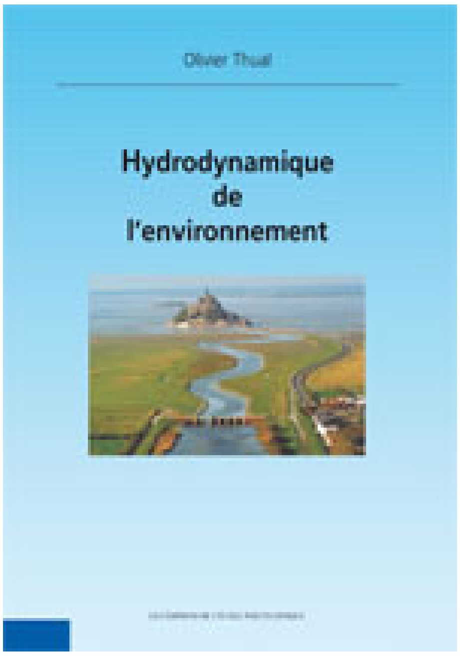
Exercices supplémentaires du chapitre :

Ondes de crues



O. Thual, 13 avril 2020

EXERCICE 5.4 Modèles de l'équation de Burgers

On considère le modèle décrit par la fonction $h(x,t)$ continue ou discontinue tel que pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$ on puisse écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} h\, dx + \frac{1}{2}\left[h^2\right]_{x_1}^{x_2} = 0 \ . \qquad (\mathbf{5}.1)$$

1) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Calculer la vitesse $W(t) = \dot{x}_c(t)$ d'un choc séparant une région uniforme $h(x,t) = h_1$ pour $x < x_c(t)$ d'une région uniforme $h(x,t) = h_2$ pour $x > x_c(t)$.

> Le bilan local est $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^2\right) = \frac{\partial h}{\partial t} + h\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$. La relation de saut est $-W[\![h]\!] + \frac{1}{2}[\![h^2]\!] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{1}{2}\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2 - h_1} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$. C'est la moyenne des vitesses h_1 et h_2.

2) Répondre aux deux questions précédentes en considérant le nouveau modèle régi par l'équation $\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} h^2\ dx + \frac{2}{3}\left[h^3\right]_{x_1}^{x_2} = 0$. On suppose ici que $h_1 + h_2 \neq 0$. Comparer avec le modèle précédent.

> Le bilan local est $\frac{\partial}{\partial t}\left(h^2\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\right) = 2\,h(\frac{\partial h}{\partial t} + h\ \frac{\partial h}{\partial x}) = 0$. La relation de saut est $-W[\![h^2]\!] + \frac{2}{3}[\![h^3]\!] = 0$. La vitesse du choc est $W = \frac{3}{2}\frac{h_1^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2} = \frac{2}{3}\frac{h_1^2 + h_1\,h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2}$. Les deux modèles correspondent au même bilan local mais diffèrent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même.