

Avertissement : Seul document autorisé : livret d'enseignement distribué en cours. Calculatrices autorisées. Durée : 1h45.

EXERCICE 0.1 Conditions initiales et Saint-Venant

On souhaite calculer l'évolution, par les équations de Saint-Venant, d'une condition initiale localisée dans l'espace. On considère les équations de Saint-Venant 1D sans pente ni frottement en milieu infini

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

où $h(x, t)$ est la profondeur, $U(x, t)$ est la vitesse et g la gravité. On considère la condition initiale $h(x, 0) = c_0^2(x)/g$ et $U(x, 0) = 0$ avec $c_0(x) = c_n + \tilde{c}_0(x)$ où c_n est une constante et $\tilde{c}_0$ est défini par :

$$\tilde{c}_0(x) = -\frac{1}{2}a \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right] \quad \text{pour } |x| < l \quad \text{et} \quad \tilde{c}_0(x) = 0 \quad \text{sinon.} \quad (2)$$

- 1) Tracer l'allure de la condition initiale $c_0(x)$ pour $a < c_n$.

Régime linéaire

Dans un premier temps on suppose $a \ll c_n$.

- 2) On suppose que $(h, U) = (h_n + \tilde{h}, U_n + \tilde{U})$ avec $\tilde{h}/h_n \ll 1$ et $\tilde{U}/c_n \ll 1$ où h_n et U_n sont des constantes. Écrire les équations linéarisées autour de l'état d'équilibre (h_n, U_n) .
3) Justifier la recherche de solutions complexes du problème linéaire avec

$$(\tilde{h}, \tilde{U}) = (\tilde{h}_m, \tilde{U}_m) e^{i k_x x + s t} \quad \text{où} \quad (h_m, U_m) \in \mathcal{C}^2, \quad k_x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad s = \sigma - i\omega \in \mathcal{C}. \quad (3)$$

- 4) Montrer que $\sigma = 0$ et qu'il existe deux familles d'ondes élémentaires de vitesses de phase $\lambda = \omega/k_x$ valant respectivement $\lambda_+ = U_n + c_n$ et $\lambda_- = U_n - c_n$, avec $c_n = \sqrt{g h_n}$.
5) En déduire que les solutions générales sont de la forme $\tilde{h}(x, t) = \frac{1}{2} H_+(x - \lambda_+ t) + \frac{1}{2} H_-(x - \lambda_- t)$.
6) Montrer que les amplitudes complexes des ondes élémentaires associées aux vitesses de phase $\lambda_{\pm}$ vérifient respectivement $\tilde{h}_m/h_n = \pm \tilde{U}_m/c_m$.
7) Montrer que $c(x, t) = \sqrt{g h(x, t)}$ peut s'écrire $c(x, t) = c_n + \tilde{c}(x, t)$ avec $\tilde{c} = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} \tilde{h}$, au premier ordre de l'approximation linéaire. Exprimer $\tilde{c}(x, t)$ à l'aide des fonctions $C_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} H_{\pm}$.
8) En déduire que $\tilde{U}(x, t) = C_+(x - \lambda_+ t) - C_-(x - \lambda_- t)$.
9) Montrer que la solution issue de la condition initiale définie par l'équation (2) avec $U_n = 0$ vérifie $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2} c_0(x - c_n t) + \frac{1}{2} c_0(x + c_n t)$ et $\tilde{U}(x, t) = c_0(x - c_n t) - c_0(x + c_n t)$.
10) Tracer $\tilde{c}(x, t)$ et $\tilde{U}(x, t)$ pour différents temps t représentatifs de la dynamique de la solution.

Régime non linéaire

Dans le cas où a n'est plus négligeable devant c_n , la solution issue de la condition initiale (2) avec $U(x, 0) = 0$ est représentée sur la figure 1 pour $l = 30$, $c_n = 10$ et $a = 2$. On suppose, comme le suggère le résultat de la simulation numérique (méthode des caractéristiques) représentée sur cette figure, qu'il n'y a pas de formation de choc pour $t \in [0, 5]$.

- 11) Montrer qu'il existe trois régions uniformes dans la portion de plan (x, t) représentée sur la figure. Dessiner ces trois régions et indiquer la valeur de (U, c) dans chacune des régions.

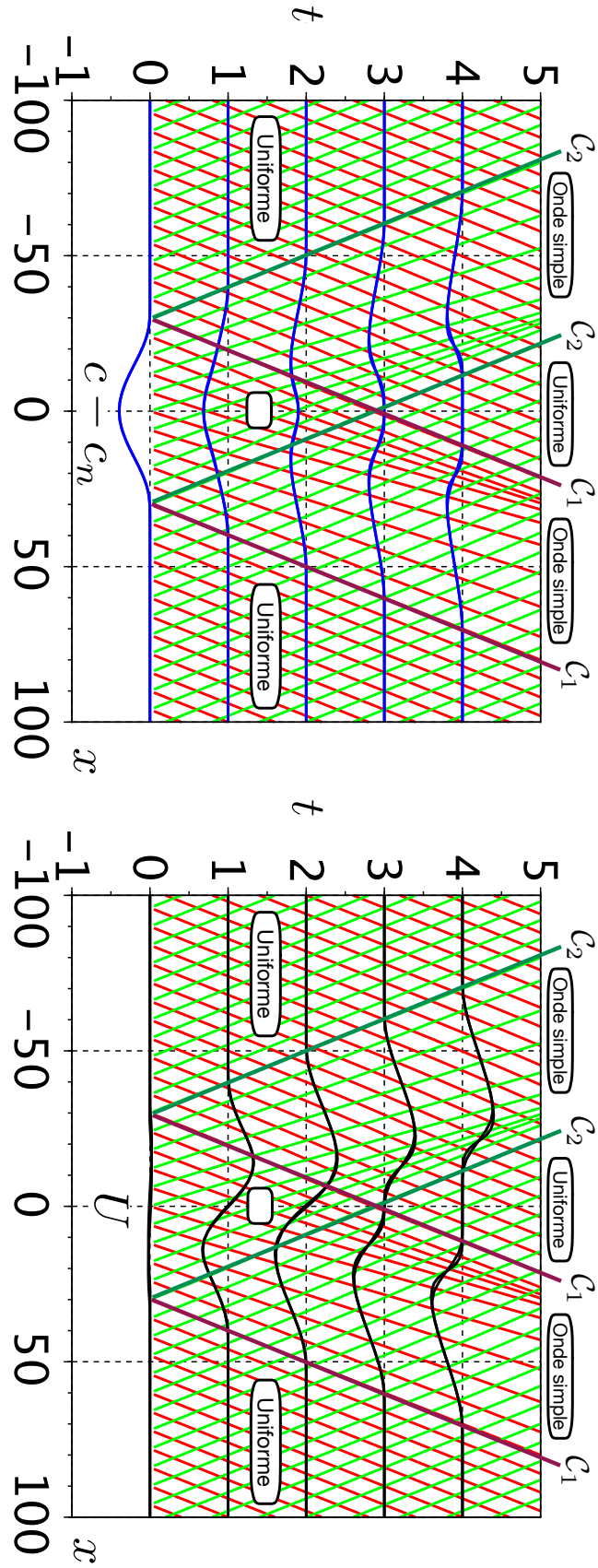


FIGURE 1 – Évolution d'une condition initiale symétrique par les équations de Saint-Venant non linéaires. Tracé des courbes caractéristiques C_1 et C_2 . a) Solution $c(x, t) - c_n$. b) Solution $U(x, t)$.

- 12) Montrer qu'une famille de caractéristiques sont des droites dans chaque région "onde simple" de la figure 1. Indiquer lesquelles et les dessiner.
- 13) Expliquer qualitativement l'évolution du profil $c(x, t)$ à partir de ces tracés.
- 14) Montrer que $U = 2(c - c_n)$ ou $U = -2(c - c_n)$ suivant que l'on se trouve dans des régions que l'on déterminera. Expliquer qualitativement l'évolution de $U(x, t)$.
- 15) Indiquer les courbes caractéristiques qui ne sont pas des droites.

Du non linéaire au linéaire

On note $\tilde{c}(x, t) = c(x, t) - c_n$ et $\tilde{U}(x, t) = U(x, t)$ et on suppose que ces champs sont petits devant c_n .

- 16) Montrer que l'on peut approximer chaque famille de caractéristique par des une famille de droites parallèle.
- 17) Résoudre le problème aux conditions initiales à l'aide de la méthode des caractéristiques.
- 18) Comparer avec le résultat trouvé plus haut, dans le cas linéaire, par une autre méthode.

Corrigé 0.1 Conditions initiales et Saint-Venant

- 1) Le tracé de $c_0(x)$ est la première courbe de la figure 1a) augmenté de la valeur constante c_n .

Régime linéaire

2) Les équations de Saint-Venant linéarisées autour de l'équilibre s'écrivent $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$. 3) L'invariance par translations en x et en t du système linéaire à coefficient réel permet de chercher des solutions complexes pour en déduire des solutions réelles en prenant leurs parties réelles. 4) En reportant l'expression dans le système linéaire, on obtient $(s + i k_x U_n) \tilde{h}_m + i k_x h_n \tilde{U}_m = 0$ et $(s + i k_x U_n) \tilde{U}_m + i k_x g \tilde{h}_m = 0$. En éliminant, par exemple, $\tilde{U}_m$, on obtient $(s + i k_x U_n)^2 = -g h_n k_x^2$. On en déduit $s = -i k_x U_n \pm i k_x c_n$. Donc $\sigma = 0$ et $\omega_{\pm} = (U_n \pm c_n) i k_x$ et $\lambda_{\pm} = U_n \pm c_n$. 5) Comme $\tilde{h}(x, t)$ est la partie réelle d'une combinaison linéaire des solutions complexes de base, cette solution est la forme $\tilde{h}(x, t) = f(x - \lambda_+ t) + g(x - \lambda_- t)$. Il suffit de choisir les notations $f = H_+/2$ et $g = H_-/2$ pour obtenir la forme indiquée. 6) En reportant l'expression de $s = -i \omega_{\pm}$ dans l'équation $(s + i k_x U_n) \tilde{h}_m + i k_x h_n \tilde{U}_m = 0$, par exemple, on obtient que $\tilde{h}_m/h_n = \tilde{U}_m/c_n$ pour $\omega_+ = (U_n + c_n) k_x$ et $\tilde{h}_m/h_n = -\tilde{U}_m/c_n$ pour $\omega_- = (U_n - c_n) k_x$. 7) On $c = \sqrt{g(h_n + \tilde{h})} = c_n (1 + \tilde{h}/h_n)^{1/2} = c_n [1 + \tilde{h}/(2h_n) + O(\tilde{h}^2/h_n^2)]$. D'où $c \sim c_n + \tilde{c}$ avec $\tilde{c} = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} \tilde{h}$. 8) Comme $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} \tilde{h} = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} [\frac{1}{2} H_+(x - \lambda_+ t) + \frac{1}{2} H_-(x - \lambda_- t)]$, on peut écrire $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2} C_+(x - \lambda_+ t) + \frac{1}{2} C_-(x - \lambda_- t)$. 9) Comme $\tilde{U}_m = \frac{c_n}{h_n} \tilde{h}_m$ pour les ondes de célérité λ_+ et $\tilde{U}_m = -\frac{c_n}{h_n} \tilde{h}_m$ pour les ondes de célérité λ_- on peut écrire $\tilde{U}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} H_+(x - \lambda_+ t) - \frac{1}{2} \frac{c_n}{h_n} H_-(x - \lambda_- t)$ et donc $\tilde{U}(x, t) = C_+(x - \lambda_+ t) - C_-(x - \lambda_- t)$. 10) À $t = 0$, on doit avoir $c_0(x) = \frac{1}{2} C_+(x) + \frac{1}{2} C_-(x)$ et $\tilde{U}(x, 0) = 0 = C_+(x) - C_-(x)$, d'où $C_+(x) = C_-(x) = c_0(x)$. On en déduit l'expression indiquée de la solution. 11) Les tracés des profils $\tilde{c}(x, t)$ et $\tilde{U}(x, t)$ pour $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sont représentés sur la figure 1.

Régime non linéaire

12) Les régions $x \geq l + c_n t$, à droite de la $\mathcal{C}_1$ issue du point $(l, 0)$ et $x \leq -l - c_n t$, à gauche de la $\mathcal{C}_2$ issue du point $(-l, 0)$ sont uniforme avec $(c, U) = (c_n, 0)$. La $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$ issue de $(-l, 0)$ et la $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = l - c_n t$ issue de $(l, 0)$ se coupent au point $(0, l/c_n) = (0, 3)$. La région comprise en ces deux droites pour $t \in [l/c_n, 5] = [3, 5]$ est uniforme, avec $(c, U) = (c_n, 0)$, dans la mesure où chacun de ces points est traversé par une $\mathcal{C}_1$ avec $J_1 = 2c_n$ et un $\mathcal{C}_2$ avec $J_2 = -2c_n$. En effet, ces

caractéristiques ne traversent pas de choc, ce qui ne perturbe par la valeur des invariants de Riemann J_1 et J_2 . **13)** La région comprise entre la $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = -l - c_n t$ et la $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$, privée de la région uniforme, est une onde simple pour $t \leq 5$ car adjacente à deux régions uniformes. Ses caractéristiques $\mathcal{C}_2$ sont donc des droites. Il en va de même pour la région symétrique par rapport à l'axe Ot , en inversant les $\mathcal{C}_1$ et le $\mathcal{C}_2$. On a en effet supposé l'absence de formation de choc pour $t \leq 5$. **14)** On retrouve le comportement de la solution linéaire avec la création de chocs d'amplitude a dont les trajectoires sont respectivement asymptotiques, pour $t \rightarrow \infty$, aux droites $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = l - c_n t$ et $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$. Pour $t \rightarrow \infty$, ces chocs sont précédés par un profil linéaire entre les droites $\mathcal{C}_2$ d'équations $x = -l - c_n t$ et $x = l - c_n t$ pour le profil se propageant vers la gauche et les droites $\mathcal{C}_1$ d'équations $x = -l + c_n t$ et $x = l + c_n t$ pour le profil se propageant vers la droite. **15)** Dans la région comprise entre les droites $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = -l - c_n t$ et $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$, on a $J_1 = U + 2c = 2c_n$ d'où $U = -2(c - c_n)$. Dans la région comprise entre les droites $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = l + c_n t$ et $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = l - c_n t$, on a $J_2 = U - 2c = -2c_n$ d'où $U = 2(c - c_n)$. Ce n'est pas le cas dans le triangle compris entre la $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$ et $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = l - c_n t$ pour $t < l/c_n = 3$, où les deux ondes non linéaires se superposent. **16)** Les $\mathcal{C}_1$ sont courbes dans l'onde simple se propageant vers la gauche. Les $\mathcal{C}_2$ sont courbes dans l'onde simple se propageant vers la droite. Les $\mathcal{C}_1$ et les $\mathcal{C}_2$ sont courbes dans le triangle où les deux ondes non linéaires se superposent.

Du non linéaire au linéaire

17) Comme $\lambda_+ = U + c \sim c_n$ et $\lambda_- = U - c \sim -c_n$, les $\mathcal{C}_1$ sont des droites d'équations $x = a + c_n t$ avec $a \in \mathbb{R}$ et les $\mathcal{C}_2$ sont des droites d'équations $x = a - c_n t$ avec $a \in \mathbb{R}$. **18)** Dans la région comprise entre la $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = -l - c_n t$ et la $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$, on a $J_2 = U - 2c = -2c_n + \tilde{U} - 2\tilde{c} = -2c_n$, d'où $\tilde{U} = 2\tilde{c}$. On a également $J_1 = U + 2c = 2c_n + \tilde{U} + 2\tilde{c} = 2c_0(x + c_n t) = 2c_n + 2\tilde{c}_0(x + c_n t)$, d'où $\tilde{U} + 2\tilde{c} = 4\tilde{c} = 2\tilde{c}_0(x + c_n t)$ et donc $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2}\tilde{c}_0(x + c_n t)$. On démontre de même que $\tilde{U} = -2\tilde{c}$ et $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2}\tilde{c}_0(x - c_n t)$ dans la région symétrique par rapport à l'axe des t . Dans le triangle compris entre la $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = -l + c_n t$ et la $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = l - c_n t$ pour $t \leq l/c_0 = 3$, instant où ces droites se coupent, on a $J_1 - 2c_n = \tilde{U} + 2\tilde{c} = 2\tilde{c}_0(x - c_n t)$ et $J_2 + 2c_n = \tilde{U} - 2\tilde{c} = -2\tilde{c}_0(x + c_n t)$. On en déduit $\tilde{c}(x, t) = \frac{1}{2}\tilde{c}_0(x - c_n t) + \frac{1}{2}\tilde{c}_0(x + c_n t)$ et $\tilde{U}(x, t) = \tilde{c}_0(x - c_n t) - \tilde{c}_0(x + c_n t)$. **19)** On retrouve la solution linéaire obtenue au début du problème.