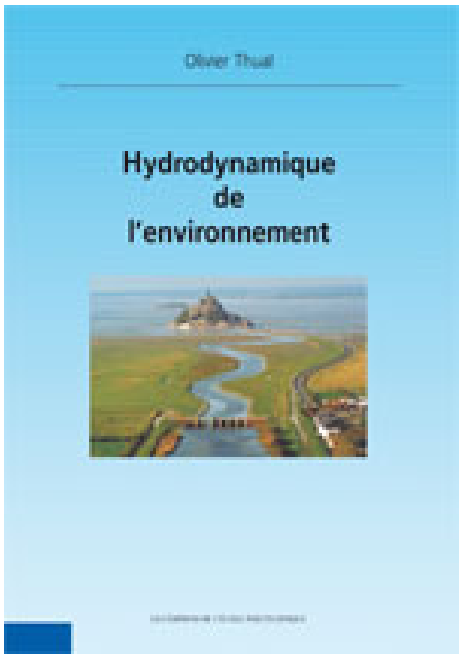
Exercices supplémentaires du chapitre :

Intumescences et resssauts



O. Thual, 13 avril 2020

EXERCICE 6.4 Mascaret du Mont Saint-Michel

Lorsque le coefficient de la marée est suffisamment fort (vives-eaux), on observe, dans la baie du Mont Saint-Michel, un mascaret qui remonte la rivière du Couesnon. On modélise cette rivière par un canal sans pente à section rectangulaire de largeur $L = 50$ m considérée comme grande devant la profondeur. On suppose que $h_0 = 40$ cm et $Q_0 = 10$ m^3/s sont respectivement la hauteur et le débit de cette rivière à marée basse. On prendra $g = 9.81$ m^2/s pour le champ de gravité.

1) Calculer, à marée basse, le débit linéique $q_0 = Q_0/L$ et la vitesse U_0. L'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ?

On a $q_0 = Q_0/L = 0.2$ m^2/s et $U_0 = q_0/h_0 = 0.5$ m/s. Comme le nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{g\,h_0} = 0.25$ est plus petit que 1, l'écoulement est fluvial.

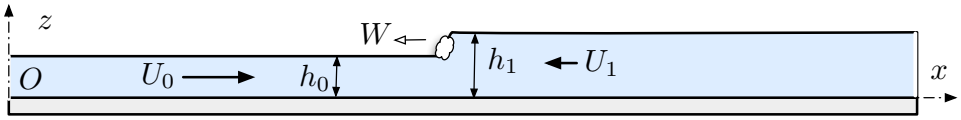


FIGURE **6**.21 – Mascaret de grande marée remontant la rivière du Couesnon.

2) On note respectivement h_1 et U_1 la hauteur et la vitesse de l'écoulement à l'aval d'un mascaret qui remonte la rivière avec une vitesse W négative. Écrire les relations de saut qui relient h_0, U_0, h_1, U_1 et W. En déduire que $\mathcal{I}(q_W, h_0) = \mathcal{I}(q_W, h_1)$ où $q_W = h_0\,(U_0 - W)$ et $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + g\,h^2/2$ est la fonction impulsion.

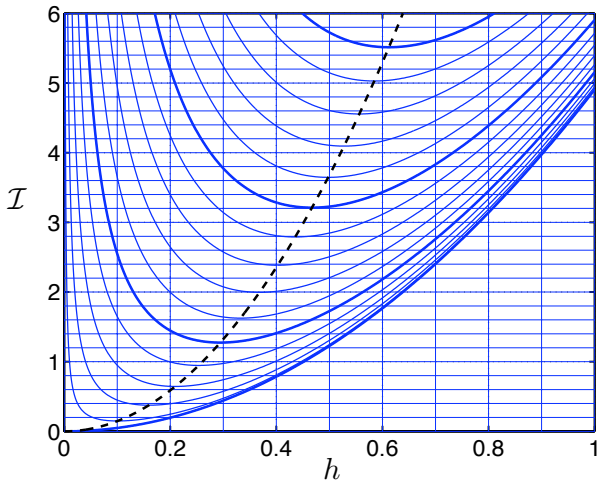


FIGURE **6**.22 – Fonction impulsion $\mathcal{I}(q, h)$. Unités de h en m. Intervalle entre les iso-q de 0.1 m^2/s.

Les relations de saut s'écrivent $h_0\,(U_0 - W) = h_1\,(U_1 - W)$ pour la conservation de la masse et $h_0\,U_0\,(U_0 - W) + \frac{1}{2}\,g\,h_0^2 = h_1\,U_1\,(U_1 - W) + \frac{1}{2}\,g\,h_1^2$ pour la conservation de la quantité de mouvement. En éliminant $U_0 = W + q_W/h_0$ et $U_1 = W + q_W/h_1$, on obtient $q_W^2/h_0 + \frac{1}{2}\,g\,h_0^2 + h_0\,(U_0 - W)\,W = q_W^2/h_1 + \frac{1}{2}\,g\,h_1^2 + h_1\,(U_1 - W)\,W$. En utilisant la première relation de saut, cette dernière s'écrit bien $\mathcal{I}(q_W, h_0) = \mathcal{I}(q_W, h_1)$.

3) Avec un chronomètre, on mesure la vitesse de propagation $W = -2.5$ m/s. En déduire, à l'aide de l'abaque de la figure **6**.22, la hauteur h_1 et la vitesse U_1 de l'écoulement de marée haute situé à droite du mascaret.

On calcule $q_W = h_0(U_0 - W) = 1.2$ m^2/s. À l'aide de l'abaque, on trouve que la hauteur $h_1 = 70$ cm correspond à la même impulsion. On en déduit $U_1 = W + q_W/h_1 = -0.8$ m/s.

EXERCICE 6.5 Écluse mobile et plage

On considère les équations en eaux peu profondes 2D et sans frottement

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial x}(h + Z_f) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(U\,h) = 0\,, \qquad (\mathbf{6}.31)$$

où x est ici la coordonnée horizontale, z la coordonnée verticale, $U(x,t)$ la vitesse moyenne dans la direction x, $h(x,t)$ la hauteur de la couche d'eau dans la direction z et $Z_f(x)$ la côte du fond. On note $P(x) = Z_f'(x)$ la "pente" qui est positive lorsque la côte du fond augmente avec x.

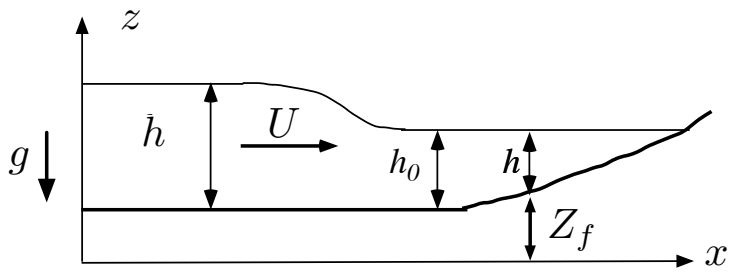


FIGURE **6**.23 – Géométrie du problème.

1) En appliquant la méthode matricielle de détermination des caractéristiques et des relations de compatibilité associées, montrer que l'on peut écrire $\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_\pm} J_\pm = g\,P(x)$ avec les fonctions de Riemann $J_\pm = U \pm \sqrt{g\,h}$, où les courbes caractéristiques $C_\pm$ sont définies par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{C_\pm} = U \pm \sqrt{g\,h}$.

On cherche les valeurs de λ qui rendent singulier le système

$$\begin{cases} U_t & +U\,U_x & & +g\,h_x & = & 0 \\ & +h\,U_x & +h_t & +U\,h_x & = & g\,P \\ U_t & +\lambda\,U_x & & & = & \left(\frac{dU}{dt}\right)_C =: U' \\ & & +h_t & +\lambda h_x & = & \left(\frac{dh}{dt}\right)_C =: h' \end{cases} \text{, d'où } \begin{vmatrix} 1 & U & 0 & g \\ 0 & h & 1 & U \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} h & 1 & U \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} - U \begin{vmatrix} 0 & 1 & U \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} 0 & h & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda - U) + U(\lambda - U) + g\,h = -(\lambda - U)^2 + g\,h \quad = \quad 0 \\ &\qquad\qquad \text{d'où} \qquad \lambda_\pm \quad = \quad U \pm \sqrt{g\,h}\,. \end{aligned}$$

La relation de compatibilité s'obtient en écrivant, par exemple (second membre dans la deuxième colonne),

$$\begin{vmatrix} 1 & g\,P & 0 & g \\ 0 & 0 & 1 & U \\ 1 & U' & 0 & 0 \\ 0 & \zeta' & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & U \\ U' & 0 & 0 \\ \zeta' & 1 & \lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & u' & 0 \\ 0 & \zeta' & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cette équation s'écrit $-U'(\lambda - U) + g\,P\,(\lambda - U) - g\,h' = 0$. On a donc $\pm\sqrt{g\,h}\left(\frac{dU}{dt}\right)_{C_\pm} + g\left(\frac{dh}{dt}\right)_{C_\pm} = \pm g\,P$, ce qui s'écrit encore $\left(\frac{dU}{dt}\right)_{C_\pm} \pm \sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{dh}{dt}\right)_{C_\pm} = g\,P$. On en déduit $\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_\pm}\left(U \pm \sqrt{g\zeta}\right) = g\,P$, d'où les fonctions de Riemann $J_\pm(U, h) = U \pm 2\sqrt{g\,h}$.

On considère un canal de cote Z_f constante fermé en $x = 0$ par une frontière. Initialement, la couche fluide, de profondeur h_0 et de vitesse $U_0 = 0$, est située du côté $x \geq 0$. À $t = 0$, la frontière est dotée brutalement de la vitesse uniforme $U_2 < 0$ et met ainsi en mouvement le fluide situé sur sa droite. On observe donc une onde simple de détente centrée (région (1)) comprise entre une région d'écoulement uniforme de hauteur h_2 et de vitesse U_2 (région (2)) et une région uniforme associée à la condition initiale h_0 et $U_0 = 0$ (région (0)).

2) Montrer que la région (1) est délimitée par les deux droites d'équations $x = c_0\,t$ et $x = (c_2 + U_2)\,t$, avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$ et $c_2 = \sqrt{gh_2}$.

La région (1) est une onde simple car adjacente à un écoulement uniforme. Les C_+ sont donc des droites d'équation $x = (U + c)\,t$. Les droites $x = c_0\,t$ et $x = (c_2 + U_2)\,t$ délimitent donc la région (1).

3) En reliant les régions (2) et (0) par des courbes caractéristiques, montrer

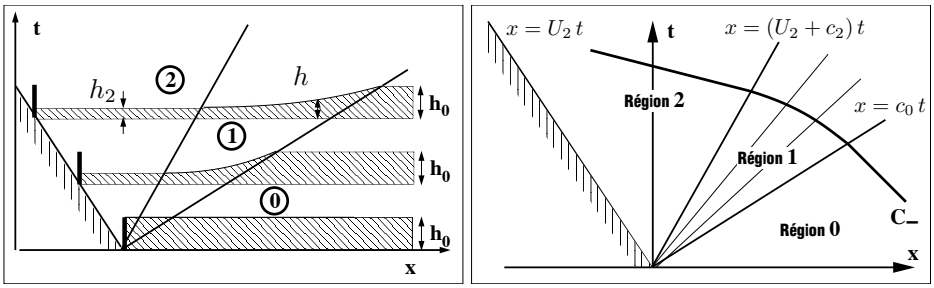


FIGURE **6**.24 – Onde détente provoquée par le mouvement de la frontière.

que $h_2 = \frac{1}{g}\left(c_0 + \frac{U_2}{2}\right)^2$.

Le long d'une C_-, l'expression de l'invariant de Riemann J_- conduit à l'égalité $J_- = U_2 - 2\sqrt{g\,h_2} = -2\sqrt{g\,h_0}$ ce qui entraîne $\sqrt{g\,h_2} = c_0 + \frac{1}{2}U_2$ et donc $h_2 = \frac{1}{g}\left(c_0 + \frac{1}{2}U_2\right)^2$.

4) Montrer que dans la région (1) correspondant à l'onde centrée, on a $U(x,t) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{t} - c_0\right)$ et $\sqrt{g\,h(x,t)} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{t} + 2c_0\right)$.

Dans l'onde centrée on a

$$\begin{cases} x = [U(x,t) + c(x,t)]t & \text{équation d'une } C_+ \\ U(x,t) - 2\,c(x,t) = -2\,c_0 & \text{invariance de } J_- \end{cases}$$

On en déduit $U(x,t) = \frac{2}{3}\frac{x}{t} - \frac{2}{3}c_0$ et $c(x,t) = \frac{1}{3}\frac{x}{t} + \frac{2}{3}c_0$ avec $c(x,t) = \sqrt{g\,h(x,t)}$.

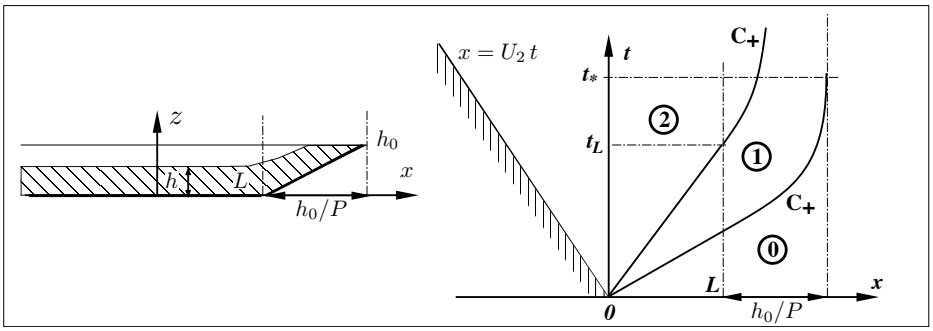


FIGURE **6**.25 – Ralentissement de l'onde de détente centrée par le fond.

On suppose maintenant que la côte $Z_f(x)$ du fond du canal n'est pas constante et qu'elle est telle que la couche fluide au repos vérifie $h(x) = h_0$ pour $x \leq L$ et $h(x) = h_0 - P(x - L)$ pour $L \leq x \leq L + h_0/P$.

5) Montrer que la courbe délimitant les régions (0) et (1) pour $x \geq L$ est la parabole d'équation $x = L + h_0/P - g\,P\,(t - t_*)^2/4$.

Les régions (0) et (1) sont délimitées par le prolongement de la caractéristique $x = c_0\,t$ au-delà de $x = L$. Dans cette zone où le fond est incliné, cette courbe est définie par $\dot{x} = U + c = c = \sqrt{g\,h(x)} = \sqrt{g}\sqrt{h_0 - P\,(x - L)}$. On en déduit $\frac{dx}{\sqrt{h_0 - P\,(x-L)}} = \sqrt{g}$, d'où $-\frac{2}{P}\sqrt{h_0 - P\,(x - L)} = \sqrt{g}(t - t_*)$ avec t_* issu de la constante d'intégration. On a donc $x(t) = L + \frac{h_0}{P} - \frac{g\,P}{4}(t - t_*)^2$. En écrivant que $x(t_L) = L$ avec $t_L = L/c_0$, on obtient $t_* = t_L + \frac{2}{P}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$. On vérifie que l'on a bien $x = L + h_0/P$ pour $t = t_*$.