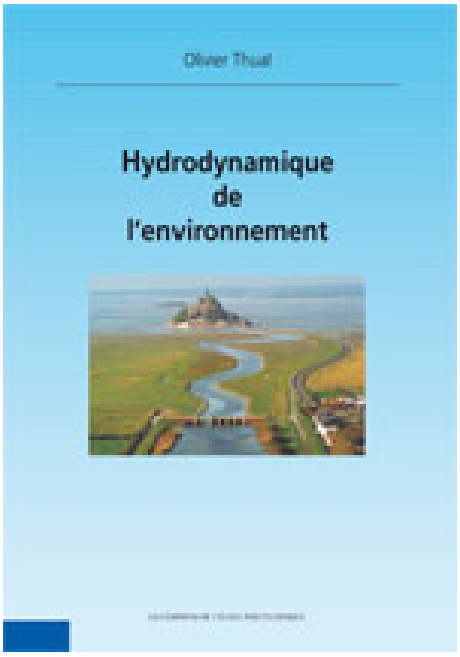
Exercices supplémentaires du chapitre :

Hydraulique à surface libre



O. Thual, 13 avril 2020

EXERCICE 4.2 Courbes de remous et ressauts

On considère un canal vitré de section rectangulaire et de largeur $L = 6$ cm. Un écoulement stationnaire à surface libre le traverse avec le débit constant $Q = 6$ l/s. On note $q = Q/L$. On suppose que la hauteur d'eau et la vitesse moyenne peuvent être modélisées par les fonctions $h(x)$ et $U(x)$ qui ne dépendent pas de y. On suppose que l'effet des parois peut être modélisé par une formule de Manning-Srickler $J = U^2\, K_s^{-2}\, h^{-4/3}$ où le nombre de Strickler "équivalent" est $K_s = 100$ m$^{1/3}$ s^{-1} (le vrai nombre de Strickler ferait intervenir le rayon hydraulique R_H qui est différent de h si le canal est étroit).

1) Exprimer le débit q en fonction de $h(x)$ de $U(x)$. Exprimer le nombre de Froude $Fr(x) = \frac{U(x)}{\sqrt{g\, h(x)}}$ en fonction de q et $h(x)$. On note $z = Z_f(x)$ l'équation du fond et on suppose que la pente $I(x) = -Z_f'(x)$ est petite. Exprimer la charge moyenne $H(x)$ d'une section du canal en fonction de $h(x)$, $U(x)$ et la pression atmosphérique p_a. Exprimer $H'(x)$ en fonction de $Fr(x)$, $I(x)$ et $h'(x)$. Exprimer la perte de charge linéique J en fonction de $h(x)$, q et K_s. En déduire que $h'(x) = \mathcal{F}[h(x)]$ où $\mathcal{F}(h)$ est un fonction que l'on explicitera. Exprimer J, Fr puis $\mathcal{F}$ en fonction de la hauteur normale $h_n = \left(\frac{q^2}{I\, K_s^2}\right)^{3/10}$ et de la hauteur critique $h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$.

On a $h(x)\, U(x) = q$, $Fr(x) = q\, g^{-1/2}\, h^{-3/2}$ et $H(x) = Z_f(x) + \frac{p_a}{\rho\, g} + h + \frac{U^2(x)}{2\, g}$. On en déduit $h'(x)/h(x) + U'(x)/U(x) = 0$ et $H'(x) = -I(x) + \frac{U(x)}{g} U'(x) = -I(x) + h'(x) - Fr^2(x)\, h'(x)$. Comme $H'(x) = J$, on obtient $h'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{1 - Fr^2(x)}$. On a $J(x) = q^2/\left(K_s^2\, h^{10/3}\right) = (h/h_n)^{-10/3}$, $Fr = (h/h_c)^{-3}$ et donc $\mathcal{F}(h) = I\ \frac{1-(h/h_n)^{-10/3}}{1-(h/h_c)^{-3}}$.

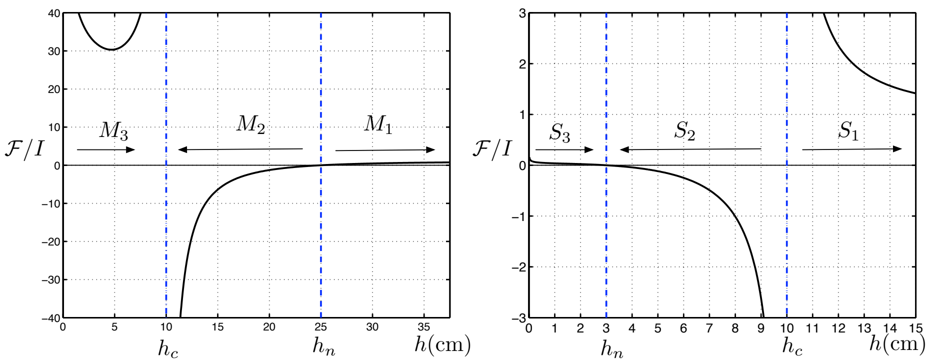


FIGURE 4.18 – Courbes $\mathcal{F}/I$ en fonction de h. a) $h_c = 10$ cm et $h_n = 25$ cm. b) $h_c = 10$ cm et $h_n = 3$ cm.

2) On suppose que la pente du canal est constante et vaut $I_c = 0.0001$. Calculer les hauteurs normale h_n et critique h_c correspondantes. En déduire la pente de la surface libre pour les hauteurs d'eau $h \in \{8, 12, 35\}$ cm. Indiquer le nom des courbes de remous passant par ces hauteurs ainsi que le caractère fluvial ou torrentiel de l'écoulement dans leur voisinage.

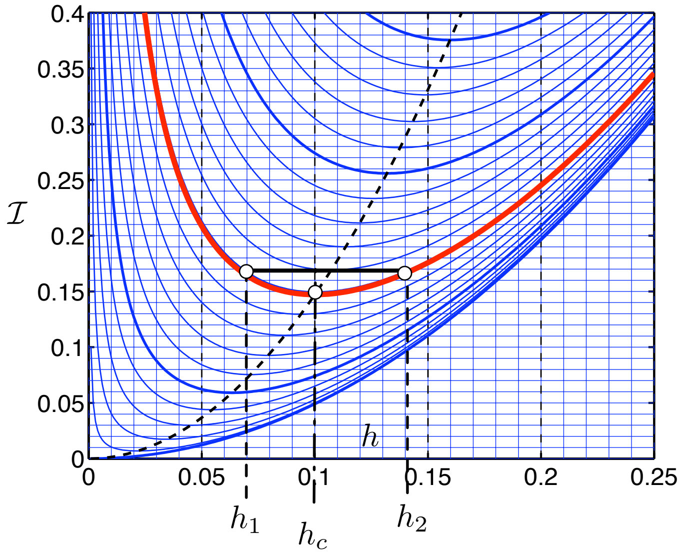


FIGURE **4**.19 – Impulsion $\mathcal{I}(q,h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}\, g\, h^2$ en fonction de h pour différentes valeurs de $q = Q/L$ par pas de 0.01 m^2/s.

La hauteur normale est $h_n = \left(\frac{q^2}{I\, K_s^2}\right)^{3/10} \sim 25$ cm. La hauteur critique est $h_c = \left(q^2/g\right)^{1/3} \sim 10$ cm. La pente de la surface libre est $\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I_c\, \frac{1-(h/h_n)^{-10/3}}{1-(h/h_c)^{-3}}$ et vaut $\{0.005, -0.003, 7.\ 10^{-5}\}$. Ces pentes sont respectivement celles de courbes M_3, M_2 et M_1 (voir figure **4**.18). Seule la courbe M_3 est torrentielle ($h < h_c$).

3) Il se forme un ressaut à une distance de l'aval du triangle de l'ordre de la dizaine de cm. On observe que $h = 7$ cm à l'amont du ressaut. Estimer la valeur de la hauteur d'eau à l'aval du ressaut.

En lisant l'abaque de la courbe d'impulsion $\mathcal{I}(q,h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}\, g\, h^2$ avec $q = 0.1$ m^2/s, on trouve $h \sim 14$ cm.

EXERCICE 4.3 Partage des eaux

On souhaite mettre en place un système hydraulique simple permettant de partager un débit d'eau en deux sous-débits dans une proportion contrôlable. On modélise le système par un canal dont le fond est schématisé sur la figure **4**.20 et dont la largeur L dans la direction y est constante. On note $q = Q/L$ le débit linéique associé à un débit $Q \geq 0$. On note respectivement U et h la vitesse moyenne et la hauteur d'eau en un point quelconque. Les valeurs numériques demandées pourront être données avec la précision d'une lecture graphique des abaques.

On injecte un débit linéique constant $q_0 > 0$ au centre du canal en $x = 0$. Une partie $q_a \geq 0$ de ce débit linéique franchit un obstacle de hauteur $a = 36$ cm dont le sommet est situé en $x = x_a < 0$ tandis que l'autre partie $q_e \geq 0$ coule sous une vanne de fond dénoyée d'ouverture e située en $x = x_e > 0$. On suppose que $|x_a|$ et x_e sont suffisamment grands et les pentes suffisamment petites pour

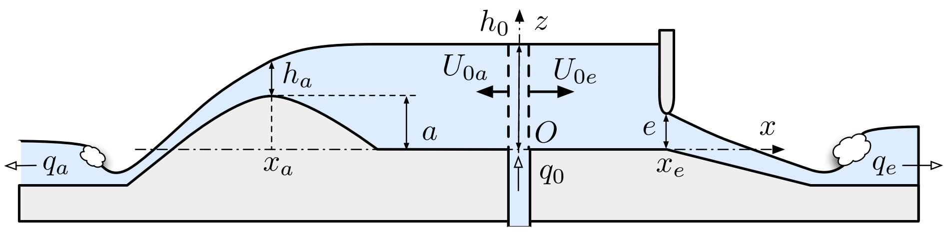


FIGURE **4**.20 – Géométrie du canal de partage des eaux.

que l'écoulement puisse être considéré comme graduellement varié. En $x = 0$, on suppose que $h = h_0$ et que la vitesse U est discontinue en $x = 0$ avec $U = U_{0a} \leq 0$ pour $x = 0^-$ et $U = U_{0e} \geq 0$ pour $x = 0^+$ avec $q_a = h_0\,|U_{0a}|$, $q_e = h_0\,U_{0e}$ et $q_0 = q_a + q_e$.

On cherche à exprimer le rapport $X = q_a/q_0$ en fonction de l'ouverture réglable e. On suppose que l'écoulement est supercritique sur les deux rampes situées respectivement à gauche du sommet de l'obstacle et à droite de la vanne, et sous-critique pour $x \in]x_a, x_e[$. On néglige toutes les pertes de charges dues au frottement sur les parois. On prendra $g = 9.81$ m/s^2 pour le champ de gravité.

10) D'où provient la relation $\frac{dh}{dx} = I\,(1 - Fr^2)^{-1}$ où I est la pente du fond et $Fr = |U|/\sqrt{g\,h}$ le nombre de Froude ? Justifier la transition fluviale à torrentielle au sommet de l'obstacle en $x = x_a$. En déduire l'expression de q_a en fonction de h_a et g.

En négligeant la perte de charge, la conservation de la charge conduit à la relation indiquée. Comme la pente change de signe au sommet de l'obstacle et que le signe de $\frac{dh}{dx}$ reste inchangé, le nombre de Froude est supérieur à 1 (fluvial) à droite du sommet et inférieur à 1 (torrentiel) à gauche. On en déduit que h_a est la hauteur critique associée au débit linéique $q_a = \sqrt{g\,h_a^3}$.

11) Montrer que la charge spécifique $\mathcal{E}(q_a, h) = h + q_a^2/(2\,g\,h^2)$ est minimum en $x = x_a$ sur l'intervalle $[x_a, 0[$ et simplifier son expression en ce point. En déduire que $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3\,h_a/2$.

Comme la charge spécifique est minimum pour la hauteur critique et vaut la hauteur critique multipliée par 3/2, on a $\mathcal{E}(q_e, h_a) = 3\,h_a/2$. Comme la charge $H = \frac{p_a}{\rho\,g} + Z_f + \mathcal{E}(q_e, h)$ est constante sur l'intervalle $x \in [x_a, 0[$, on peut écrire $\mathcal{E}(q_e, h_0) = a + \mathcal{E}(q_e, h_a) = a + 3\,h_a/2$.

12) On suppose que la vanne est immergée. Que peut-on dire de la charge spécifique $\mathcal{E}(q_e, h)$ pour $h = h_0$ et $h = e$? Exprimer le débit linéique q_e en fonction de g, h_0 et e.

Comme il n'y a pas de perte de charge au passage de la vanne immergée, on a $\mathcal{E}(q_e, h_0) = \mathcal{E}(q_e, e)$. On en déduit $q_e = e\,h_0\,\sqrt{2\,g/(h_0 + e)}$.

13) Dans un premier temps, on ferme complètement la vanne, ce qui s'écrit $e = 0$ cm, et l'on mesure $h_a = 16$ cm. Déterminer, à l'aide de l'abaque de

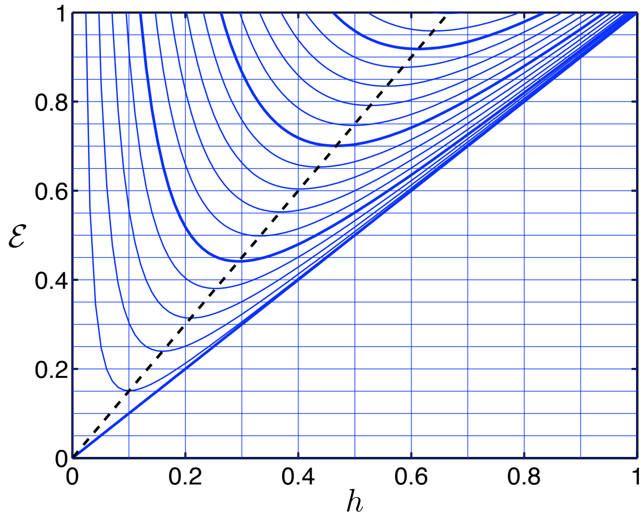


FIGURE 4.21 – Charge spécifique $\mathcal{E}(q,h)$. Unités de h en m. Intervalle entre les iso-q de 0.1 m^2/s. Courbe pointillée : minima de $\mathcal{E}$.

la figure **4**.21, les valeurs de $q_0 = q_a$ et h_0. Représenter cette situation sur un schéma à la manière de la figure **4**.20.

> Puisque $\mathcal{E}(q_a, h)$ est minimum pour la hauteur critique $h_a = 16$ cm, on lit $q_a = 0.2$ m^2/s sur l'abaque (point A sur la figure **4**.23a). Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3\,h_a/2 = 60$ cm, on lit $h_0 \sim 60$ cm (point A_0 sur la figure **4**.23a). Cette situation est représentée sur la figure **4**.22a.

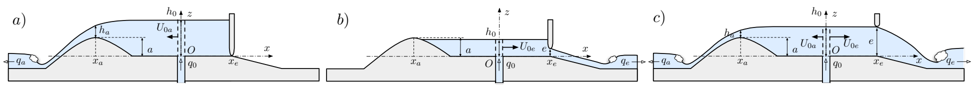


FIGURE **4**.22 – a) Cas $e = 0$ cm et $h_a = 16$ cm. b) Cas $h_0 = 30$ cm et $e = 15$ cm. c) Cas sans vanne avec $h_a = 10$ cm.

14) On augmente le débit q_0 et on suppose maintenant que l'ouverture de la vanne est $e = 15$ cm et que $h_0 = 30$ cm. Déterminer, à l'aide de l'abaque de la figure **4**.21, la valeur de $q_e = q_0$. Représenter cette situation sur un schéma à la manière de la figure **4**.20.

> On a $q_a = 0$ car $h_0 < a$. Comme $\mathcal{E}(q_e, h_0) = \mathcal{E}(q_e, e)$, on lit sur le graphique (points B et B_0 sur la figure **4**.23b) que $q_e = 0.3$ m^2/s. Cette situation est représentée sur la figure **4**.22b.

15) On augmente encore le débit q_0 et on ouvre la vanne de telle sorte que $e = 20$ cm. On mesure alors $h_a = 16$ cm. Sur l'abaque de la figure **4**.21, tracer les points A_0 et A correspondant respectivement aux hauteurs h_0 et h_a sur la courbe d'iso-débit linéique $q = q_a$ ainsi que les points E_0 et E correspondant respectivement aux hauteurs h_0 et e sur la courbe d'iso-débit linéique $q = q_e$. En déduire les valeurs de q_0 et X.

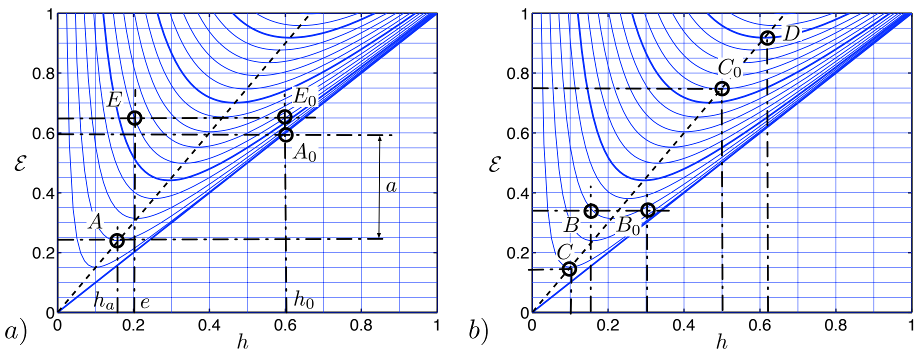


FIGURE **4**.23 – a) Tracé des points A, A_0, E et E_0. b) Tracé des points B, B_0, C et C_0.

Puisque le minimum de $\mathcal{E}(q_a, h)$ à q_a fixé est la hauteur critique $h_a = 25$ cm, on lit $q_a = 0.2$ m^2/s sur le graphique. Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = \mathcal{E}(q_a, h_a) + a = 3\,h_a/2 + a = 60$ cm, on lit sur le graphique $h_0 \sim 60$ cm et on trace les points A_0 et A comme indiqué sur la figure **4**.23a. Comme h_0 et e sont des hauteurs conjuguées pour la charge spécifique, on calcule ou on lit sur le graphique que $q_e = 0.6$ m^2/s et on trace les points E_0 et E comme indiqué sur la figure **4**.23a. On en déduit que $q_0 = q_a + q_e = 0.8$ m^2/s et $X = q_a/q_0 = 0.25$.

16) On augmente le débit q_0 et on ouvre la vanne de telle sorte qu'elle ne soit plus en contact avec l'eau. On mesure alors $h_a = 10$ cm. En déduire les valeurs de q_0 et X. Représenter cette situation sur un schéma à la manière de la figure **4**.20.

Comme h_a est la hauteur critique associée au débit q_a on lit sur le graphique que $q_a = 0.1$ m^2/s (point C sur la figure **4**.23b). Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3\,h_a/2 = 51$ cm on lit $h_0 = 50$ cm. Comme $e = h_0$ est la hauteur critique associée au débit q_e on lit sur le graphique que $q_e = 1.1$ m^2/s (point C_0 sur la figure **4**.23b). On en déduit $q_0 = q_e + q_a = 1.2$ m^2/s et $X = q_a/q_0 = 0.08$. Cette situation est représentée sur la figure **4**.22c.

17) On souhaite maintenant que le système puisse répartir, dans n'importe quelle proportion $X \in [0, 1]$, les débits linéiques q_0 inférieurs ou égaux à $q_{0max} = 1.5$ m^2/s. Quelle taille minimale a_{min} doit-on choisir pour dimensionner l'obstacle ? Justifier le choix de $a = a_{min}$.

Pour pouvoir contrôler toutes les valeurs de X, il faut que $\mu \leq 1$ pour $q_0 = q_{0max}$. Il faut donc $a \geq a_{min}$ avec $a_{min} = q_{0max}^{2/3}\, g^{-1/3} = 62$ cm (point D sur la figure **4**.23b). Le choix $a = a_{min}$ permet une meilleure manoeuvrabilité du dispositif (étude paramétrique non présentée ici).