Avertissement : *Aucun document autorisé. Durée : 1h45.*

EXERCICE 0.1 Franchissement d'un obstacle

Dans ce problème, on pourra se servir des abaques de la figure 2 pour les applications numériques. Les valeurs numériques à 5% près suffisent donc.

On considère un écoulement dans un canal à surface libre de section rectangulaire de largeur $L = 25$ cm. On néglige le frottement sur la paroi latérale et on suppose que le frottement sur le fond est caractérisé par un nombre de Strickler $K = 80$ en unités SI. On prendra $g = 10$ m^2/s dans les calculs.

Un écoulement stationnaire de débit $Q = 25$ l/s est caractérisé par une hauteur $h_0 = 24$ cm en amont d'un obstacle lentement variable de hauteur maximale a (figure 1). On suppose que l'écoulement est torrentiel en un point x_1 situé à l'aval de l'obstacle et on néglige le frottement entre l'amont et ce point.

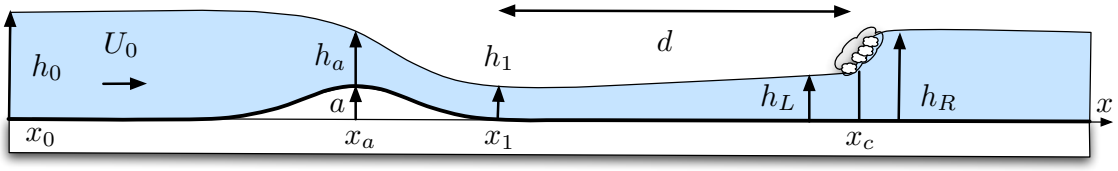

FIGURE 1 – Franchissement d'un obstacle suivi d'un ressaut

1) Déterminer la hauteur h_a au sommet de l'obstacle en $x = x_a$.
2) Déterminer la hauteur a de l'obstacle.
3) Déterminer la hauteur h_1 en $x = x_1$.

On observe un ressaut hydraulique en un point x_c tel que $d = x_c - x_1 = 1.5$ m.

4) En tenant compte du frottement au fond, montrer que la perte de charge vaut environ $\Delta H_d = 5$ cm. Pour ce calcul, on pourra négliger la variation de h sur cette portion.
5) Déterminer la hauteur h_L à gauche du ressaut.
6) Déterminer la hauteur h_R à droite du ressaut.
7) Déterminer la perte de charge ΔH_c à travers le ressaut.
8) Quelle est la différence de charge spécifique entre l'amont de l'obstacle et l'aval du ressaut ?

EXERCICE 0.2 Onde de détente dans l'approximation des ondes de crues

On suppose qu'une portion $x \in [0, L]$ d'un canal de pente $I = 0.01$ est décrite par l'approximation des ondes de crues $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ où $q = h\,U$ est le débit linéique et $U = K\,h^{2/3}\,\sqrt{I}$ est la vitesse de l'écoulement obtenue à l'aide du nombre de Strickler $K = 80$ en unités SI. On suppose que $h(x,t) = h_n$ est uniforme pour $t \leq 0$ avec $h_n = 5$ cm. On perturbe alors l'écoulement en imposant une hauteur $h(0,t) = h_0(t)$ avec $h_0(t) = h_n\,(1 - t/t_f)$ pour $t \in [0, t_f]$ et $h_0(t) = 0$ pour $t \geq t_f$. On suppose $t_f = 1$ mn et $L = 5$ m.

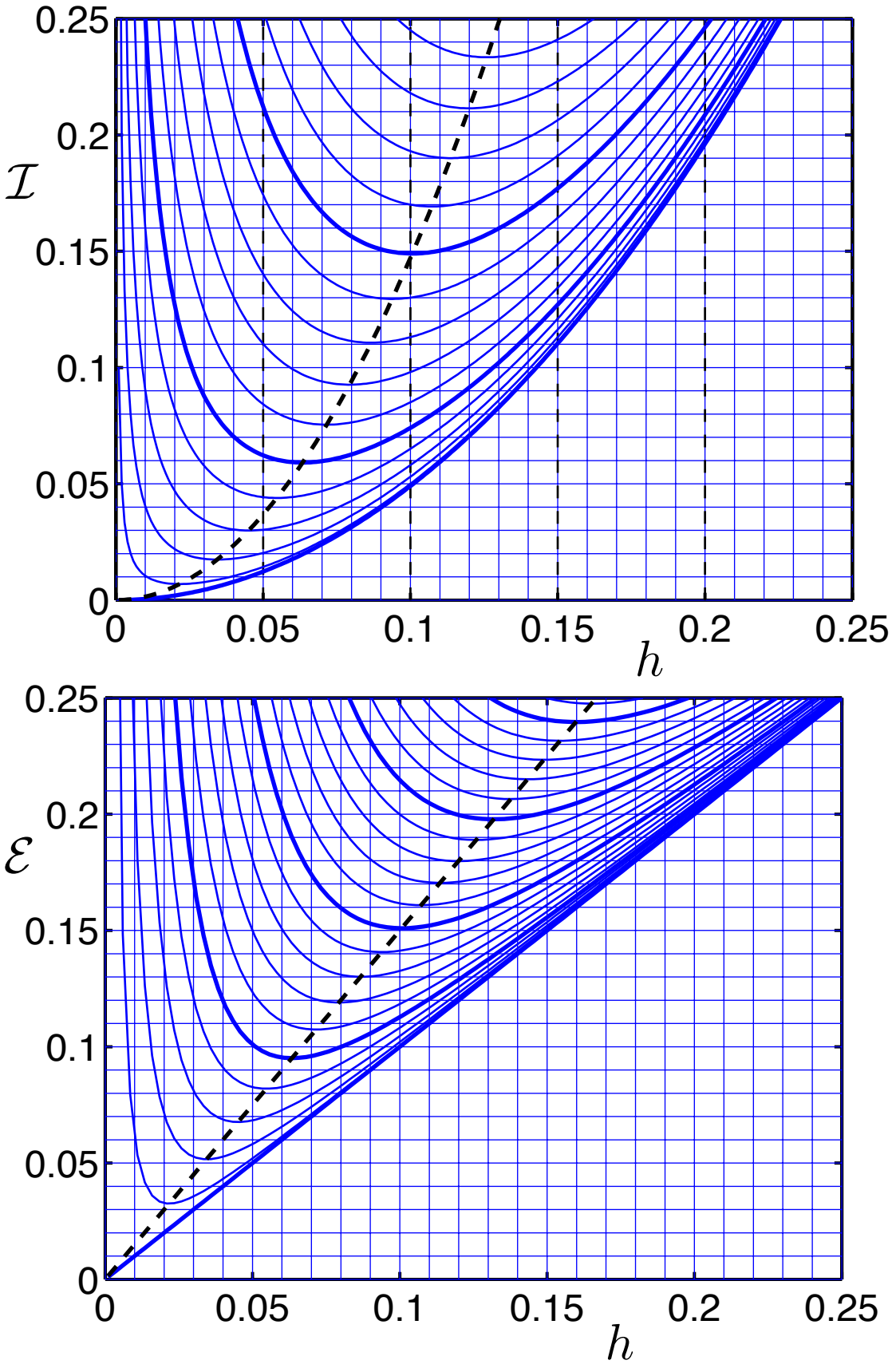

FIGURE 2 – *Tracé en fonction de h (en m), pour q variable par pas de .01 $m^2\ s^{-1}$, des fonctions : a) $\mathcal{I}(q,h) = q^2/h + g\,h^2/2$ (en $m^3\ s^{-2}$) et b) $\mathcal{E}(q,h) = h + q^2/(2\,g\,h^2)$ (en m).*

1) Calculer la vitesse $U(x,t)$ pour $t \leq 0$.

On s'intéresse tout d'abord aux temps courts tels que $0 \leq t \ll t_f$.

2) Montrer dans ce cas que h est solution de $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ où λ_n est une constante que l'on déterminera..
3) Tracer les courbes caractéristiques associées à cette équation dans le plan (x,t) pour $x \in [0,L]$ et $t \geq 0$.
4) On note $h_L(t) = h(L,t)$ la hauteur à l'aval du canal. Calculer le plus grand temps T tel que $h_L(t) = 0$ pour $t \in [0,T]$. Vérifier que le rapport entre T et t_f est encore inférieur à 5%.
5) Donner l'expression de $h_L(t)$ pour $t \in [T, 2T]$ en considérant que l'approximation linéaire reste valable pour $t \leq 2\,T$.

On s'intéresse maintenant à tous les temps $t \geq 0$.

6) Déterminer l'équation des courbes caractéristiques dans le plan (x,t) pour $x \in [0,L]$ et $t \geq 0$. On pourra poser $\beta = \frac{5}{3} K \sqrt{I}$.
7) Tracer ces caractéristiques.
8) Exprimer en fonction de t_f, T et ξ le temps t_ξ tel que $h_L(t_h) = \xi\, h_n$ avec $\xi \in [0,1]$.
9) Calculer le temps t_c tel que $h_L(t_c) = h_n/100$.
10) Pourquoi le canal met-il beaucoup de temps à se vider complètement ?

EXERCICE 0.3 Onde de détente sans pente ni frottement

On suppose qu'une portion $x \in [0,L]$ d'un canal sans pente ni frottement n est décrite par les équations de Saint-Venant $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\,U)}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g\,\frac{\partial h}{\partial x}$. On suppose que $h(x,0) = h_n$ et $U(x,0) = U_n$ sont uniformes pour $t \leq 0$ avec $h_n = 10$ cm et $U_n = 0.5$ m/s. On perturbe alors l'écoulement en imposant une hauteur $h(0,t) = h_0(t)$ avec $h_0(t) = h_n\,[1 - 5\,t/(9\,t_f)]$ pour $t \in [0,t_f]$ et $h_0(t) = h_n/2$ pour $t \geq t_f$. On suppose $t_f = 3$ s et $L = 6$ m.

On note $c = \sqrt{g\,h}$, $J_1 = U + 2\,c$, $J_2 = U - 2\,c$, $\lambda_1 = U + c$ et $\lambda_2 = U - c$.

1) Déterminer J_2 dans le plan (x,t) pour $x \in [0,L]$ et $t \geq 0$.
2) Déterminer $U_0(t) = U(0,t)$ pour $t \in [0,t_f]$ et $t \geq t_f$.
3) Tracer la caractéristique C_1 qui passe par le point $(x,t) = (0,0)$ puis celle qui passe par le point $(x,t) = (0,t_f)$.
4) Déterminer la région uniforme (n) du plan telle que $h = h_n$ et $U = U_n$.
5) Montrer qu'il existe une région uniforme (f) telle que $h = h_f$ et $U = U_f$ où h_f et U_f sont des constantes que l'on déterminera.
6) On s'intéresse à la hauteur $h_L(t) = h(L,t)$. Déterminer le temps T_s au bout duquel $h_L(T_s) = 9\,h_n/16$.
7) Tracer la fonction $h_L(t)$ pour $t \geq 0$.

Corrigé 0.1 Franchissement d'un obstacle

1)Le débit linéique est $q = Q/L = 0.1$ m^2/s. Le passage critique impose que $h_a = h_c$ où la hauteur critique est $h_c = (q^2/g)^{1/3} = 10$ cm. On retrouve celle valeur qui minimise la dixième courbe $\mathcal{E}(q,h)$ de l'abaque pour $q = .1$ m^2/s. **2)**La conservation de la charge (absence de frottement) entraine que $\mathcal{E}(q,h_0) = a + \mathcal{E}(q,h_c)$. On lit sur l'abaque que $a = 5$ cm. **3)**La conservation de la charge entraine que $\mathcal{E}(q,h_0) = \mathcal{E}(h_1,q)$. On lit sur l'abaque que $h_1 = 5$ cm. **4)**En négligeant la variation de h la perte de charge linéique sur la portion $x \in [x_1, x_c^-]$ est $J = \frac{U^2}{K^2\, h^{4/3}} \sim$ et la perte de charge $\Delta H_d = J\, d = 5.1$ cm. **5)**La perte de charge entraine que $\mathcal{E}(q,h_L) = \mathcal{E}(q,h_1) - \Delta H_d = 20$ cm. On lit sur l'abaque la valeur $h_L = 6$ cm. **6)**La conservation de l'impulsion entraine $\mathcal{I}(q,h_L) = \mathcal{I}(q,h_R)$. On lit sur l'abaque la valeur $h_R = 15.5$ cm. **7)**La perte de charge à travers le ressaut est $\Delta H_c = \mathcal{E}(q,h_L) - \mathcal{E}(q,h_R)$. On lit sur l'abaque $\Delta H_c = 2.3$ cm. **8)**La perte de charge entre l'amont et l'aval est $\Delta H = \Delta H_d + \Delta H_c = 7.4$ cm.

Corrigé 0.2 Onde de détente dans l'approximation des ondes de crues

1)On a $U(x,t) = U_n$ pour les temps négatifs avec $U_n = K\, h_n^{2/3}\, \sqrt{I} = 1.1$ m/s. **2)**En linéarisant les équations, on obtient $\lambda_n = \frac{5}{3}\, U_n = 1.8$ m/s. **3)**Les caractéristiques sont des droites parallèles d'équations $x = a + \lambda_n\, t$ avec $a \in [-\infty, L[$. **4)**La caractéristique $x = \lambda_n\, t$ issue de $(0,0)$ délimite la région uniforme $x \geq \lambda_n t$ telle que $h = h_n$. On a donc $L = \lambda_n\, T$, c'est-à-dire $T = L/\lambda_n = 2.8$ s. On a $T/t_f = 0.046 < 0.05$. **5)**Comme h est constant le long des droites caractéristiques $x = \lambda_n\, (t - \tau)$, on peut écrire $h(x,t) = h(0, t - x/\lambda_n) = h_0(t - x/\lambda_n)$ et donc $h_L(t) = h(L,t) = h_0(t - T) = h_n\, [1 - (t - T)/t_f]$. L'approximation linéaire reste valable tant que $(h - h_n)/h_n$ reste petit devant 1, ce rapport étant de l'ordre de 10% en $x = L$ pour $t = 2\, T$. **6)**L'équation des caractéristiques est solution de $\dot{x}(t) = \lambda[h(t)]$ et $\dot{h}(t) = 0$ avec $\lambda(t) = \beta\, h^{2/3}$. Comme h est constant le long des caractéristiques, ce sont des droites d'équation $x(t) = \beta\, h^{2/3}(\tau)\, (t - \tau)$ pour $\tau \in I\!R$. **7)**Dans la région $x \geq \lambda_n t$, les caractéristiques sont les droites $x = a + \lambda_n\, t$ comme dans le cas linéaire. Au-dessus de cette région uniforme, les caractéristiques forme un faisceau de droites de "vitesses" (inverse de la pente) de plus en plus petite, allant continuement de la demi-droite $x = \lambda_n\, t$ pour $t \geq 0$ à la demi-droite $x = 0$ pour $t \geq t_f$. **8)**Comme h est constant le long des caractéristiques, on peut écrire $h(x,t) = h[\tau(x,t)]$ où $\tau(x,t)$ est solution de l'équation implicite $x = \beta\, h^{2/3}(\tau)\, (t - \tau)$. Si $h(\tau) = \xi\, h_n$ où $\xi \in [0,1]$ la linéarité de $h_0(t)$ permet d'écrire $\tau = t_f(1 - \xi)$. On a donc $L = \beta\, (\xi\, h_n)^{2/3}\, (t_\xi - \tau)$ où t_ξ est le temps tel que $h_L(t_\xi) = \xi\, h_n$. On en déduit $t_\xi = (1 - \xi)\, t_f + T\, \xi^{-2/3}$. **9)**Pour $\xi = 0.01$, l'expression de t_ξ conduit à $t_c \sim 2$ mn. **10)**Le canal met beaucoup de temps à se vider car l'information se propage de plus en plus lentement.

Corrigé 0.3 Onde de détente sans pente ni frottement

1)On calcule tout d'abord $c_n = \sqrt{g\, h_n} = 1$ m/s. On a $J_2 = U_n - 2\, c_n = -1.5$ m/s sur tout le domaine. **2)**On calcule tout d'abord $h_0(t_f) = h_f$ avec $h_f = \frac{4}{9}\, h_n$ et $c_f = \sqrt{g\, h_f} = \frac{2}{3}\, c_n = 0.66$ m/s. Comme $J_2 = U_0(t) - c_0(t)$ on a $U_0(t) = U_n - 2\, [c_n - c_0(t)]$ pour $t \in [0, t_f]$ avec $c_0(t) = \sqrt{g\, h_0(t)}$ et $U_0(t) = U_f$ pou $t \geq t_f$ avec $U_f = U_n - 2\, (c_n - c_f) = U_n - \frac{2}{3}\, c_n = -0.166$ m/s. **3)**On en déduit $\lambda_{1n} = U_n + c_n = 1.5$ m/s et $\lambda_{1f} = U_f + c_f = U_n = 0.5$ m/s. La droite caractéristique C_1 d'équation $x = \lambda_{1n}\, t$ passe par $(0,0)$ et coupe la droite $x = L$ en $T_n = L/\lambda_{1n} = 4$ s.

4)Au-dessous de cette droite se trouve la région uniforme (n) avec $h = h_n$ et $U = U_n$. **5)**La droite caractéristique C_1 d'équation $x = \lambda_{1f}\,(t - t_f)$ passe par $(0, t_f)$ et coupe la droite $x = L$ en $T_f = t_f + L/\lambda_{1f} = 15$ s. Au-dessus de cette droite se trouve la région uniforme (f) avec $h = h_f$ et $U = U_f$. **6)**Le temps t_s tel que $h_0(t_s)/h_n = 9/16$ vérifie $9/16 = 1 - (5/9)(t_s/t_f)$ et vaut donc $t_s = t_f\,(63/80) = 2.4$ s. On a $c_0(t_s) = c_s$ avec $c_s = (3/4)\,c_n$ et $U_0(t_s) = U_s$ avec $U_s = U_n + 2[c_0(t_s) - c_n] = U_n - c_n/2 = 0$ m/s. On en déduit $\lambda_{1s} = U_s + c_s = 0.75$ m/s. La droite caractéristque C_1 issue de $(x, t) = (0, t_s)$ coupe la droite $x = L$ en $T_s = t_s + L/\lambda_{1s} = 10.4$ s. **7)**La fonction $h_L(t)$ est égale à $h_n = 10$ cm pour $t \in [0, T_n]$, décroit linéairement jusqu'à $h_f = 4.4$ cm pour $t \in [T_n, T_f]$ puis reste bloquée à cette valeur ensuite.