

Chapitre 4

Hydraulique à surface libre

(Open channel flows)

O. Thual, 13 avril 2020

Sommaire

1	Charge hydraulique	3
1.1	Équation de Bernoulli	3
1.2	Paramètres géométriques	5
1.3	Charge moyenne	6
2	Charge spécifique et impulsion	8
2.1	Équations stationnaires	8
2.2	Écoulement sur un obstacle	9
2.3	Ressauts hydrauliques	11
3	Courbes de remous	13
3.1	Perte de charge et frottements	13
3.2	Coefficient de Strickler	14
3.3	Courbes de remous	15

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les modèles de base qui décrivent les écoulements à surface libre en hydraulique fluviale. De tels écoulements sont “graduellement variés” quand la taille de leurs sections est petite devant les échelles caractéristiques de variation de leurs pentes. Nous considérons uniquement ici des écoulements stationnaires sous l’hypothèse de “variation graduelle”.

Introduction

The objective of this chapter is to present the basic models which describe open channel flows. Such flows are “gradually varied” the size of these sections are small compared to the characteristic scales of variation of their slope. We only consider here stationary flows under the “gradual variation” hypothesis.



FIGURE 4.1 – *Le fleuve Amazone vu de l’espace. Photo NASA.*

The Amazon seen from space. Photo NASA.

Le concept de “charge hydraulique” pour les écoulements à surface libre est présenté sur l’équation de Bernoulli dérivée des équations de Navier-Stokes. L’équation pour la charge hydraulique le long du canal est écrite dans le cas stationnaire et appliquée au cas d’un écoulement sur un obstacle lorsque le frottement peut être négligé. Les concepts d’écoulements “supercritiques” ou “sous-critiques”, dépendant du nombre de Froude, sont présentés sur cet exemple.

The concept of “hydraulic head” for open channel flow is presented on the Bernoulli equation derived from the Navier-Stokes equations. The equation for the hydraulic head along the channel in the stationary case is written and applied to the case of a flow over an obstacle when the friction can be neglected. The concepts of “super-critical” and “sub-critical” flows, depending on the Froude number, are presented of this example.

Des considérations sur les conditions aux limites expliquent l’apparition des ressauts hydrauliques. Les relations de sauts pour ces ressauts hydrauliques sont présentées de manière simple. Le frottement turbulent sur le fond du canal est modélisé à travers une paramétrisation de Manning-Strickler, ce qui est très courant pour une approche des écoulements à surface libre de type ingénieur. La description des “courbes de remous” est donnée dans le cas de cette paramétrisation et les notions de “hauteur normale” et “hauteur critique” sont utilisées pour classier ces courbes.

Considerations on boundary conditions explain the advent of hydraulic jumps. The discontinuity equations for these hydraulic jumps are presented in a simple manner. The turbulent friction of the bottom on the channel is modelled through a Manning-Strickler parametrization, which is very common for open channel flow engineer approach. The description of the “back water curves” is given in the case of this parametrization and the notions of “normal height” and “critical height” are used to classify these curves.

1 Charge hydraulique

Hydraulic head

L’équation de Bernoulli conduit naturellement à la notion de charge hydraulique. On peut alors la moyenner sur la section d’un canal et définir la notion de perte de charge linéique le long de son axe.

The Bernoulli equation leads naturally to the notion of hydraulic head. One can then average it on the section of a channel and define the notion of lineic head loss along its axis.

1.1 Équation de Bernoulli

Bernoulli equation

Nous débutons en considérant les équations de Navier-Stokes incompressibles et turbulentes

We start by considering the incompressible and turbulent Navier-Stokes equations

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} - \operatorname{div} \underline{R} \quad , \quad (4.1)$$

dans lesquelles ρ est la masse volumique constante et $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur des contraintes de Reynolds défini par $R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}$ où les composantes U'_i sont les fluctuations turbulentes de vitesse. Les champs $\underline{U}$ et p de ces équations sont les “moyennes de Reynolds” de la vitesse et la pression que nous omettons de noter $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{p}}$ pour simplifier. On suppose que les forces de volumes $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\underline{\text{grad}}(gz)$ sont dues à la gravité.

in which ρ is the constant mass density and $\underline{\underline{R}}$ is the Reynolds stress tensor, defined by $R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}$ where the components U'_i are the velocity turbulent fluctuations. The fields $\underline{U}$ and $\underline{p}$ of these equations are the “Reynolds averaged” velocity and pressure that we omit to denote by $\underline{\underline{U}}$ and $\underline{\underline{p}}$ for simplicity. We assume that the volume forces $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\underline{\text{grad}}(gz)$ are due to gravity.

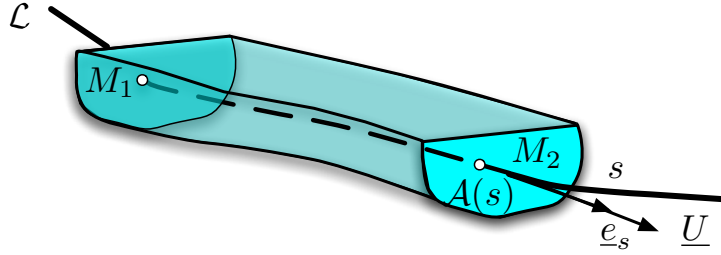


FIGURE 4.2 – Ligne de courant $\mathcal{L}$ dans un canal ouvert.

Streamline $\mathcal{L}$ in an open channel flow.

Considérons une ligne de courant $\mathcal{L}$ allant d’un point M_1 à un point M_2 (figure 4). En utilisant la relation

Let us consider a stream line $\mathcal{L}$ going from a point M_1 to a point M_2 . By using the relation

$$\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}, \quad (4.2)$$

on peut établir “l’équation de Bernoulli”

one can establish the “Bernoulli equation”

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{\text{grad}} H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu \Delta \underline{U} - \underline{\text{div}} \underline{\underline{R}} \right) \cdot d\underline{M}, \quad (4.3)$$

où H est la “charge hydraulique” définie par la relation

where H is the “hydraulic head” defined by the relation

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2. \quad (4.4)$$

En intégrant de M_1 à M_2 , l’équation de Bernoulli s’écrit

By integrating from M_1 to M_2 , the Bernoulli equation reads

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M}, \quad \underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \underline{\text{div}} \underline{\underline{R}}). \quad (4.5)$$

Le terme $\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ est la perte de charge linéique qui s’annule pour les régimes stationnaires considérés ici. Le terme $\underline{J}$ est la perte de charge linéique due aux frottements visqueux et turbulents.

The term $\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ is the lineic head loss which vanishes for stationary regimes that are considered here. The term $\underline{J}$ is the lineic head loss due to viscous and turbulent frictions.

1.2 Paramètres géométriques

Étant donné un écoulement à surface libre dans un canal, on peut considérer la famille des sections $\mathcal{A}(s)$ qui suit une ligne de courant $\mathcal{L}$ paramétrisée par la coordonnée curviligne s (voir figure 4). Nous notons $\mathcal{P}(s)$ la partie de la frontière d'une section $\mathcal{A}(s)$ en contact avec la paroi du canal de largeur $L(s)$. Pour chaque section $\mathcal{A}(s)$, on peut définir son aire $A(s)$, le périmètre $P(s)$ de $\mathcal{P}(s)$, que l'on nomme "périmètre mouillé", et la largeur $L(s)$, que l'on nomme "largeur miroir".

Geometric parameters

Given an open channel flow, one can consider the family of sections $\mathcal{A}(s)$ which follow a streamline $\mathcal{L}$, parametrised by the curvilinear coordinate s (see Figure 4). We denote by $\mathcal{P}(s)$ the part of the boundary of the section $\mathcal{A}(s)$ which is in contact with the inner surface of the channel of width $L(s)$. For each section $\mathcal{A}(s)$, one can define its area $A(s)$, the perimeter $P(s)$ of $\mathcal{P}(s)$, that one denotes by "wet perimeter" and the width $L(s)$, that one denotes by "top width".

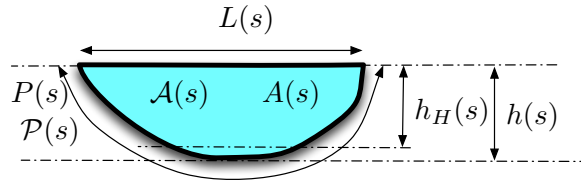


FIGURE 4.3 – Section $\mathcal{A}(s)$, périmètre mouillé $P(s)$, largeur miroir $L(s)$, profondeur maximale $h(s)$ et rayon hydraulique $h_H(s)$.

Section $\mathcal{A}(s)$, wet perimeter $P(s)$, top width $L(s)$, maximal depth $h(s)$ and hydraulic depth $h_H(s)$.

On définit alors le "rayon hydraulique" $R_H(s)$, le "diamètre hydraulique" $D_H(s)$ et la "hauteur hydraulique" $h_H(s)$ par les relations

One then define the "hydraulic radius" $R_H(s)$, the "hydraulic diameter" $D_H(s)$ and the "hydraulic height" $h_H(s)$ by the relations

$$R_H(s) = \frac{A(s)}{P(s)} \quad , \quad D_H(s) = 4 R_H(s) \quad , \quad h_H(s) = \frac{A(s)}{L(s)} . \quad (4.6)$$

La hauteur hydraulique $h_H(s)$ n'est pas forcément égale à la vraie hauteur $h(s)$ que l'on définit comme étant la plus grande distance entre le fond et la surface libre. Mais dans la plupart des cas pratiques, l'approximation $h \sim h_H$ est supposée.

The hydraulic height $h_H(s)$ is not necessarily equal to the true height $h(s)$ which is defined as being the greatest distance between the bottom and the free surface. But in most practical applications, the approximation $h \sim h_H$ is assumed.

Quand la section du canal est un rectangle de hauteur h et de longueur L avec $L \gg h$, on a $R_H = h$ et $h_H = h$. De nombreuses sections typiques, comme les trapèzes, peuvent être considérées pour décrire les canaux ouverts.

When the section of the channel is a rectangle of height h and of length L with $L \gg h$, one has $R_H = h$ and $h_H = h$. Numerous typical sections, such as trapezoids, can be considered to describe open channels.

1.3 Charge moyenne

Averaged head

Dans de nombreuses applications, les écoulements en canaux ouverts peuvent être décrits par des quantités moyennées sur la section $\mathcal{A}(s)$ d'aire $A(s)$.

In numerous applications, open channel flows can be described by quantities averaged on the section $\mathcal{A}(s)$ of area $A(s)$.

Pour une abscisse donnée s , le débit $Q(s)$ et la vitesse moyenne $U(s)$ sont définis par la relation

For a given abscissa s , the volumetric flux $Q(s)$ and the averaged velocity $U(s)$ are defined by the relation

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS = A(s) U(s) \implies U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (4.7)$$

La charge hydraulique moyenne est définie par

The averaged hydraulic head is defined by

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} \right) dS = \frac{P_*(s)}{\rho g} + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} , \quad (4.8)$$

où P_* et α sont définis par

where P_* and α are defined by

$$P_*(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} (p + \rho g z) dS , \quad \alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{U}^2 dS . \quad (4.9)$$

On a $\alpha = 1$ quand le champ de vitesse $\underline{U}$ est constant sur la section $\mathcal{A}$. Pour des écoulements turbulents, le profil de vitesse est presque plat et α est proche de un.

One has $\alpha = 1$ when the velocity field $\underline{U}$ is constant on the section $\mathcal{A}$. For turbulent flows, the velocity profile is flat and α is nearly close to one.

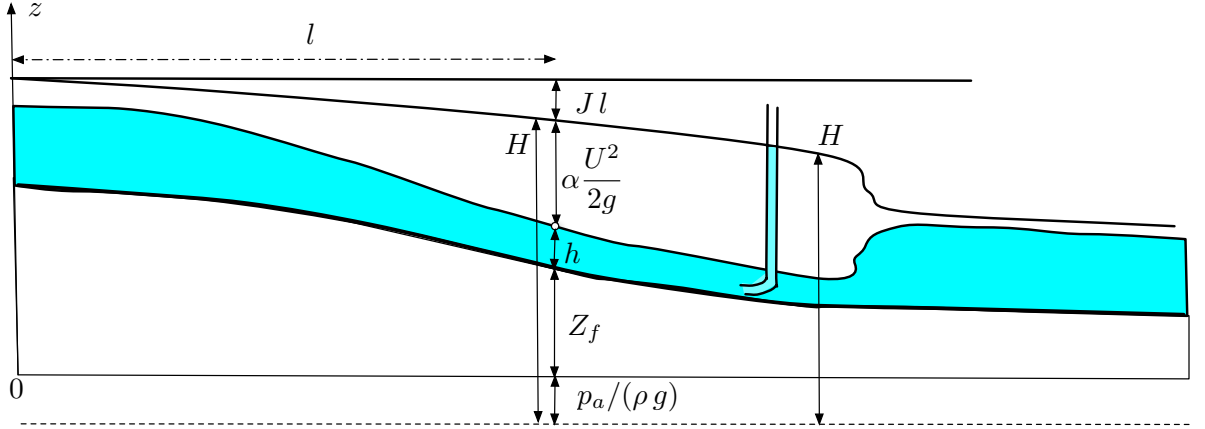


FIGURE 4.4 – Charge $H = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f + h + \alpha \frac{U^2}{2g}$ et perte de charge linéique J .

Averaged head $H = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f + h + \alpha \frac{U^2}{2g}$ and lineic head loss J .

La quantité $P_*(s)$ peut être appelée la “pression piézométrique moyenne”. Quand la pression locale p peut être considérée comme hydrostatique, ce qui est souvent le cas pour des écoulements à surface libre, la pression piézométrique locale $p_* = p + \rho g z$ est partout égale à la pression piézométrique moyenne P_* . C’est le cas lorsque l’écoulement est “graduellement varié”, c’est-à-dire quand l’échelle de variation de ces champs est grande comparée à l’échelle des sections. Nous faisons cette hypothèse pour les écoulements de ce chapitre.

The quantity $P_*(s)$ can be called the “averaged piezometric pressure”. When the local pressure p can be considered as hydrostatic, which is often the case for open channel flows, the local piezometric pressure $p_* = p + \rho g z$ is everywhere equal to the averaged piezometric pressure P_* . This is the case when the flow is “gradually varied”, that is when the variation scale of the fields in the s direction is large compared to the scale of the sections. We make this hypothesis for the flows of this chapter.

Nous notons $z = Z_f(s)$ l’équation du point le plus profond (figure 4) et nous appellons $I(s) = -Z'_f(s)$, par abus de langage, la “pente du canal”. Si $I(s)$ est petit, cette définition rejoint la notion de pente par rapport à l’horizontale et l’on peut, de plus, considérer que $h(s)$ est proche de la profondeur du canal mesurée sur un axe vertical. Nous faisons cette hypothèse pour les canaux de ce chapitre. Avec toutes ces hypothèses ($\alpha \sim 1$, $I \ll 1$, graduellement varié), la charge moyenne s’écrit

We denote by $z = Z_f(s)$ the equation of the deepest point (figure 4) and we denote $I(s) = -Z'_f(s)$, with an abuse of language, the “slope of the channel”. If $I(s)$ is small, this definition meets the notion of slope with respect to the horizontal and on can, furthermore, consider that $h(s)$ is close to the depth of the channel measured on a vertical axis. We make this hypothesis for the channels of this chapter. With all these hypotheses ($\alpha \sim 1$, $I \ll 1$, gradually varied), the averaged head reads

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}. \quad (4.10)$$

En moyennant l’équation de Bernoulli dans le cas stationnaire $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, on obtient

When averaging the Bernoulli equation in the stationary case $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, one obtains

$$H(s_2) - H(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} J(s) ds, \quad J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_A \underline{J} \cdot \underline{e}_s dS. \quad (4.11)$$

En dérivant par rapport à s_2 , la perte de charge linéique $J(s)$ satisfait la relation

By deriving with respect to s_2 , the lineic head loss $J(s)$ satisfies the relation

$$\frac{dH}{ds} = -J . \quad (4.12)$$

2 Charge spécifique et impulsion

Specific head and impulsion

Les équations stationnaires se ramènent à une équation différentielle ordinaire pour la hauteur d'eau. En l'absence de frottement, la charge spécifique est conservée au passage d'un obstacle. Les relations de saut à travers un ressaut hydraulique sont explicitées.

The stationary equations are reduced to a single ordinary differential equation for the water height. In the absence of friction, the specific head is conserved through an obstacle. The jump conditions through a hydraulic jump are explicitated.

2.1 Équations stationnaires

Stationary equations

Nous considérons un écoulement à surface libre stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulent ($\alpha \sim 1$), de faible pente ($I \ll 1$) et graduellement varié. L'équation d'équilibre s'écrit alors

We consider an open channel flow which is stationary ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulent ($\alpha \sim 1$), with a small slope ($I \ll 1$) and gradually varied. The equilibrium equation reads

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad , \quad H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g} , \quad (4.13)$$

où J est la perte de charge linéique qui doit être paramétrisée en fonction de h et U à l'aide d'un modèle de turbulence.

where J is the lineic head loss which must be parameterized as a function of h and U with the help of a turbulence model.

Pour simplifier la présentation qui suit, nous supposons que la largeur miroir L est constante et que la hauteur hydraulique h_H peut être confondue avec la profondeur h . On a donc $h_H = h$, $A = L h_H = L h$ et $Q = A U = L h U$ où Q est le débit. On définit alors le débit linéique $q = Q/L = h U$ qui est donc constant pour les écoulements stationnaires considérés ici.

To simplify the following presentation, we assume that the mirror width L is constant and the hydraulic height h_H can be replaced by the depth h . One then has $h_H = h$, $A = L h_H = L h$ and $Q = A U = L h U$ where Q is the discharge rate. One then define the lineic discharge rate $q = Q/L = h U$ which is then constant for the stationary flows considered here.

Avec ces hypothèses, l'expression de la charge hydraulique est de la forme

With these hypotheses, the expression of the hydraulic head read

$$H(s) = h(s) + \frac{q^2}{2g h^2(s)} + Z_f(s) + \frac{p_a}{\rho g} . \quad (4.14)$$

En notant $I = -Z'_f(s)$ la pente du fond, l'équation d'équilibre (4.13) s'écrit

By denoting $I = -Z'_f(s)$ the slope of the bottom, the equilibrium equation (4.13) reads

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{q}{g^{1/2} h^{3/2}} \quad , \quad (4.15)$$

où le nombre sans dimension Fr , appelé le “nombre de Froude”, apparaît. On définit alors la “hauteur critique” h_c par la relation

where the dimensionless number Fr , called the “Froude number”, appears. On thus define the “critical height” h_c by the relation

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad Fr = \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2} \quad . \quad (4.16)$$

2.2 Écoulement sur un obstacle

Flow over an obstacle

Comme premier exemple d'application de l'équation d'équilibre (4.15), on considère un fond d'équation $z = Z_f(s)$ tel que Z_f est constant excepté sur un obstacle d'extension finie et de faible pente (voir figure 4). Dans ce cas, s peut être choisi comme étant la coordonnée horizontale x . Par exemple, on peut considérer un obstacle de forme gaussienne avec $Z_f(s) = a \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$ où a est petit devant σ .

As a first example of application of the equilibrium equation (4.15), we consider a bottom of equation $z = Z_f(s)$ such that Z_f is a constant excepted on a obstacle of finite extend and of small slope. In this case, s can be chosen as the horizontal x coordinate. For instance, one can consider a Gaussian shaped obstacle by choosing $Z_f(s) = a \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$ where a is small in front of σ .

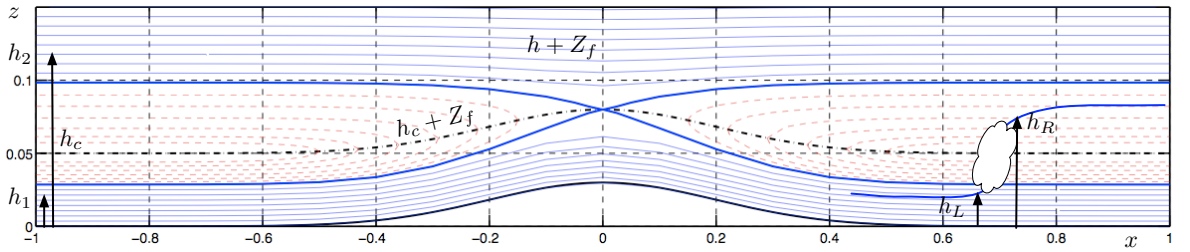


FIGURE 4.5 – Courbes $z = h(x) + Z_f(x)$.

Curves $z = h(x) + Z_f(x)$.

Si l'extension horizontale de l'obstacle n'est pas trop grande, on peut considérer que la perte de charge linéique $J \sim 0$ est négligeable comparée à I . L'équation d'équilibre (4.15) s'écrit alors

If the horizontal extension of the obstacle is not too big, one can consider that the lineic head loss $J \sim 0$ is negligible compared to I . The equilibrium equation (4.15) thus reads

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I(s)}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \left[1 - (h/h_c)^{-3} \right] \frac{dh}{ds} = I = -\frac{dZ_f}{ds} \quad . \quad (4.17)$$

Comme la hauteur critique h_c , qui ne dépend que de q et g , est constante sur la portion de canal étudiée, cette équation différentielle s'intègre en $h(s) + \frac{1}{2}h_c^3/h^2(s) = H_0 - Z_f(s)$ où H_0 est une constante d'intégration. On retrouve bien la conservation de la charge

Since the critical height h_c , that only depends on q and g , is constant on the studied part of the channel, this differential equation can be integrated into $h(s) + \frac{1}{2}h_c^3/h^2(s) = H_0 - Z_f(s)$ where H_0 is an integration constant. One finds back the head conservation

$$H = h(s) + \frac{U(s)^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) \implies H_0 = H - \frac{p_a}{\rho g}. \quad (4.18)$$

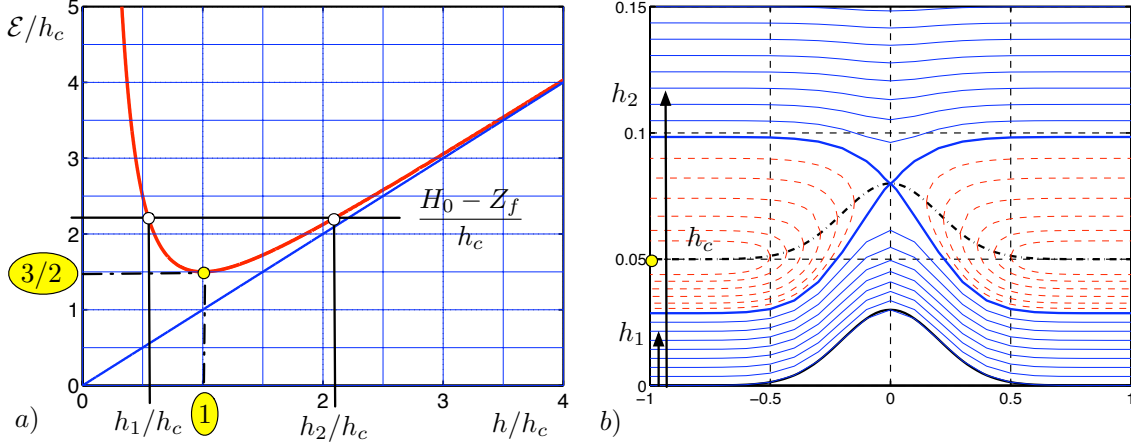


FIGURE 4.6 – a) Charge spécifique adimensionnée $\frac{\mathcal{E}(q, h)}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c} \right)^{-2}$ avec $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Profils de surface libres possibles (en bleu).

a) Dimensionless specific head $\frac{\mathcal{E}(q, h)}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c} \right)^{-2}$ with $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Possible free surface profiles (in blue).

On définit alors la “charge spécifique” par les relations

One then defines the “specific head” by the relations

$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2g h^2} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2}. \quad (4.19)$$

La charge spécifique $\mathcal{E}(q, h)$ est représentée sur la figure 4. Pour un débit donné q , elle est minimum pour h_c avec $\mathcal{E}(q, h_c) = \frac{3}{2} h_c$. Pour $H_0 - Z_f \geq E_c$, il existe deux solutions h_1 et h_2 à l’équation $\mathcal{E}(q, h) = H_0 - Z_f$. Ces deux solutions sont appelées “hauteurs conjuguées pour la charge spécifique”.

where H_0 is an integration constant. The specific head $\mathcal{E}(h)$, is drawn on Figure 4. For a given flow rate q , it is minimum for h_c with $\mathcal{E}(q, h_c) = \frac{3}{2} h_c$. For $H_0 - Z_f \geq E_c$, there exists two solutions h_1 and h_2 to the equation $\mathcal{E}(q, h) = H_0 - Z_f$. These two solutions are called “conjugate heights for the specific head”.

Au point s où $h < h_c$, donc $Fr > 1$, l’écoulement est dit “supercritique”. Quand $h > h_c$, et donc $Fr < 1$, l’écoulement est dit “sous-critique”. Il est “critique” au point où $h = h_c$, donc $Fr = 1$.

At the point s where $h < h_c$, and thus $Fr > 1$, the flow is said to be “supercritical”. When $h > h_c$, and thus $Fr < 1$, the flow is say to be “sub-critical”. It is “critical” at the point where $h = h_c$ and thus $Fr = 1$.

La figures 4b montre toutes les courbes $z = Z_f(s) + h(s)$ où $h(s)$ sont toutes les solutions de l’équation $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$ pour q fixé avec toutes les valeurs possibles de H_0 . Les lignes pointillées correspondent à des courbes non physiques, dans la mesure où elles ne permettent pas de franchir l’obstacle.

Figure 4b shows all the curves $z = Z_f(s) + h(s)$ where $h(s)$ are all the solutions of the equation $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$ for fixed q with all the possible values of H_0 . The dashed lines corresponds to non physical curves, since they cannot cross the obstacle.

Quand l'écoulement est partout sous-critique ($h > h_c$), la hauteur $h(x)$ de la surface libre décroît en passant sur l'obstacle. Quand l'écoulement est partout supercritique ($h < h_c$), la hauteur $h(x)$ croît. Il y a une seule courbe qui passe de sous-critique à supercritique. Pour cette courbe, l'écoulement est critique au sommet de l'obstacle.

When the flow is everywhere sub-critical ($h > h_c$), the free surface height $h(x)$ decreases when passing over the obstacle. When the flow is everywhere super-critical, the height $h(x)$ increases. There is only one curve which goes from sub-critical to super-critical. For this curve the flow is critical at the summit of the obstacle.

2.3 Ressauts hydrauliques

On observe, dans les écoulements naturels, que la hauteur de la surface libre peut transiter abruptement de $h_L < h_c$ à $h_R > h_c$ au travers d'un "ressaut hydraulique". Un tel ressaut hydraulique permet de raccorder l'écoulement à une condition aux limites en aval.

Hydraulic jumps

One observes, in natural flows, that the free surface height can jump abruptly from $h_L < h_c$ to $h_R > h_c$ through stationary "hydraulic jump". Such an hydraulic jump allows the matching with a downstream boundary condition.



FIGURE 4.7 – *Ressaut stationnaire. Photo de Baptiste Monsion.*

Stationary hydraulic jump.

La relation de saut pour les ressauts hydrauliques est obtenue à partir d'un bilan de masse et de quantité de mouvement. Notons (h_L, U_L) la hauteur et la vitesse à la gauche du ressaut hydraulique et (h_R, U_R) les grandeurs correspondantes à droite.

The discontinuity relation for the hydraulic jumps are obtained from a mass and momentum budget. Let us denote (h_L, U_L) the height and velocity at the left of the hydraulic jump and (h_R, U_R) the corresponding quantities at the right.

Pour le cas stationnaire considéré ici, la loi de conservation de la masse dit que le débit linéique $q = U h$ est constant, ce qui s'écrit

For the stationary case that is considered here, the mass conservation law says that the lineic discharge flux $q = U h$ is constant, which reads

$$U_L h_L = U_R h_R = q . \quad (4.20)$$

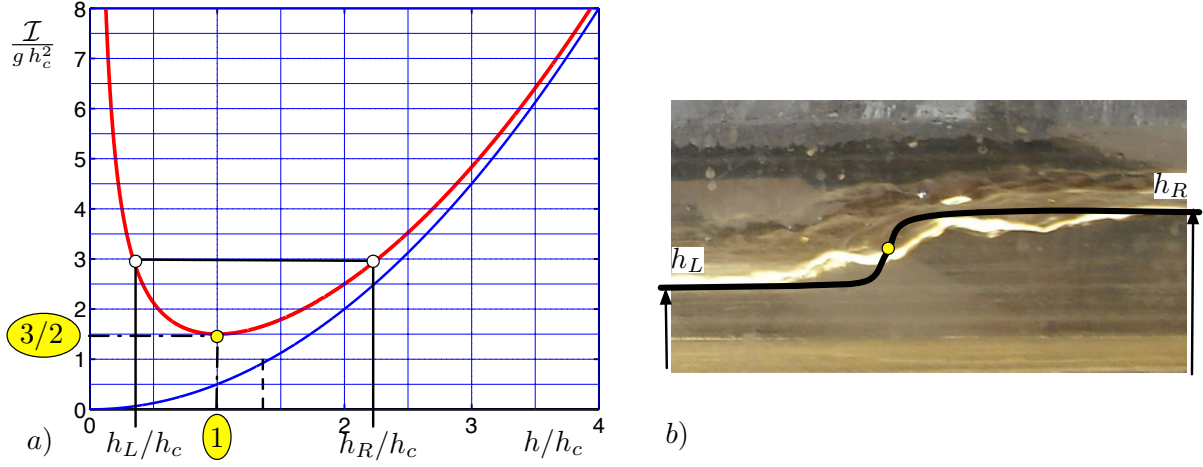


FIGURE 4.8 – a) Fonction impulsion adimensionnée $\frac{\mathcal{I}(q,h)}{g h_c^2} = \left(\frac{h}{h_c}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c}\right)^2$ avec $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Ressaut hydraulique.

a) Dimensionless impulse function $\frac{\mathcal{I}(q,h)}{h_c} = \left(\frac{h}{h_c}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c}\right)^2$ with $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Hydraulic jump.

Puisque la pression est supposée hydrostatique des deux côtés du ressaut, un bilan de quantité de mouvement sur un petit domaine englobant la discontinuité conduit à

$$h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2. \quad (4.21)$$

En éliminant U_L et U_R , on écrit cette relation sous la forme

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R), \quad (4.22)$$

où la “fonction impulsion” $\mathcal{I}(q, h)$ est définie par

$$\mathcal{I}(q, h) = h U^2 + \frac{1}{2} g h^2 = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 = \frac{g}{h} \left(h_c^3 + \frac{1}{2} h^3 \right). \quad (4.23)$$

Les deux hauteurs h_L et h_R sont appelées “hauteurs conjuguées pour l’impulsion”.

Since the pressure is supposed hydrostatic on both side of the jump, a momentum budget on a small domain including the discontinuity leads to

By eliminating U_L and U_R , one writes this relation under the form

where the “impulse function” $\mathcal{I}(q, h)$ is defined by

The two heights h_L and h_R are called “conjugated heights for the impulsion”.

Pour q fixé, le minimum de $\mathcal{I}$ est atteint pour $h = h_c$. Comme $Fr = (h_c/h)^{3/2}$, on voit donc (figure 4) que l’écoulement est supercritique ($Fr > 1$) d’un côté du ressaut et sous-critique ($Fr < 1$) de l’autre. Des considérations sur la dissipation de l’énergie entraînent que le nombre de Froude diminue dans le sens de l’écoulement.

For q fixed, the minimum of $\mathcal{I}$ is reached for $h = h_c$. Since $Fr = (h_c/h)^{3/2}$, one sees then (Figure 4) that the flow is and supercritical ($Fr > 1$) on one side of the jump subcritical ($Fr < 1$) on the other. Consideration on the energy dissipation implies that the Froude number decreased when following the flow direction.

3 Courbes de remous

On montre que le frottement moyen est proportionnel à la perte de charge linéique. Les deux grandeurs sont alors modélisées conjointement, par exemple avec la paramétrisation de Manning-Strickler. La classification des courbes de remous est utile pour décrire les solutions stationnaires.

Backwater curves

One shows that the mean friction is proportional to the lineic head loss. Both quantities are then jointly modelled, for example with the Manning-Strickler parametrization. The classification of the backwater curves is useful to describe the stationary solutions.

3.1 Perte de charge et frottements

La perte de charge linéique due au frottement de l'écoulement sur le fond est définie par

$$J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{A(s)} \underline{J} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (4.24)$$

En revenant aux équations de Navier-Stokes turbulentes (4.1), on peut écrire

$$\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \operatorname{div} \underline{R}) = -\frac{1}{\rho g} \operatorname{div} (\underline{\tau}_t) \quad , \quad \underline{\tau}_t = \rho (2\nu \underline{d} - \underline{R}) \quad , \quad (4.25)$$

où $\underline{\tau}_t$ est le tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes et $\underline{d}$ le tenseur des taux de déformation.

Friction and head loss

The lineic head loss due to the friction of the flow on the bottom is defined with

Coming back the turbulent Navier-Stokes equations (4.1), on can write

where $\underline{\tau}_t$ is the stress tensor of the viscous and turbulent forces and $\underline{d}$ the deformation rate tensor.

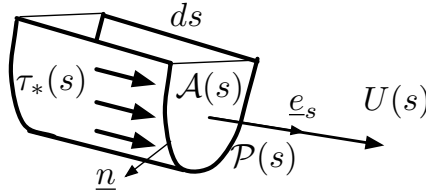


FIGURE 4.9 – Contrainte de cisaillement τ_* appliquée par l'écoulement sur les murs de périmètre mouillé P .

Shear stress τ_* applied by the flow on the walls of the wet perimeter P .

On considère un écoulement à surface libre de périmètre mouillé P . On note τ_* la contrainte de cisaillement moyenne exercée par le fluide sur le mur et définie par

One considers an open channel flow of wet perimeter P . We denote by τ_* the mean shear stress applied by the fluid on the wall and defined by

$$\frac{1}{P(s)} \int_{P(s)} \underline{e}_s \cdot \underline{\tau}_t \cdot \underline{n} dl = -\tau_*(s) \quad , \quad (4.26)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal au fond (figure 4). Lorsque l'écoulement est graduellement varié, on peut supposer que

where $\underline{n}$ is the unit vector normal the bottom (Figure 4). When the flow is gradually varying, one can assume that

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial s} (\underline{e}_s \cdot \underline{\tau}_t \cdot \underline{e}_s) dS \sim 0. \quad (4.27)$$

L'application du théorème de la divergence du tenseur $\underline{\tau}_t$ intégrée sur un petit volume de canal de longueur infinitésimale ds conduit alors, en utilisant les définitions (4.24) et (4.25) de J et $\underline{J}$, à l'importante égalité

The application of the divergence theorem to the tensor $\underline{\tau}_t$, integrated on a small channel volume of infinitesimal length ds , then leads, by using the definitions (4.24) and (4.25) of J and $\underline{J}$, to the important equality

$$\tau_* = \rho g R_H J, \quad R_H = \frac{A}{P}. \quad (4.28)$$

Grâce à cette relation, une paramétrisation de la contrainte de cisaillement τ_* fournit une paramétrisation de la perte de charge linéique J .

Thanks to this relation, a parametrization of the shear stress τ_* gives a parametrization of the lineic head loss J .

3.2 Coefficient de Strickler

Strickler coefficient

L'analyse dimensionnelle exprimant la contrainte tangentielle de cisaillement τ_* en fonction de la vitesse moyenne U , du diamètre hydraulique D_H , de la viscosité cinématique ν et de la taille caractéristique de la rugosité k_s , entraîne

The dimensional analysis expressing the tangential shear stress τ_* as a function of the mean velocity U , the hydraulic diameter D_H , the kinematic viscosity ν , the characteristic size of the roughness k_s , leads to

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2, \quad (4.29)$$

où le nombre de Reynolds Re et Ru sont définis par

where the Reynolds number Re and Ru are defined by

$$Re = \frac{U D_H}{\nu}, \quad Ru = \frac{k_s}{D_H}. \quad (4.30)$$

Les relations $\tau_* = \rho g R_H J$ entre J et τ_* , et $D_H = 4 R_H$ entre le diamètre hydraulique D_H et le rayon hydraulique R_H impliquent alors

The relations $\tau_* = \rho g R_H J$ between J and τ_* and $D_H = 4 R_H$ between the hydraulic diameter D_H and the hydraulic radius R_H then implies

$$J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H}. \quad (4.31)$$

Pour les écoulements en canaux ouverts, le nombre de Reynolds est élevé pour les applications pratiques et le fond peut donc être considéré comme rugueux. Dans ce cas, le frottement λ peut être paramétrisé par la formule de Manning-Strickler qui s'écrit

For turbulent open flow channel the Reynolds number is high for practical applications and the bottom can thus be considered as rough. In this case, the friction parameter λ can be parametrized by the Manning-Strickler formula which reads

$$\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}. \quad (4.32)$$

Pour des études pratiques dans les écoulements ouverts, la valeur $\phi_{MS} = 0.2$ est pertinente en choisissant $k_s = d_{50}$, où d_{50} est la médiane du spectre des tailles de sédiments. Une autre approche, très courante en hydraulique, consiste à considérer directement le nombre de Strickler K_s qui relie J à U et R_H à travers la formule

$$U = K_s R_H^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

En comparant la définition de K_s avec la définition de ϕ_{MS} , on obtient la relation $K_s = g^{1/2} \phi_{MS}^{-1/2} 2^{11/6} k_s^{-1/6}$.

Par exemple, on choisira $K_s = 75 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour un canal en béton et $K_s = 30 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour une rivière à fond irrégulier.

3.3 Courbes de remous

Nous considérons maintenant l'équation de quantité de mouvement stationnaire

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2}, \quad I = -\frac{dZ_f}{ds}, \quad (4.34)$$

quand $I > 0$. Contrairement au cas de l'obstacle localisé, J n'est pas négligeable sur la longueur du canal étudiée. Les solutions $h(s)$ de cette équation sont les “courbes de remous” qui donnent la réponse de la surface libre à la forme $Z_f(s)$ du fond et aux conditions aux limites en aval.

Nous considérons le cas simple d'un canal de section rectangulaire dont la largeur L est grande comparée à la profondeur h . Cette hypothèse implique $R_H = A/(L + h) \sim A/L = h$.

Nous supposons ici que la perte de charge de linéique J est paramétrisée par la formule de Manning-Strickler $U = K_s h^{2/3} J^{1/2}$ qui peut être écrite sous la forme suivante

$$J = I \left(\frac{h}{h_n} \right)^{-10/3}, \quad h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10}, \quad (4.35)$$

où h_n est appelée la “hauteur normale”. Nous remarquons que cette hauteur dépend de la pente I tandis que la “hauteur critique” h_c , définie par

For practical studies in open channel flows, the value $\phi_{MS} = 0.1$ is relevant when choosing $k_s = d_{50}$, where d_{50} is the median of the distribution spectrum of the sediment sizes. Another approach, very common in hydraulics, consists in considering directly the Strickler number K_s which links J to U and R_H through the formula

When comparing the definition of K_s with the definition of ϕ_{MS} , one obtains the relation $K_s = g^{1/2} \phi_{MS}^{-1/2} 2^{11/6} k_s^{-1/6}$.

For instance, one will choose $K_s = 75 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ for a concrete made open channel and $K_s = 30 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ for a river with irregular bottom.

Backwater curves

We now consider the stationary flow momentum equation

when $I > 0$. Contrarily to the case of the localized obstacle J is not negligible on the channel length under study. The solutions $h(s)$ of this equation are the “backwater curves” which give the response of the free surface water to the bottom shape $Z_f(s)$ and to a downstream boundary condition.

We consider the simple case of rectangular channel section of width L large compared to the depth h . This hypothesis implies $R_H = A/(L + h) \sim A/L = h$.

We suppose here that the lineic head loss J is parametrized by the Manning-Strickler formula $U = K_s h^{2/3} J^{1/2}$ which can be written in the following form

where h_n is called the “normal height”. We notice that this height depends on the slope I while the “critical height” h_c , defined by

$$Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h}\right)^3, \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}, \quad (4.36)$$

est indépendante de I . Avec ces définitions de h_n et de h_c , l'équation de quantité de mouvement stationnaire s'écrit

is independent of I . With these definitions of h_n and of h_c , the stationary momentum equation reads

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}. \quad (4.37)$$

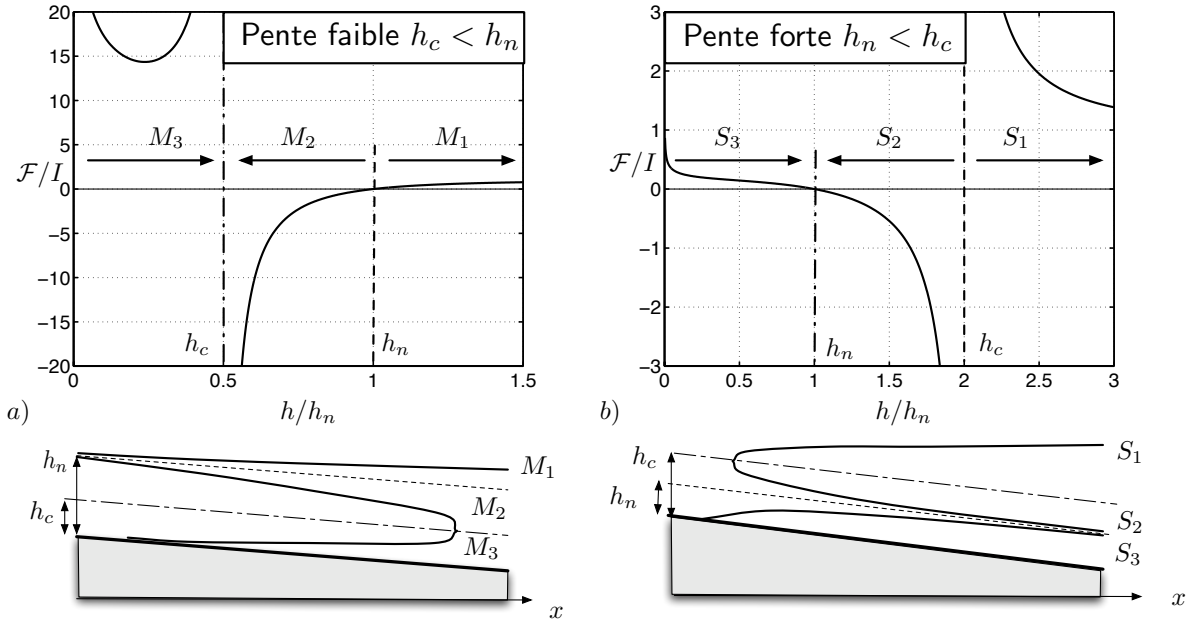


FIGURE 4.10 – Fonction $\mathcal{F}(h)$ et courbes de remous associées $h(s)$. a) Régime de faible pente $h_c < h_n$ avec des courbes de type M . b) Régime de forte pente $h_n < h_c$ avec des courbes de type S .

Function $\mathcal{F}(h)$ and associated back water curves $h(s)$. a) Weak slope regime $h_c < h_n$ with type M curves. b) Strong slope regime $h_n < h_c$ with S curves.

Pour un débit linéique donné q , la hauteur normale $h_n(I)$, définie par $I = J$, et la hauteur critique h_c , définie par $Fr = 1$, sont des quantités importantes qui peuvent être comparées entre elles pour caractériser l'écoulement en tout point. Aux points où $h_c < h_n$, l'écoulement est dans un régime de "faible pente". Le régime de "forte pente" est obtenu pour $h_n < h_c$.

For a given lineic flux q , the normal height $h_n(I)$, defined by $I = J$, and the critical height h_c , defined by $Fr = 1$, are important quantities which can be compared to each other in order to characterize the flow at every location. At the points where $h_c < h_n$, the flow is in a "weak slope" regime. The "strong slope" regime is obtained for $h_n < h_c$.

La transition entre un régime à forte pente et un régime à faible pente est obtenue en un point où la pente I est égale à la "pente critique" I_c définie par la relation $h_n(I_c) = h_c$.

The transition between a strong slope regime and a weak slope regime is obtained at a point where the slope I is equal to the "critical slope" I_c defined by the relation $h_n(I_c) = h_c$.

Une seule condition aux limites $h(s_0) = h_0$ imposée quelque part en amont ou en aval du bief (portion de canal) considéré est suffisante pour déterminer la “courbe de remous” $h(s)$. Cette courbe se raccorde avec la condition aux limites en aval ou en amont en fonction des cas.

En fonction de la position de $h(s_0) = h_0$ comparée à h_n et h_c , on obtient des courbes de remous croissantes ou décroissantes qui sont notées (M_1, M_2, M_3) dans le cas d’un régime de faible pente et (S_1, S_2, S_3) dans le cas d’un régime de forte pente (figure 4).

Le tracé de ces courbes de remous montre que des singularités apparaissent quand Fr devient égal à 1. On peut observer l’apparition d’un ressaut hydraulique avant d’atteindre la singularité $Fr = 1$. La position d’un tel ressaut hydraulique stationnaire fournit un nouveau degré de liberté au système lorsque deux conditions aux limites à l’amont et à l’aval sont imposées à la fois.

Only boundary condition $h(s_0) = h_0$ imposed somewhere downstream or upstream the considered reach (subdivision of the channel) is sufficient to determine the “backwater curve” $h(s)$. This name comes from the downstream conditions case by also applies for the upstream case.

Depending on the position of $h(s_0) = h_0$ compared to both h_n and h_c , one obtains increasing or decreasing backwater curves which are denoted by (M_1, M_2, M_3) in the case of a weak slope regime and (S_1, S_2, S_3) in the case of a strong slope regime (figure 4).

The drawing of these backwater curves show that singularities appears when Fr becomes equal to 1. On can observe the appearance of a hydraulic jump before reaching the singularity $Fr = 1$. The position of such stationary hydraulic jumps provide a new degree of freedom to the system when both an upstream and a downstream boundary conditions are imposed.

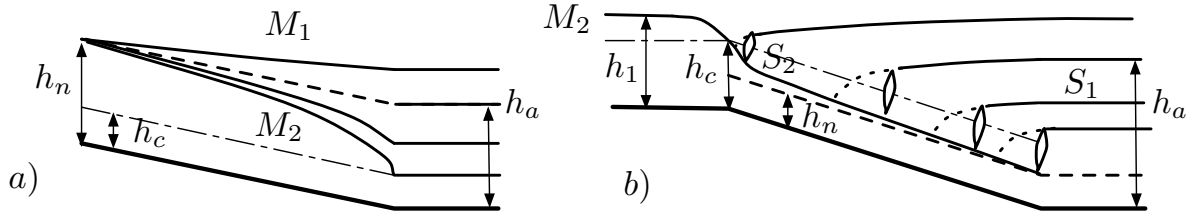


FIGURE 4.11 – *Changement de pente et courbes de remous associées. a) Régime de faible pente. b) Exemple de forte pente avec un ressaut hydraulique.*

Slope changes and associated backwater curves. a) Weak slope regime. b) Strong slope example with hydraulic jump.

Comme exemple d’application de ce concept de courbe de remous, considérons un écoulement dans un régime de faible pente ($h_c < h_n$) avec une transition vers un fond plat horizontal (figure 4a). Si la condition aux limites $h = h_a$, avec $h_c < h_a$, est imposée en aval de ce point de transition (par exemple avec un lac de grandes dimensions), on peut calculer les courbes de remous qui sont de type M_2 pour $h_c < h_a < h_n$ et de type M_1 pour $h_n < h_a$. Dans le cas d’une forte pente (figure 4b), on voit qu’un ressaut hydraulique doit apparaître pour que le profil de la surface libre puisse se raccorder à la condition aux limites aval $h = h_a$ si $h_c < h_a$.

As an example of application of this backwater concept, let us consider a flow in a weak slope regime ($h_c < h_n$) with a transition to a horizontal flat bottom (Figure 4a). If the boundary condition $h = h_a$, with $h_c < h_a$, is imposed downstream of this transition point (for instance with a lake of big size), one can compute the backwater curves which are of the M_2 type for $h_c < h_a < h_n$ and of the M_1 type for $h_n < h_a$. In the case of a strong slope (figure 4b), one sees that a hydraulic jump must appear so that the free surface profile can match with the downwards boundary condition $h = h_a$ if $h_c < h_a$.

Lorsque la pente est nulle ($I = 0$) ou négative ($I < 0$), on peut définir de nouvelles courbes de remous (C_3 et C_2 pour $I = 0$, A_3 et A_2 pour $I < 0$) en utilisant un raisonnement similaire au cas des pentes positives à partir de l'équation (4.34).

When the slopes vanishes ($I = 0$) or is negative ($I < 0$), one can define new backwater curves (C_3 and C_2 for $I = 0$, A_3 and A_2 for $I < 0$) by using an argument similar to the case of positive slope from Equation (4.34).

FORMULAIRE

FORMULAS

Charge hydraulique

Hydraulic head

Charge locale :

Local head :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2 .$$

Paramètres géométriques :

Geometric parameter :

$$R_H = \frac{A}{P} \quad , \quad D_H = 4 R_H \quad , \quad h_H = \frac{A}{L} .$$

Charge moyenne :

Averaged head :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + h(s) + Z_f(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} .$$

Charge spécifique et impulsion

Specific head and impulsion

Perte de charge linéique :

Lineic head loss :

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad , \quad H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g} .$$

Équation d'équilibre :

Equilibrium equation :

$$q = U h \quad , \quad \frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} .$$

Charge spécifique :

Specific charge :

$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2} \quad , \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} .$$

Ressaut stationnaire :

| Stationary hydraulic jump :

$$U_L h_L = U_R h_R = q \quad , \quad h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 .$$

Fonction impulsion :

| Impulse function :

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(q, h) = h U^2 + \frac{1}{2} g h^2 = \frac{g}{h} \left(h_c^3 + \frac{1}{2} h^3 \right) .$$

Courbes de remous**Backwater curves**

Frottements :

| Friction :

$$J = -\frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho g} \operatorname{div}(\underline{\tau}) \cdot \underline{e}_s \, da \quad , \quad \tau_* = -\frac{1}{P} \int_{\mathcal{P}} \underline{e}_s \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dl .$$

Coefficient λ :| Coefficient λ :

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2 \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad , \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} .$$

Perte de charge :

| Head loss :

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad \implies \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2 g D_H} .$$

Coefficient de Strickler :

| Strickler coefficient :

$$U = K_s R_H^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}} .$$

Courbes de remous :

| Backwater curves :

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad , \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad , \quad h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10} .$$

EXERCICES**EXERCICE 4.1****Écoulement sur un obstacle**

On dispose d'un canal de largeur L et de débit constant Q . On note $q = Q/L$ le débit linéique, h la hauteur de la couche d'eau et U sa vitesse. Les abaques de la figure 4.12 permettent d'estimer graphiquement la charge spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2}$ et l'impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2$ en fonction de q et h .

- 1) Montrer que $\mathcal{E}(q, h)$ et $\mathcal{I}(q, h)$ ont le même minimum h_c , appelé “hauteur critique”, pour un débit donné. On suppose que $h_c = 5$ cm. Déterminer le débit linéique q correspondant à partir des abaques. Exprimer le nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{gh}$ en fonction de h_c/h . Identifier les régimes sous-critiques et supercritiques.

Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 1 - \frac{q}{gh^3}$ et $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial h} = -\frac{q^2}{h^2} + gh$ s'annulent pour $h_c = (q^2/g)^{1/3}$. Si $h_c = 5$ cm, on a donc $q = \sqrt{gh_c^3} = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. Comme $q = Uh$, on a $Fr = U/\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{q^2}{gh^3}} = (h_c/h)^{3/2}$. Le régime est supercritique ($Fr > 1$) pour $h < h_c$ et sous-critique ($Fr < 1$) pour $h > h_c$.

On considère un obstacle de forme gaussienne dont la hauteur est donnée par $Z_f(x) = a e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec $a = 3$ cm et $\sigma = 20$ cm. On dispose, “loin” en amont de l'obstacle (par exemple à 1 m), une vanne de fond dont l'ouverture, réglable, est notée e (voir figure 4.13). Pour un débit donné ($h_c = 5$ cm) on cherche à décrire les régimes d'écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de e en négligeant toutes les pertes de charges.

- 2) Pour $e = 2.5$ cm, on observe deux régimes tels que la hauteur h_v de la couche d'eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 4.13). À l'aval de cette vanne, cette hauteur est $h_1 = e$ pour le premier régime et h_2 pour le second. Déterminer, à l'aide des abaques, la charge spécifique commune aux deux régimes ainsi que h_v et h_2 . En déduire U_1 et U_2 . Pour chacun des régimes, tracer, sur la figure 4.12a, des segments verticaux indiquant la valeur de l'énergie potentielle h et de l'énergie cinétique $U^2/(2g)$ dont la somme est la charge spécifique $\mathcal{E}$. Déterminer graphiquement ces valeurs.

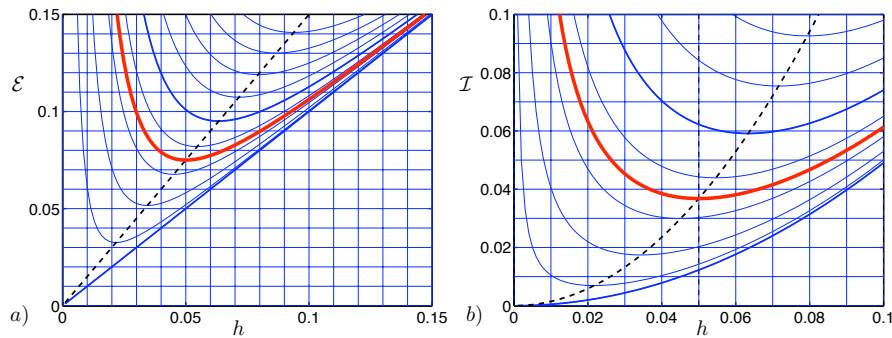


FIGURE 4.12 – a) Énergie spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2} = \frac{1}{2h^2} (2h^3 + h_c^3)$ et b) Impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{q}{h} (h_c^3 + \frac{1}{2}h^3)$. Intervalle entre les iso- q : $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. En rouge : cas $h_c = 5$ cm.

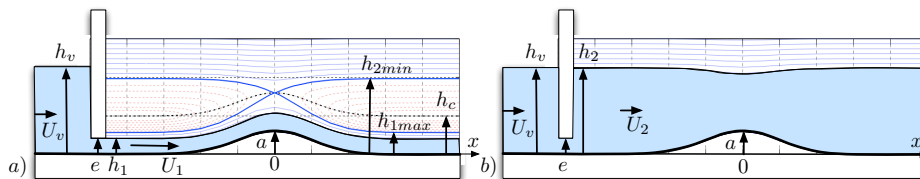


FIGURE 4.13 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture e de vanne.

La conservation de la charge entraîne que $H = \frac{p_a}{\rho g} + h_v + \frac{U_v^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$ et donc $\mathcal{E}(q, h_v) = \mathcal{E}(q, h_1) = \mathcal{E}(q, h_2) = 12.5$ cm en utilisant $q = hU$. Les hauteurs $h_1 = e = 2.5$ cm et $h_2 = h_v = 12$ cm sont donc conjuguées pour la charge spécifique. On en déduit $U_1 = q/h_1 = 1.4$ m/s et $U_2 = 30$ cm/s. En traçant sur le graphe la droite $\mathcal{E} = h$ (qui est aussi l'asymptote des courbes iso- q), on peut reporter un segment de longueur $h_1 = 2.5$ cm pour le régime a) et $h_2 = 12$ cm pour le régime b), surmonté, respectivement, d'un segment de longueur $U_1^2/(2g) = 10$ cm ou $U_2^2/(2g) = 0.5$ cm.

- 3) Montrer que la coexistence de deux tels régimes n'est possible que pour $e < h_{1max}$ et, en conséquence, $h_v > h_{2min}$ où h_{1max} et h_{2min} sont des valeurs que l'on précisera. Tracer les profils de la surface libre pour tous ces régimes. Que se passe-t-il si $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement.

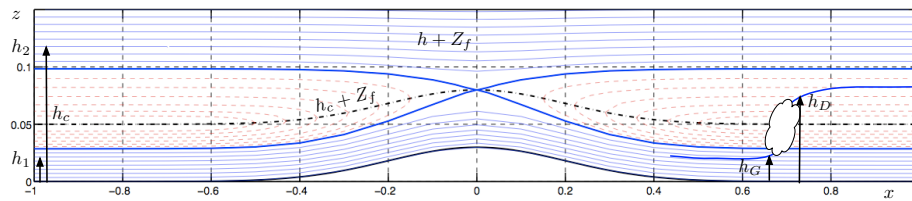


FIGURE 4.14 – Trajectoires possibles pour un débit donné.

On a $\mathcal{E}(q, h_{1max}) = \mathcal{E}(q, h_{2min}) = \mathcal{E}(q, h_c) + a$. On en déduit, à partir de l'abaque, que $h_{1max} = 2.8$ cm et $h_{2min} = 9.8$ cm. En utilisant l'abaque de la charge spécifique, on peut tracer les courbes de remous que l'on peut comparer à la solution numérique de la figure 4.14. Pour $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$, le régime est bloqué sur la courbe qui part de $h = h_{2min} = 9.8$ cm au voisinage de la vanne, dont le régime est sous-critique ($Fr < 1$) pour $x < 0$ et supercritique ($Fr > 1$) pour $x > 0$ (voir figure 4.15).

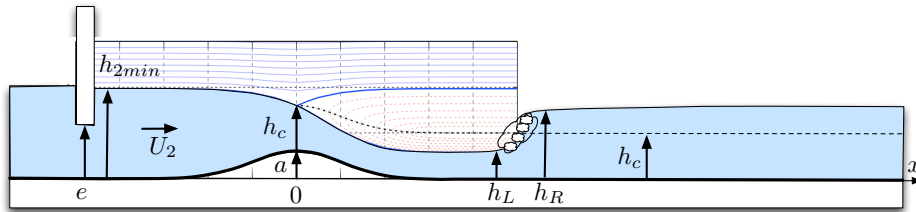


FIGURE 4.15 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique

- 4) On suppose que $e \geq h_{1max}$ et que l'écoulement est donc critique en $x = 0$. Que vaut h en $x = 0$? On observe un ressaut hydraulique "loin" (par exemple à 1 m) en aval de l'obstacle. Déterminer, à l'aide des abaques, les hauteurs h_L et h_R de part et d'autre du ressaut. Déterminer graphiquement la perte de charge à travers le ressaut. Commenter.

On $h = h_c$ en $x = 0$. "Loin" en aval de l'obstacle, on a $h_L = h_{1max} = 2.8$ cm. Comme l'impulsion est conservée à travers le ressaut, on lit sur l'abaque 4.12b que $\mathcal{I} = 0.047$ m³ s⁻² et $h_R = 8$ cm. Sur l'abaque 4.12a, on lit $\mathcal{E}(q, h_L) = 10.5$ cm et $\mathcal{E}(q, h_R) = 9$ cm. Il y a donc une perte de charge $\Delta H = \mathcal{E}(q, h_L) - \mathcal{E}(q, h_R) = 1.5$ cm due à la turbulence intense du ressaut.

On suppose que l'effet des parois peut être modélisé par une formule de Manning-Strickler $J = U^2 K_s^{-2} h^{-4/3}$ où le nombre de Strickler "équivalent" est $K_s = 100$ m^{1/3} s⁻¹ (le vrai Strickler ferait intervenir le rayon hydraulique R_H qui est différent de h lorsque le canal est étroit).

- 5) On suppose que l'obstacle est maintenant un triangle de hauteur $a = 3$ cm et de demi-base $l = 30$ cm (voir figure 4.16) et que la pente du canal est $I = 0.001$ en dehors de l'obstacle.

À l'aide de l'abaque de la figure 4.17, déterminer la hauteur normale $h_n = [q^2/(I K_s^2)]^{3/10}$ sur toutes les parties du canal où $I > 0$. En déduire une description des courbes de remous de la photographie.

On a $h_n = 1.7$ cm pour la rampe de pente $I = a/l = 0.1$ et $h_n = 6.7$ cm lorsque $I = 0.001$. Le régime est en forte pente ($h_n < h_c$) sur la rampe et en faible pente ($h_c < h_n$) sinon. On en déduit les courbes de remous M_2 , S_2 , M_3 et M_1 .

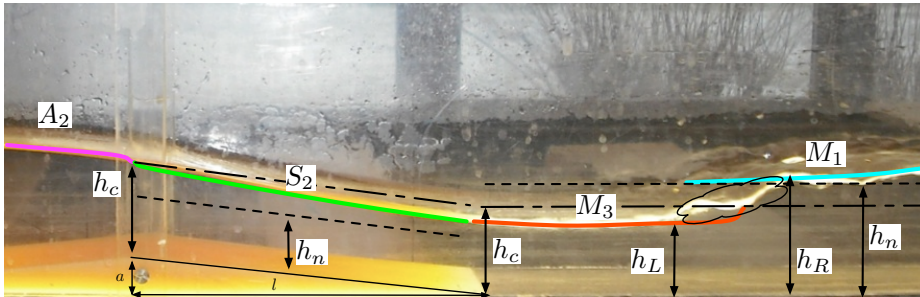


FIGURE 4.16 – Courbes de remous d'un passage critique suivi d'un ressaut.

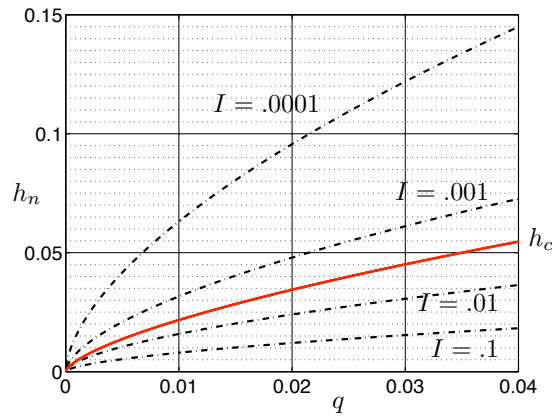


FIGURE 4.17 – Tracé de $h_n = [q^2/(I K_s^2)]^{3/10}$ et $h_c = (q^2/g)^{1/3}$ en fonction de q pour $K_s = 100$.