

**Avertissement :** Durée : 1h45. Livret d'enseignement distribué en cours et calculatrices autorisés. Corrigé disponible en salle B005 avec reproduction des expériences par Marion, stagiaire à l'IMFT.

### EXERCICE 0.1 Incertitudes sur la mesure du débit en tuyère de Laval

On considère une tuyère hydraulique telle que la largeur du canal vaut  $L_a = 25$  cm en  $x = x_a$ , en amont, et  $L_r = 17,0 \pm \delta L$  cm au col de la tuyère, situé en  $x = x_r$ , où  $\delta L = 0,2$  cm représente l'incertitude de mesure de cette largeur (figure 1a). On suppose que la largeur du canal est de nouveau égale à  $L_a$  en un point  $x_b$  situé à l'aval de la tuyère. Dans le cas où la tuyère est amorcée (fluvial pour  $x < x_r$  et torrentiel pour  $x > x_r$ ), on mesure  $h_a = 16,0 \pm \delta h$  cm en  $x = x_a$  où  $\delta h = 1$  cm représente l'incertitude de mesure de cette hauteur. L'écoulement étant stationnaire, on cherche à déterminer le débit  $Q$  et son incertitude relative  $\delta Q/Q$ . On néglige les pertes de charge et on prendra  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup>.

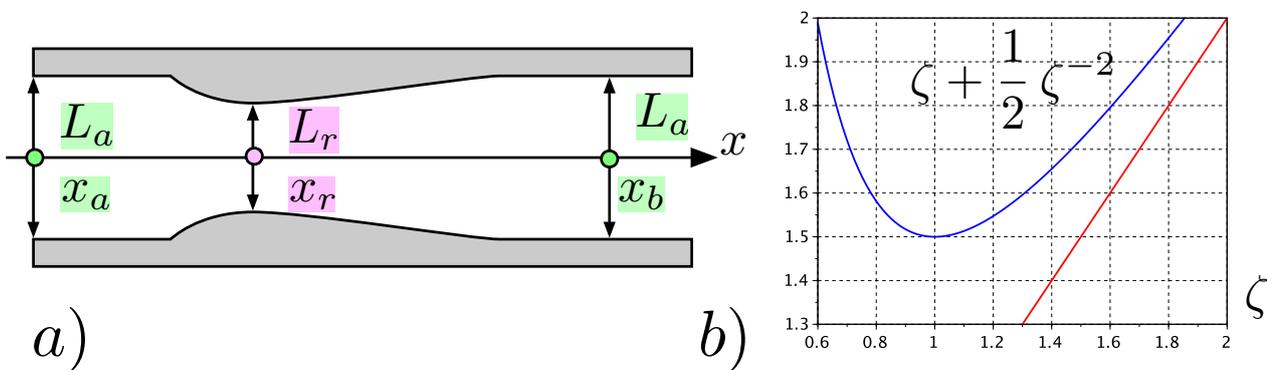


FIGURE 1 – a) Géométrie de la tuyère. b) Fonction  $f(\zeta) = \zeta + 1/(2\zeta^2)$ .

- 1) En notant  $L(x)$  le profil de largeur, avec  $L(x_a) = L_a$  et  $L(x_r) = L_r$ , on définit le profil suivant :  $h_c(x) = Q^{2/3} g^{-1/3} L^{-2/3}(x)$ . Que représente cette grandeur ? Tracer, sur un même graphe, l'allure des profils  $L(x)$  et  $h_c(x)$  en fonction de  $x$  sans donner de valeurs numériques.
- 2) En notant  $h_{ca} = h_c(x_a)$ , montrer que le profil de profondeur  $h(x)$  vérifie en tout point  $x$  l'équation  $h(x) + (1/2) h_c^3(x)/h^2(x) = h_a + (1/2) h_{ca}^3/h_a^2$ . Tracer, sur le graphe de la question précédente, l'allure du profil  $h(x)$  en fonction de  $x$  sans donner des valeurs numériques. On rappelle que la tuyère est amorcée.
- 3) Montrer que  $h_a + (1/2) h_{ca}^3/h_a^2 = (3/2) h_{cr}$ .
- 4) On note  $\zeta_a = h_a/h_{ca}$  et  $\Lambda = L_a/L_r$ . En déduire que  $f(\zeta_a) = (3/2) \Lambda^{2/3}$  où  $f(\zeta) = \zeta + 1/(2\zeta^2)$ .
- 5) Déterminer, à l'aide de l'abaque de la figure 1b), la valeur de  $\zeta_a$ .
- 6) Montrer que l'on peut écrire  $Q = g^{1/2} L_a h_a^{3/2} \zeta_a^{-3/2}$  et calculer sa valeur.
- 7) Plutôt que de mesurer  $h_a = h(x_a)$ , on mesure  $h_b = h(x_b) = 5,5 \pm \delta h$  cm avec la même précision  $\delta h = 1$  cm. Déterminer  $\zeta_b = h_b/h_{ca}$ . Montrer que l'on obtient le même débit, à 5% près.
- 8) On admet, sans faire les calculs, que le système d'équations  $Q = g^{1/2} L_a h^{3/2} \zeta^{-3/2}$  et  $f(\zeta) = (3/2)(L_a/L_r)^{2/3}$  conduit à l'incertitude relative  $\delta Q/Q = \mu_h(h) \delta h + \mu_L(\zeta) \delta L$ , avec  $\mu_h(h) = (3/2)(1/h)$  et  $\mu_L(\zeta) = (1/\zeta) [f(\zeta)/f'(\zeta)] (1/L_r)$  si  $\delta h$  est l'erreur de mesure de  $h$  et  $\delta L$  l'erreur de mesure de  $L_r$ . On admet également que  $\mu_h(h_a) = 9,4$  m<sup>-1</sup> et  $\mu_L(\zeta_a) = 7,8$  m<sup>-1</sup> lorsque l'on mesure  $h_a$  et  $\mu_h(h_b) = 28,8$  m<sup>-1</sup> et  $\mu_L(\zeta_b) = -5,6$  m<sup>-1</sup> lorsque l'on mesure  $h_b$ . Est-il préférable de mesurer  $h_b$  plutôt que  $h_a$  pour obtenir une meilleure précision dans l'estimation du débit  $Q$  ? Justifier en comparant les ordres de grandeurs des différentes incertitudes.

### EXERCICE 0.2 Quelques propriétés des ressauts hydrauliques

#### Ressaut stationnaire

Dans un canal de largeur infinie, on considère un ressaut hydraulique stationnaire reliant les hauteurs  $h_L < h_R$ , en présence d'un débit linéique  $q$  constant.

- 1) Indiquer pourquoi  $q$  doit être positif.
- 2) Justifier la relation  $q^2(1/h_L - 1/h_R) = (1/2)g(h_R^2 - h_L^2)$ .
- 3) En multipliant cette équation par  $2(h_R/g)/(h_R - h_L)$ , montrer que  $h_R$  est racine du polynôme  $P(X) = X^2 + h_L X - 2q^2/(g h_L)$ .
- 4) En déduire l'équation de Bélanger  $h_R/h_L = \mathcal{B}(Fr)$  où  $Fr = (q/h_L)/\sqrt{g h_L}$  est le nombre de Froude en amont du ressaut et  $\mathcal{B}$  une fonction que l'on précisera.
- 5) Dessiner, dans un plan  $(x, t)$ , l'allure de courbes caractéristiques de part et d'autre du ressaut.

#### Ressaut instationnaire

On suppose maintenant que le ressaut est animé d'une vitesse  $W$  constante dans un écoulement où les hauteurs sont respectivement constantes en amont et en aval du ressaut et valent donc  $h_L$  et  $h_R$ . On suppose que le débit linéique amont  $q$  est positif.

- 6) Dessiner, dans un plan  $(x, t)$ , l'allure des courbes caractéristiques de part et d'autre du ressaut, en supposant que  $W < 0$  et que l'écoulement est torrentiel en amont et fluvial en aval.
- 7) Même question dans le cas où l'écoulement est partout fluvial dans le référentiel du laboratoire.

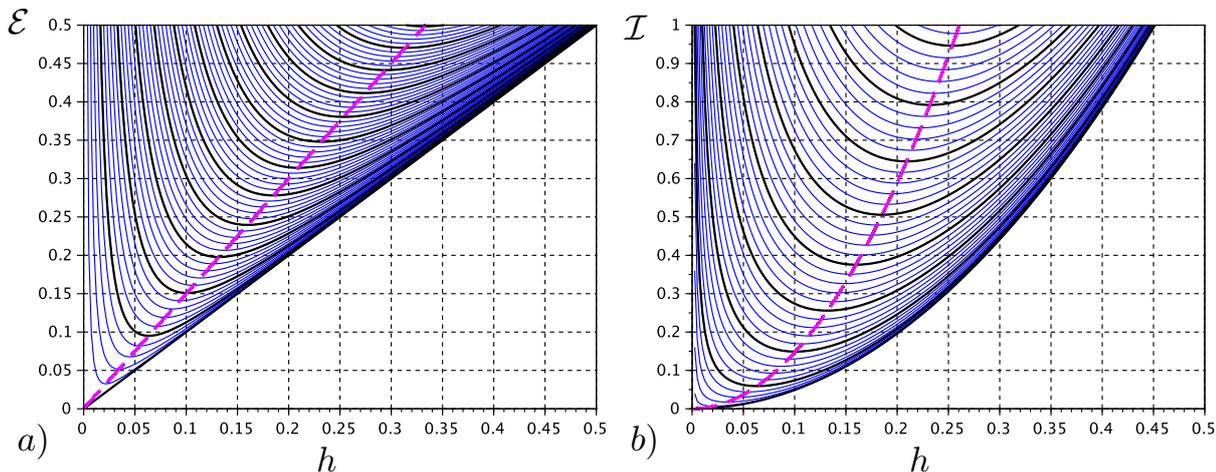


FIGURE 2 – Courbes pour différentes valeurs de  $q$  variant par pas de  $0,01 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . a) Énergie spécifique  $\mathcal{E}(q, h) = h + q^2/(2g h^2)$ . b) Impulsion  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + g h^2/2$ .

**EXERCICE 0.3** Ouverture totale d'une vanne de fond

On considère une vanne de fond, en  $x = 0$ , d'ouverture réglable dans un canal de largeur  $L = 25$  cm. On néglige les pertes de charge dues au frottement sur les parois. Étant donnée une hauteur  $h$ , on note  $c = \sqrt{gh}$  où  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  est la gravité.

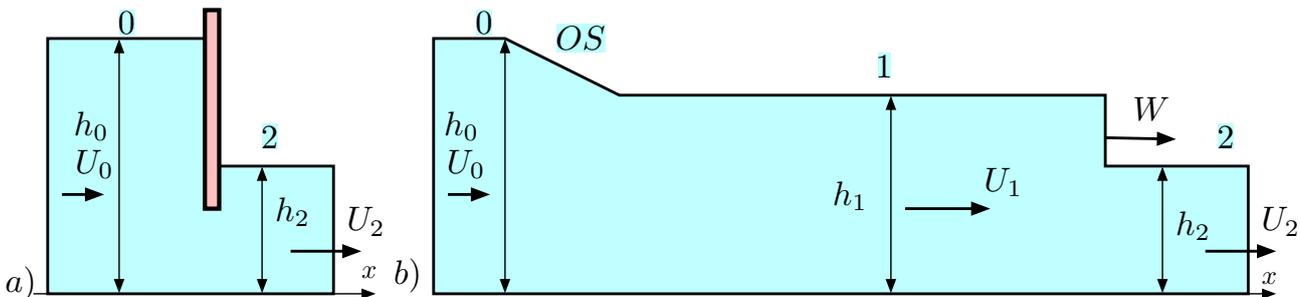


FIGURE 3 – a) Régime stationnaire dans le voisinage de la vanne de fond pour  $t < 0$ . b) Régime instationnaire après ouverture complète de la vanne de fond pour  $t > 0$ .

On alimente le canal avec un débit constant  $Q = 17 \text{ l/s}$ . Pour  $t < 0$ , on observe un régime stationnaire avec une hauteur  $h_0 = 43 \text{ cm}$  en amont de la vanne et une hauteur  $h_2 = 19 \text{ cm}$  à son aval (figure 3a). À  $t = 0$ , on ouvre brutalement la vanne de fond. On observe alors les régimes suivants dans un demi-plan  $(x, t)$  pour  $t > 0$  (voir figures 3b et 4) : une région uniforme  $(c_0, U_0)$ , une onde de détente centrée (OS), une région uniforme  $(c_1, U_1)$ , un choc mobile de vitesse  $W > 0$  et une région uniforme  $(c_2, U_2)$ . On cherche à déterminer la hauteur  $h_1$  du ressaut et sa vitesse  $W$ .

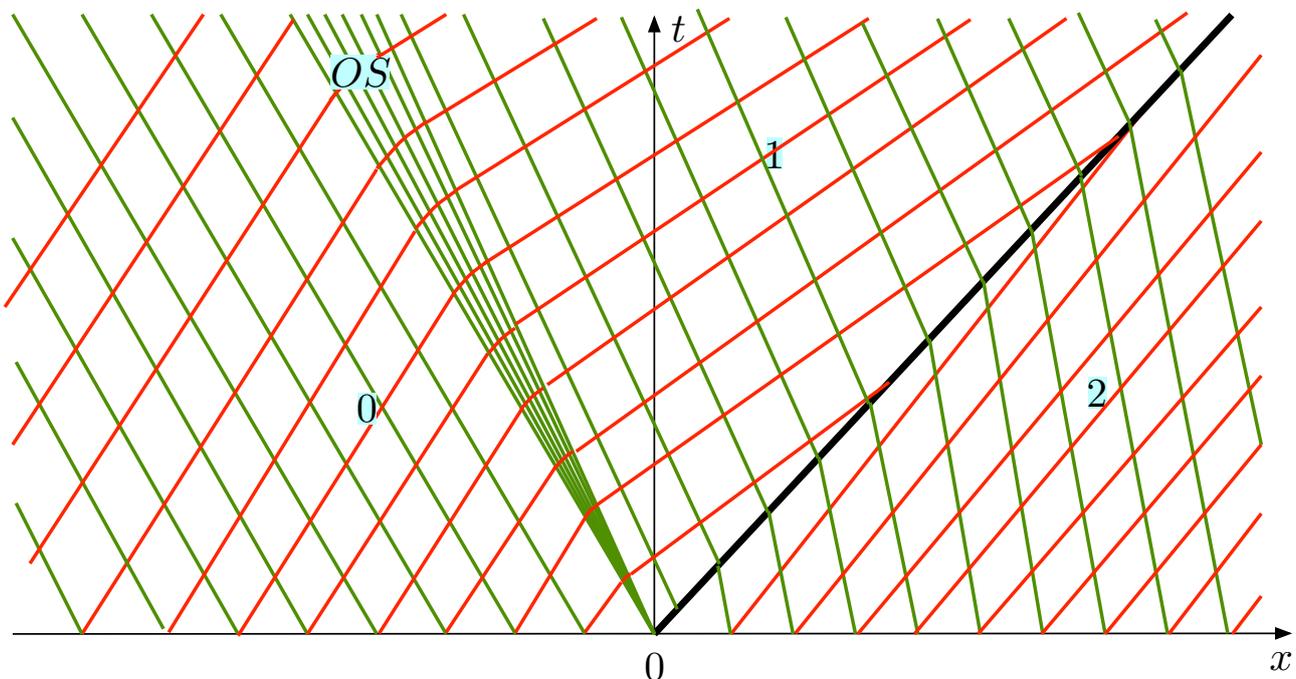


FIGURE 4 – Droites et courbes caractéristiques du régime instationnaire. Rouge :  $C_1$ . Vert :  $C_2$ .

1) Calculer le débit linéique  $q = Q/L$ . Calculer  $c_0$  et  $c_2$  en précisant les unités.

- 2) Exprimer  $U_0$  en fonction de  $q$  et de  $h_0$  et calculer sa valeur. Même question pour  $U_2$ , avec  $q$  et  $h_2$ .
- 3) Justifier la relation  $U_0 + 2c_0 = U_1 + 2c_1$ .
- 4) Justifier la relation  $W = (h_2 U_2 - h_1 U_1)/(h_2 - h_1)$ .
- 5) Justifier la relation  $h_1 (W - U_1)^2 + g h_1^2/2 = h_2 (W - U_2)^2 + g h_2^2/2$ .
- 6) En déduire que  $(U_1 - U_2)^2 = (h_1 - h_2)^2 g (h_1 + h_2)/(2 h_1 h_2)$ .
- 7) Justifier  $U_1 > U_2$  en se plaçant dans le repère du ressaut mobile.
- 8) En déduire que  $U_1 - U_2 = (c_1^2 - c_2^2) \sqrt{c_1^2 + c_2^2}/(\sqrt{2} c_1 c_2)$ .
- 9) En rassemblant les relations des questions précédentes, montrer que l'on peut écrire

$$U_0 - U_2 + 2c_0 = (c_1^2 - c_2^2) \sqrt{c_1^2 + c_2^2}/(\sqrt{2} c_1 c_2) + 2c_1. \quad (1)$$

Énumérer les variables connues et la variable que l'on cherche dans ce système.

- 10) On pose  $X = c_1/c_2$ ,  $Y = c_0/c_2$  et  $A = (U_2 - U_0)/(2c_2)$ . Montrer que le système s'écrit

$$Y - A = F(X) \quad \text{avec} \quad F(X) = X + \frac{X^2 - 1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}. \quad (2)$$

- 11) En utilisant les abaques de la figure 5, déterminer  $h_1$ . En déduire la hauteur  $h_1 - h_2$  du ressaut.
- 12) Calculer le vitesse du choc  $W$ .
- 13) Comparer avec la vitesse de choc obtenu dans le cas de la rupture de barrage avec  $U_0 = U_2 = 0$ , pour les mêmes valeurs de  $h_0$  et  $h_2$ .

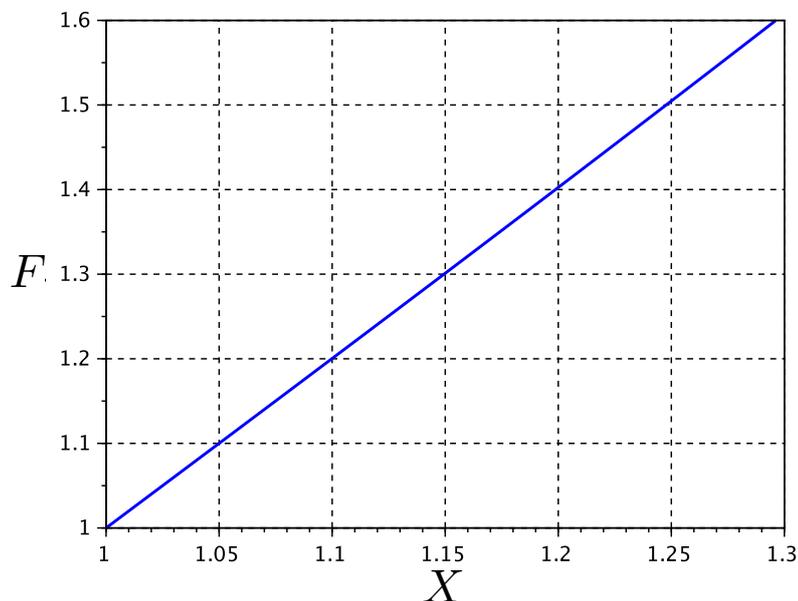


FIGURE 5 – Fonction  $F(X) = X + \sqrt{1 + 1/X^2} (X^2 - 1)/(2\sqrt{2})$ .

**EXERCICE 0.4** Ressaut dans un canal inclinable

On considère un obstacle de hauteur  $d = 25$  cm, constituant une rampe de longueur  $D = 75$  cm dans un canal inclinable, contrôlé par un seuil aval (figure 6). La largeur du canal est  $L = 25$  cm et on suppose que l'on peut remplacer l'effet des parois latérales pour un nombre de Strickler équivalent égal à  $K_s = 100 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ . On suppose que le débit est fixé à  $Q = 10 \text{ l/s}$ . La gravité sera prise égale à  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . On fait varier l'angle  $\gamma$  que fait le canal avec l'horizontale dans un intervalle  $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$  et on s'intéresse à la position  $s_c$  d'un ressaut hydraulique stationnaire situé en amont du seuil. On suppose que le seuil, situé à une distance  $l = 3,16$  m de l'extrémité aval de la rampe, impose, dans son voisinage immédiat, une hauteur  $h_2 = 14$  cm indépendante de  $\gamma$  (loi de seuil ne dépendant que du débit).

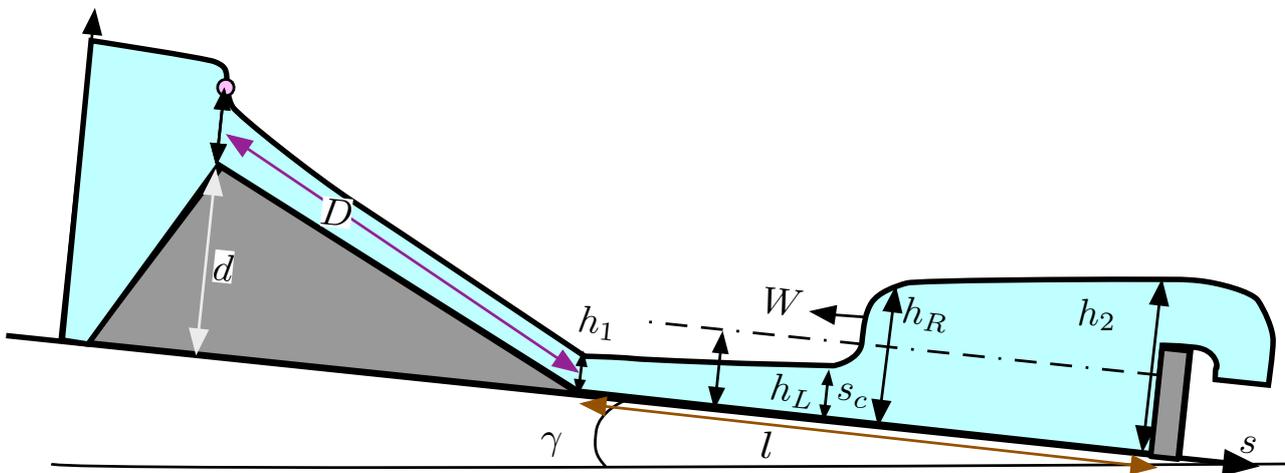


FIGURE 6 – Écoulement en aval d'une rampe sur dans un canal inclinable.

- 1) On note  $I_{r0} = d/D$ , la pente de la rampe et  $I = \sin \gamma$  la pente du canal, avec  $I \in [0, I_{max}]$  avec  $I_{max} = \sin \gamma_{max} = 10^{-2}$ . Montrer que l'on fait une erreur inférieure à 1% en approximant la pente de la rampe par  $I_r(\gamma) = I_{r0} + I$ .
- 2) Calculer les hauteurs critique  $h_c$  et normale  $h_n$  dans la portion du canal située à l'aval de la rampe, pour  $I = 0,002$  puis  $I = 0,004$ . Indiquer, dans chaque cas, si la pente  $I$  est faible ou forte.
- 3) La figure 7 trace les courbes de remous du canal pour  $I \in [0, I_{max}]$ , en résolvant une équation différentielle de la forme  $dh/dx = (I - ah^\alpha)/(1 - bh^\beta)$ . Indiquer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  et donner l'expression de  $a$  et  $b$  en fonction des paramètres connus (valeurs numériques non requises).
- 4) Recopier sommairement les courbes de remous de la figure 7 et indiquer la nature ( $H_i$ ,  $M_i$  ou  $S_i$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) de chacune d'entre elles. Indiquer, sur ce schéma, la position de la hauteur critique.
- 5) En lisant approximativement les valeurs de la figure 7 ou de la figure 8, montrer que la surface libre située dans les trois mètres en amont de la vanne seuil est horizontale à 10 % près.
- 6) Calculer les hauteurs normales  $h_{nr}(I)$  de la rampe pour  $I = 0$  et  $I = I_{max}$ . En déduire que ces hauteurs ne varient pas de plus de 1 % avec la pente  $I$  dans l'intervalle considéré  $I \in [0, I_{max}]$ .
- 7) En utilisant les informations des figures 7 et 8, calculer la distance  $\delta x$  entre la fin de la rampe et le ressaut pour  $I = 0$  et  $I = I_{max}$ .
- 8) Dans quelle direction se déplace la position du ressaut stationnaire lorsque la pente augmente. Quel est l'effet principal responsable de ce déplacement.

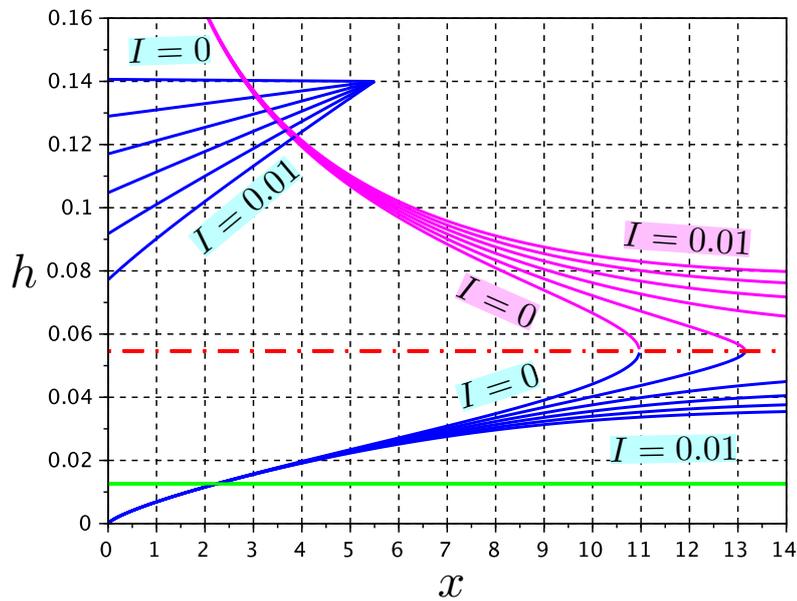


FIGURE 7 – Courbes de remous  $H_3$ ,  $M_3$  ou  $S_3$  (bleues en bas) et leurs conjuguées (magenta) pour l'impulsion, pour  $I \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} 10^{-3}$ . Courbes de remous  $H_2$ ,  $M_1$  ou  $S_1$  (bleues en haut) telles que  $h(x_v) = 14$  cm avec  $x_v = 5.5$  m.

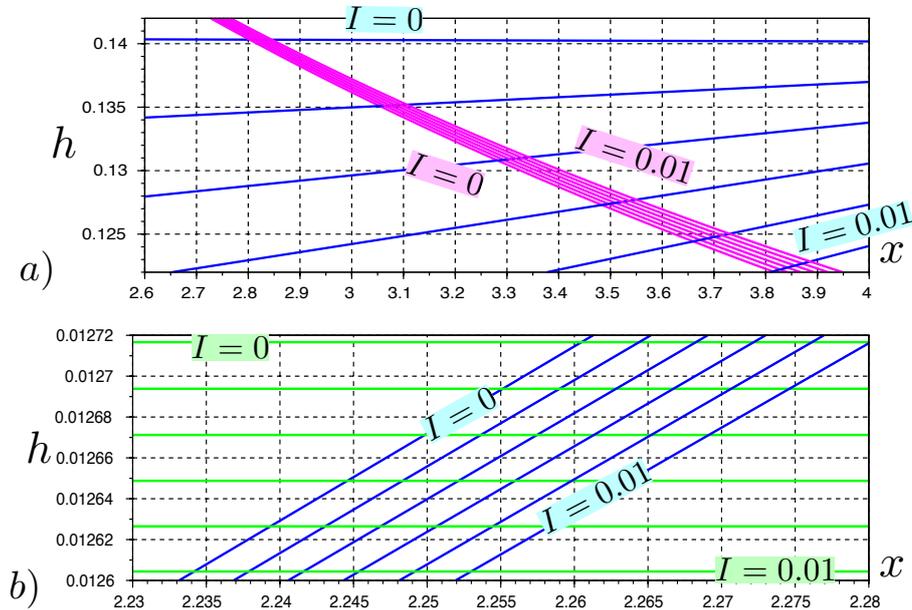


FIGURE 8 – Zooms de la figure 7. a) Zoom sur l'intersection entre les courbes de remous fluviales et les courbes conjuguées des courbes de remous torrentielles. c) Zoom sur l'intersection entre les courbes de remous torrentielles et les hauteurs normales  $h_{rn}(I)$  de la rampe.

**Corrigé 0.1** Incertitudes sur la mesure du débit en tuyère de Laval

**Position d'équilibre du ressaut**

1) La grandeur  $h_c(x)$  est la profondeur critique. Elle est maximale au col de la tuyère, en  $x = x_r$ .  
 2) Comme  $Q = U h L$ , où  $U$  est la vitesse, la conservation de la charge s'écrit  $E = h + U^2/(2g) = h + Q^2/(2L^2 h^2 g) = h + h_c^3/h^2$ . L'équation indique que  $E(x) = E(x_a)$ . La ligne d'eau décroît de  $h_a$  à  $h_b$  en passant par  $h(x_r) = h_{cr}$  au col. 3) Comme  $h(x_r) = h_{cr}$  au col, la conservation de la charge conduit à la relation indiquée. 4) En divisant la relation par  $h_{ca}$  et en remarquant que  $h_{cr}/h_{ca} = \Lambda^{2/3}$ , on obtient l'équation implicite indiquée. 5) En choisissant la racine  $\zeta$  plus grande que 1 de l'équation implicite  $f(\zeta) = (3/2)\Lambda^{2/3}$ , on obtient  $\zeta_a = 1,78$ . 6) Comme  $h_{ca} = Q^2 g^{-1/3} L_a^{-2/3}$  et  $h_{ca} = h_a/\zeta_a$ , on en déduit  $Q = g^{1/2} L_a h_a^{3/2} \zeta_a^{-3/2} = 20,1$  l/s. 7) Le choix de la racine  $\zeta_b = 0,6$ , inférieure à un dans la mesure où l'écoulement est torrentiel en  $x = x_b$ , conduit à  $Q = g^{1/2} L_a h_b^{3/2} \zeta_b^{-3/2} = 21,2$  l/s. 8) On calcule  $\delta Q/Q = \mu_h(h_a) \delta h + \mu_L(\zeta_a) \delta L = 9,4\% + 1,6\% = 11,0\%$  et  $\delta Q/Q = \mu_h(h_b) \delta h + \mu_L(\zeta_b) \delta L = 28,8\% - 1,1\% = 27,7\%$ . La précision est meilleure pour une mesure de la hauteur dans la partie fluviale ( $h_a$ ), plutôt que dans la partie torrentielle ( $h_b$ ), dans la mesure où l'incertitude  $\delta h$  sur la mesure de la profondeur est cinq fois plus grande que l'incertitude  $\delta L$  sur la mesure de la largeur.

**Corrigé 0.2** Quelques propriétés des ressauts hydrauliques

**Ressaut stationnaire**

1) L'énergie est dissipée à travers le ressaut lorsque  $q > 0$ . Sa génération spontanée dans le cas  $q < 0$  serait contraire au second principe. 2) Cette relation traduit la conservation de l'impulsion en ayant pris en compte la conservation du débit. 3) Il suffit d'utiliser  $(h_R^2 - h_L^2)/(h_R - h_L) = h_R + h_L$ . 4) En choisissant la racine positive de l'équation du second degré, on obtient  $\mathcal{G}(Fr) = (1/2)(\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1)$ . 5) Les droites caractéristiques dans le cas stationnaire sont représentées sur la figure 9a. Les droites  $C_1$  et  $C_2$  en amont coupent le ressaut de l'amont vers l'aval. Les droites  $C_2$  à son aval remonte vers le ressaut tandis que les  $C_1$  s'en éloignent.

**Ressaut instationnaire**

6) Le cas torrentiel / fluvial est représenté sur la figure 9b. 7) Le cas fluvial partout est représenté sur la figure 9c. c

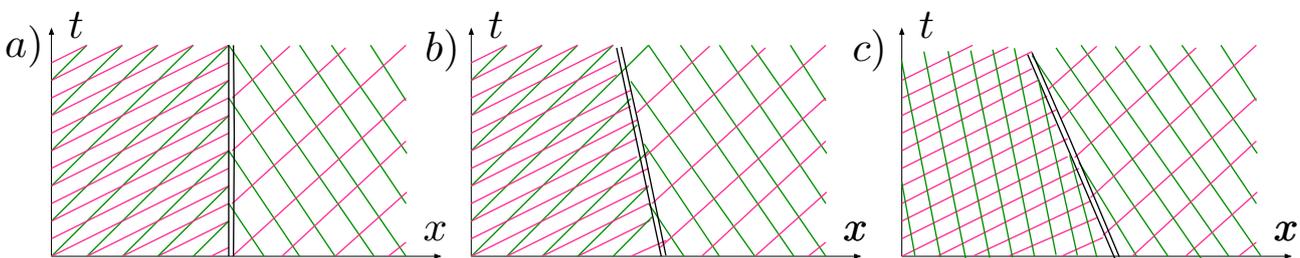


FIGURE 9 – Tracé schématique des droites caractéristiques  $C_1$  (rouge) et  $C_2$  (vertes). a) Cas stationnaire. b) Cas torrentiel / fluvial. c) Cas fluvial partout.

**Corrigé 0.3 Ouverture totale d'une vanne de fond**

**1)** On a  $q = Q/L = 0,068 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $c_0 = 2,05 \text{ m/s}$  et  $c_2 = 1,37 \text{ m/s}$ . **2)** On a  $U_0 = q/h_0 = 0,16 \text{ m/s}$  et  $U_2 = q/h_2 = 0,36 \text{ m/s}$ . **3)** Cette relation provient de la conservation de l'invariant de Riemann  $J_1$  pour  $x < 0$ . **4)** Cette relation provient de la relation de saut exprimant la conservation du débit à travers le ressaut hydraulique. **5)** Cette relation provient de la relation de saut exprimant la conservation de l'impulsion à travers le ressaut hydraulique **6)** En remplaçant  $W$  par son expression, on obtient  $W - U_1 = h_2(U_1 - U_2)/(h_1 - h_2)$  et  $W - U_2 = h_1(U_1 - U_2)/(h_1 - h_2)$ . On en déduit la relation indiquée. **7)** Dans le repère mobile de vitesse  $W$ , on doit avoir  $U_2 - W < U_1 - W < 0$ . En effet, le régime passe de torrentiel à fluvial pour les vitesses relative de ce repère. **8)** En tenant compte du signe positif de  $U_1 - U_2$  et en utilisant  $h = c^2/g$ , on obtient la relation indiquée. **9)** En éliminant  $U_1 = U_0 + 2c_0 - 2c_2$ , on obtient l'expression indiquée. L'inconnue  $c_1$  s'expriment en fonction des variables connues ( $c_0, c_2, U_0, U_2$ ) en résolvant cette équation implicite. **10)** On divise l'équation par  $c_2$  pour obtenir cette équation implicite en  $X, Y$  et  $A$  étant connus. **11)** Comme  $Y = 1,504$  et  $A = 0,073$  la solution de l'équation implicite  $F(X) = Y - A = 1,43$  est  $X = 1,21$ , comme on peut le lire sur la figure 5. On a donc  $c_1 = X_1 c_2 = 1,66$  et donc  $h_1 = 28 \text{ cm}$ . On a donc  $h_1 - h_2 = 9 \text{ cm}$ . **12)** On calcule  $U_1 = U_0 + 2(c_0 - c_1) = 0,95 \text{ m/s}$ . On en déduit  $W = (h_2 U_2 - h_1 U_1)/(h_2 - h_1) = 2,2 \text{ m/s}$ . **13)** Dans le cas  $A = 0$ , l'équation implicite  $F(X) = Y = 1,5$  conduit à la solution  $X = 1,25$ ,  $c_1 = 1,70$  et donc  $W = 1,93 \text{ m/s}$ .

**Corrigé 0.4 Ressaut dans un canal inclinable**

**1)** Pour  $I_{max} = 10^{-2}$  et  $I_{r0} = 1/3$ , la valeur exacte  $I_r(\gamma) = \sin(\arcsin I_{r0} + \arcsin \gamma) = 0,3427$  diffère de la valeur approchée  $I_r(\gamma) = I_{r0} + I = 0,3433$  de 0,17%. **2)** On a  $h_c = q^{2/3} g^{-1/3} = 5,46 \text{ cm}$  avec  $q = Q/L = 0,04 \text{ m}^2/\text{s}$ . La hauteur normale  $h_n = q^{3/5} K_s^{-3/5} I^{-3/10}$  vaut pour  $h_n = 5,90 \text{ cm}$  pour  $I = 0,002$  et  $h_n = 4,79 \text{ cm}$  pour  $I = 0,004$ . La pente est faible ( $h_n > h_c$ ) pour  $I \leq 0,002$  et forte ( $h_n < h_c$ ) pour  $I \geq 0,004$ . **3)** Comme  $h_{nr} = q^{3/5} K_s^{-3/5} I_r^{-3/10}$  on calcule  $h_{nr} = 12,72 \text{ cm}$  pour  $I = 0$  et  $h_{nr} = 12,60 \text{ cm}$  pour  $I = I_{max} = 0,01$ . **4)** On a  $\alpha = -3/10$  et  $\beta = -3$ . On a  $a = q^2/K_s^2$  et  $b = q^2/g$ . **5)** En partant du bas, les courbes de remous sont les suivantes : une  $H_3$ , une  $M_3$  et quatre  $S_3$  au-dessous de  $h_c$ . En partant du haut, les courbes de remous sont les suivantes : une  $H_2$ , une  $M_1$  et quatre  $S_1$  au-dessus de  $h_c$ . **6)** Comme  $h_{nr}(\gamma) = q^{3/5} K_s^{-3/5} (I_{r0} + I)^{-3/10}$ , on trouve  $h_{nr}(0) = 1,272 \text{ cm}$  et  $h_{nr}(0,01) = 1,260 \text{ cm}$ , ce qui représente une variation de l'ordre de 1%. **7)** L'origine des  $x$  étant prise pour la valeur  $h = 0$  des courbes de remous, on lit  $x_r(I = 0) = 2,260 \text{ m}$  et  $x_r(I_{max}) = 2,252 \text{ m}$  sur la figure 8b et  $x_c(I = 0) = 2,80 \text{ m}$  et  $x_c(I_{max}) = 3,88 \text{ m}$  sur la figure 8a. On en déduit que  $\delta x(I = 0) = x_c(I = 0) - x_r(I = 0) = 54 \text{ cm}$  et  $\delta x(I_{max}) = x_c(I_{max}) - x_r(I_{max}) = 1,63 \text{ m}$ . **8)** La position du ressaut stationnaire se déplace d'environ 1,1 m lorsque la pente augmente jusqu'à  $I_{max}$ . Le fait que la surface libre reste pratiquement horizontale à l'aval du ressaut est responsable de ce déplacement.