage des trois gorges

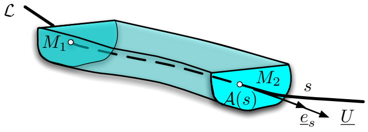
Équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds :

$$\operatorname{div}\, \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U}\cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho}\underline{\text{grad}}\ p + \nu\, \Delta \underline{U} - \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{U}\cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \frac{1}{2}\ \underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge \underline{U} \qquad \text{et} \qquad \underline{F} = -\underline{\text{grad}}\,(g\, z)$$

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{\text{grad}}\ H \cdot \underline{dM} = \frac{1}{g}\int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu\, \Delta \underline{U} - \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}}\right)\cdot \underline{dM}$$

$$\text{avec} \qquad R_{ij} = \overline{U_i'\, U_j'} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{1}{2\, g}\underline{U}^2$$



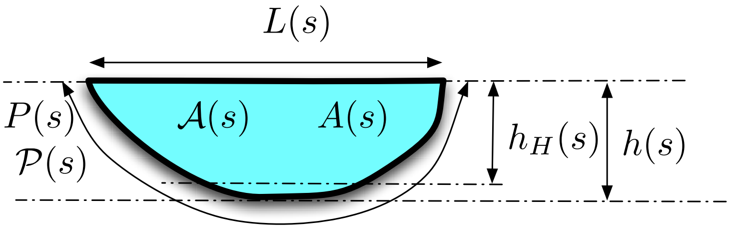
Integration de M_1 à M_2

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g}\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J}\right)\cdot \underline{dM}$$

avec $\qquad \underline{J} = \frac{1}{g}(-\nu\, \Delta \underline{U} + \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{R}})$

- Section : A
- Périmètre mouillé : P
- Largeur mirroir : L

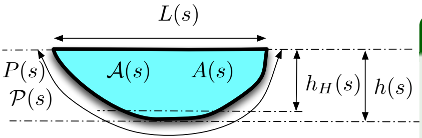
- Rayon hydraulique : $R_H = A/P$
- Diamètre hydraulique : $D_H = 4\ R_H$
- Hauteur hydraulique : $h_H = A/L$



- On suppose souvent $h_H \sim h$
- Section rectangulaire avec $L \gg h$: $R_H \sim h$
- Section en demi-cercle de rayon R : $R_H = R/2$

Débit moyen et vitesse moyenne :

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s \, da = A(s) \; U(s) \implies U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s \, da$$



Dans le cas hydrostatique :

$$P_* = p + \rho \, g \, z$$

Pour des profils turbulents :

$$\alpha \sim 1$$

Charge hydraulique moyenne :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{p}{\rho \, g} + z + \frac{\underline{U}^2}{2g} \right) da$$

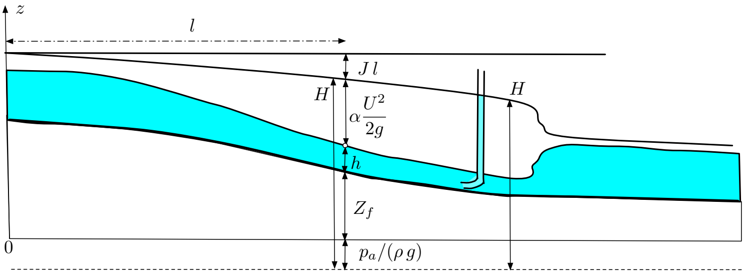
$$= \frac{P_*(s)}{\rho \, g} + \alpha(s) \, \frac{U^2(s)}{2 \, g}$$

$$P_*(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} (p + \rho \, g \, z) \, da$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{U}^2 \, da$$

Charge hydraulique des écoulements à surface libre :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho\, g} + Z_f(s) + h(s) + \alpha(s)\frac{U^2(s)}{2\, g}$$

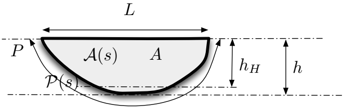


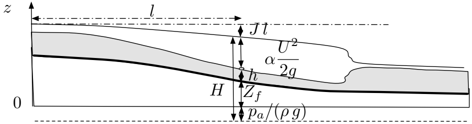
Perte de charge linéique $\frac{dH}{ds} = -J$:

$$H(s_2) - H(s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} J(s)\, ds \quad \text{avec} \quad J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{J} \cdot \underline{e}_s\, da$$

Équations d'équilibre avec $\alpha \sim 1$:

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \text{ avec } Q = U\,A\,, \quad \frac{dH}{ds} = -J \text{ avec } H = \frac{p_a}{\rho\,g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g}$$





Pente $I = -dZ_f/ds$:

$$\frac{d(U\,A)}{ds} = \frac{dU}{ds} A + U\,\frac{dA}{dh}\,\frac{dh}{ds} = 0$$

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{ds} - I + \frac{U}{g}\,\frac{dU}{ds} = -J$$

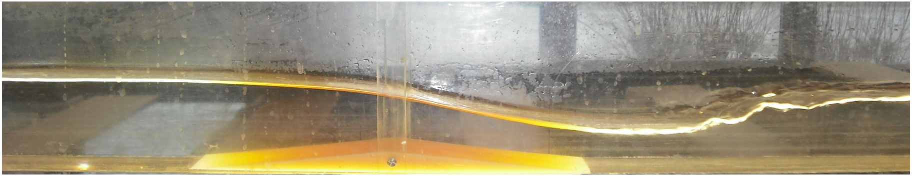
Si $dA \sim L\,dh$ et $A/L = h_L \sim h$:

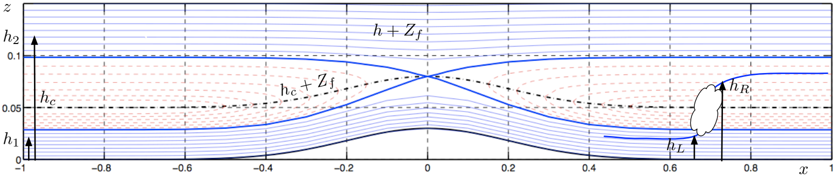
$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2}$$

où le nombre de Froude est

$$Fr = U/\sqrt{g\,h}$$

Écoulement sur un obstacle





Hauteur critique h_c dans le cas L constante et $A/L = h_H \sim h$:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g\,h}} = \left(\frac{h_c}{h}\right)^{3/2} \quad \text{avec} \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad q = U\,h$$

Obstacle $z = Z_f(s)$ dans le cas $J \sim 0$ (frottements négligeables) :

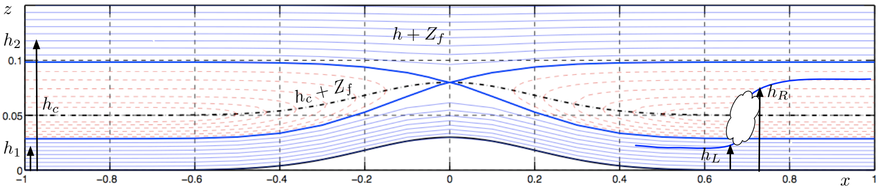
$$\frac{dh}{ds} = \frac{I}{1 - Fr^2} = \frac{-dZ_f/ds}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad \Longrightarrow \quad h + \frac{1}{2}\frac{h_c^3}{h^2} = H_0 - Z_f$$

Charge spécifique $\mathcal{E}(q,h)$ et conservation de la charge H :

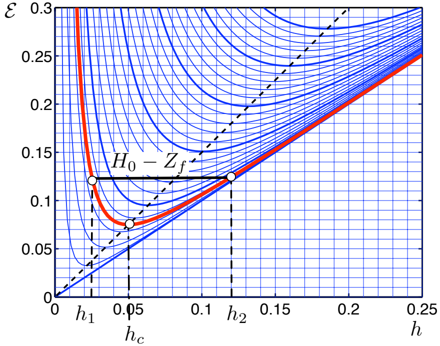
$$\mathcal{E}(q,h) = h + \frac{q^2}{2\,g\,h^2} = h + \frac{U^2}{2\,g} = h + \frac{1}{2}\frac{h_c^3}{h^2}$$

On a donc : $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$

$$H = \frac{p_a}{\rho\,g} + Z_f(s) + h(s) + \frac{U(s)^2}{2\,g} \quad \Longrightarrow \quad H_0 = H - \frac{p_a}{\rho\,g}$$



Solutions de $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$



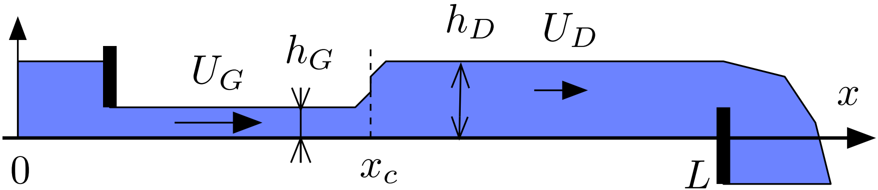
Écoulement critique : $Fr = 1$:

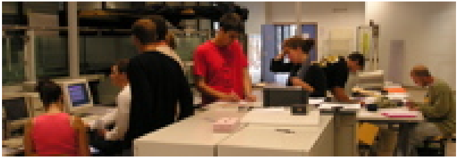
- Sous critique :
  $h > h_c \iff Fr < 1$
- Super critique :
  $h < h_c \iff Fr > 1$

h_1 et h_2 sont des hauteurs conjugées pour $\mathcal{E}(q, h)$

Ressauts hydraulique stationnaire sur le Mississipi

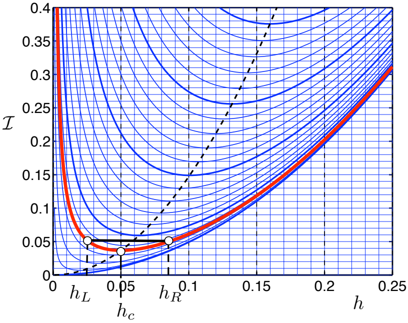
Ressauts hydrauliques en laboratoire

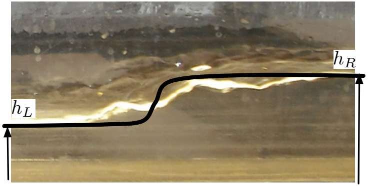




Convervation de la masse et de la quantité de mouvement

$$U_L\ h_L = U_R\ h_R = q \qquad \text{et} \qquad h_L\ U_L^2 + \frac{1}{2}\ g\ h_L^2 = h_R\ U_R^2 + \frac{1}{2}\ g\ h_R^2$$



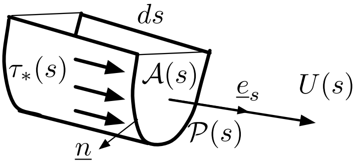


Élimination de la vitesse $\Longrightarrow$ fonction impulsion $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{I}(q, h) = \frac{g}{h}\ \left(h_c^3 + \frac{1}{2}\ h^3\right)$$

Équations de Navier-Stokes turbulentes et perte de charge :

$$\underline{J} = \frac{1}{g}(-\nu\,\Delta\underline{U} + \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{R}}) = -\frac{1}{\rho\,g}\,\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\tau}}_t) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}}_t = \rho\,(2\,\nu\,\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{R}})$$



$$J = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{A}} \underline{J}\cdot\underline{e}_s\, da$$

$$\tau_* = -\frac{1}{P}\int_{P} \underline{e}_s\cdot\underline{\underline{\tau}}_t\cdot\underline{n}\, dl$$

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\underline{e}_s\cdot\underline{\underline{\tau}}_t\cdot\underline{e}_s\right)\, da \sim 0$$

Relation entre la perte de charge linéique J et le frottement τ_* :

$$\tau_* = \rho\,g\,R_H\,J \qquad \text{avec} \qquad R_H = A/P$$

Paramétrisation du frottement $\tau_* = \rho\, g\, R_H\, J$:

$$\tau_* = \frac{1}{8}\,\lambda(Re, Ru)\,\rho\,U^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad J = \lambda\,(Re, Ru)\,\frac{U^2}{2\,g\,D_H}$$

avec $Re = U\,D_H/\nu$ et $Ru = k_s/D_H$

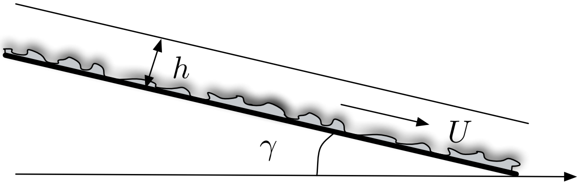
Paramétrisation de Manning-Strickler (cas rugueux) :

$$\lambda = \phi_{MS}\,Ru^{\frac{1}{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad J = \frac{U^2}{R_H^{4/3}\,K_s^2} \quad \text{avec} \quad K_s = \left(\frac{8\,k_s^{1/3}\,g}{\phi_{MS}}\right)^{1/2}$$

Si $I = -\frac{dZ_f}{ds} = \sin\gamma$:

$J = I$ et $R_H = h \implies$

$$U = K_s\,h^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\sin\gamma}$$



Équation stationnaire pour h avec frottement J :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \qquad \text{avec} \qquad I = -\frac{dZ_f}{ds}$$

Hauteur normale h_n :

$$J = I \left(\frac{h}{h_n}\right)^{-10/3} \qquad \text{avec}$$

$$h_n = \left(\frac{q^2}{I\,K_s^2}\right)^{3/10}$$

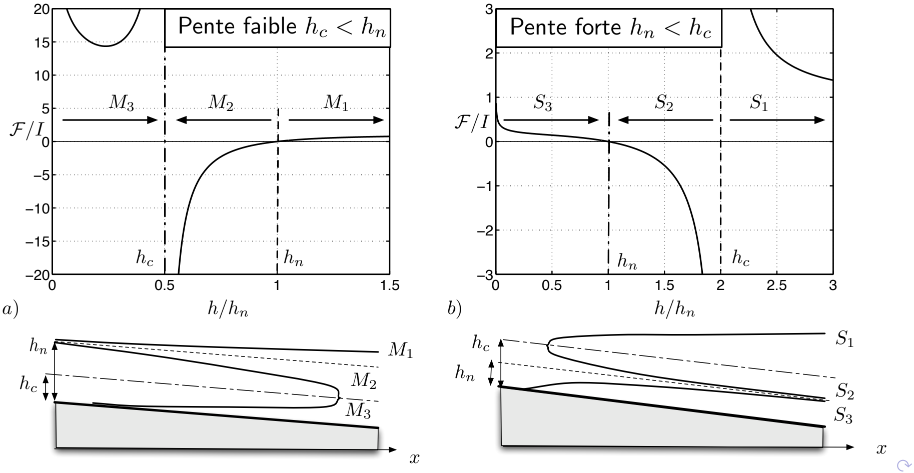
Hauteur critique h_c :

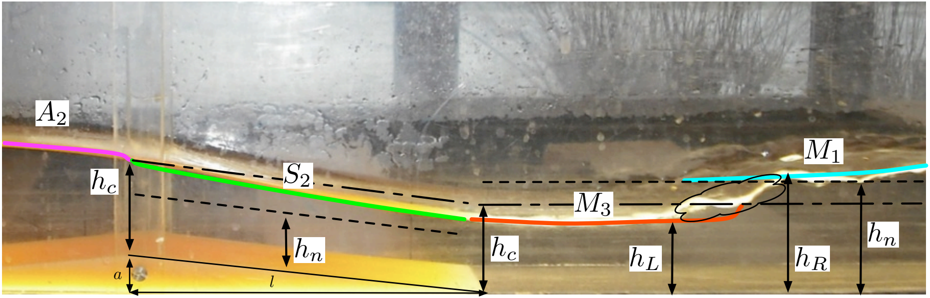
$$Fr^2 = \left(\frac{h}{h_c}\right)^{-3} \qquad \text{avec}$$

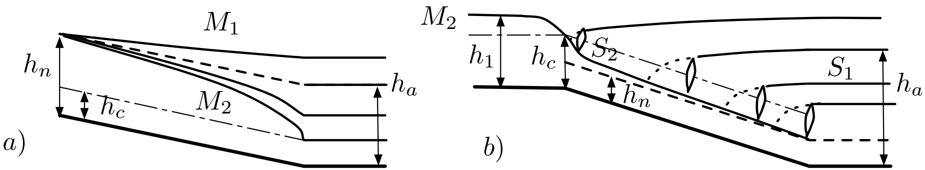
$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I\,\frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}$$

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \; \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}$$




A_2
h_c
S_2
M_3
M_1
h_n
h_c
h_L
h_R
h_n
a
l


M_1
h_n
h_c
M_2
h_a
$a)$
M_2
h_1
h_c
S_2
h_n
S_1
h_a
$b)$