

Olivier Thual

Corrigés des Devoirs Maison
du cours
“Hydraulique à surface libre”



Apprentissage par Problèmes et Projets (APP)

Toulouse INP - ENSEEIHT

Département “Mécanique des Fluides, Énergétique et Environnement” (MFEE)

Année 2019-2020, 17 mai 2019

Table des matières

1	Devoirs Maison	5
1	DM 1 : Ressauts hydrauliques dans un canal	5
2	DM 2 : Tuyère hydraulique de Laval	15

Chapitre 1

Devoirs Maison

1 DM 1 : Ressauts hydrauliques dans un canal

On considère un canal vitré, de largeur $L = 25$ cm, compris entre deux vannes situées en $x = 0$ et $x = d$ avec $d = 12$ m. Le canal possède une légère pente I qui permet d'éviter que l'eau ne stagne après une vidange complète. On note Q le débit d'eau circulant dans le canal dans le sens des x positifs et l'on suppose que le régime de la pompe qui l'alimente est réglé pour obtenir un débit Q pouvant aller jusqu'à environ $Q_{max} = 30$ l s⁻¹. On suppose que la hauteur h et la vitesse moyenne U dans le canal obéissent aux équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = gI - \frac{1}{2} C_f \frac{U|U|}{h} \quad \text{avec} \quad C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}, \quad (1.1)$$

où g est la gravité, $I = \sin \gamma$ la pente, $g' = g \cos \gamma$ et K_s est le nombre de Strickler supposé constant dans le canal. On note $q = Uh$ le débit linéique. On pourra approximer g' par g et prendre $g = 10$ m s⁻² pour simplifier les calculs.

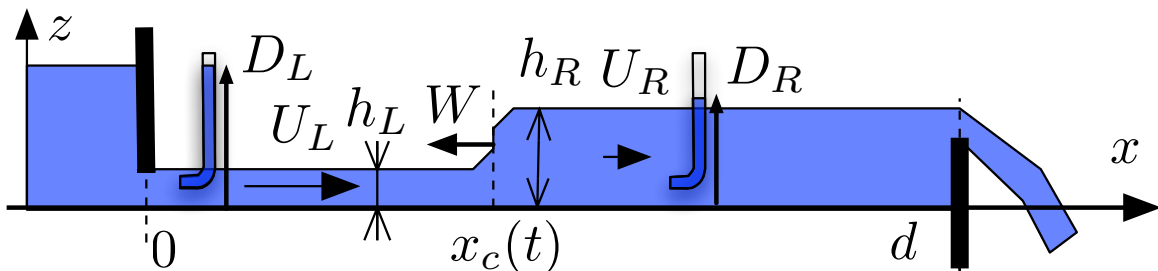


FIGURE 1.1 – Ressaut instationnaire observé dans un canal vitré.

En actionnant les vannes amont et aval, on suppose que l'on est capable de générer un ressaut stationnaire ou instationnaire en un point respectivement fixe $x_c \in]0, d[$ ou mobile $x_c(t) \in]0, d[$ (figure 1.1) du canal vitré. On note h_L et h_R les hauteurs d'eau respectivement mesurées à gauche et à droite du ressaut et l'on suppose $h_R > h_L$. On note $U_L \geq 0$ et $U_R \geq 0$ les vitesses de la couche fluide respectivement à gauche et à droite du ressaut et $W = \dot{x}_c(t)$ la vitesse du ressaut lorsqu'il est mobile. Des tubes de Pitot, petits tuyaux ouverts dont une extrémité fait face à l'écoulement (figure 1.1), permettent de mesurer les hauteurs D_L et D_R et donc la perte de charge singulière $\Delta H = D_L - D_R$ à travers le ressaut.

Caractéristiques sans pente ni frottement

Dans un premier temps, on néglige la pente et le frottement.

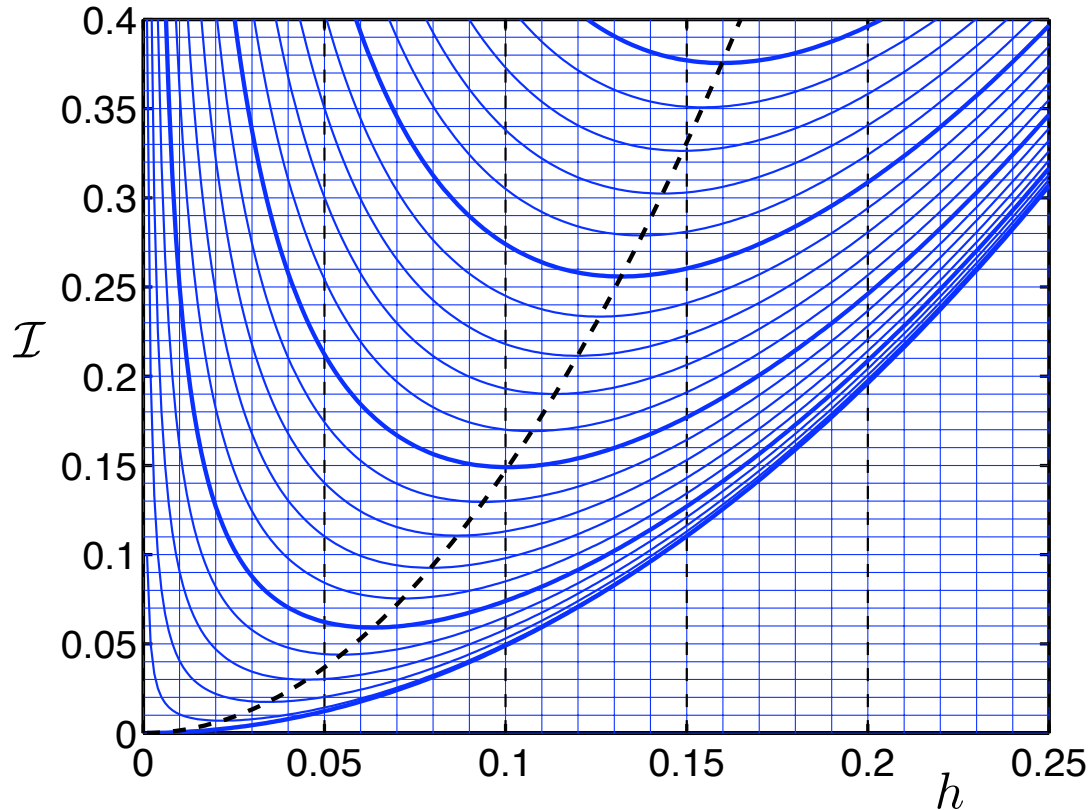


FIGURE 1.2 – Tracé de la fonction $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$ (en $m^3 s^{-2}$) en fonction de h (en m) pour q variable par pas de $.01 m^2 s^{-1}$.

- 1) Écrire les relations de saut traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement à travers le ressaut.
- 2) Montrer que dans le cas particulier $W = 0$, on a $\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R)$ où \mathcal{I} est la fonction impulsion $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$.
- 3) On mesure $h_L = 5$ cm et $h_R = 10$ cm pour un ressaut immobile. En déduire le débit Q en l/s et les vitesses U_L et U_R en m/s . On pourra se servir de la figure 1.2.
- 4) Tracer, dans le plan (x, t) , les caractéristiques des équations de Saint Venant de part et d'autre de ce choc immobile. Indiquer dans un tableau les valeurs numériques des inverses des pentes (en m/s) de chacune des familles des caractéristiques dessinées.
- 5) Dans le cas où $W \neq 0$, on définit $q_W = h(U - W)$. Montrer que l'on a $\mathcal{I}(q_W, h_L) = \mathcal{I}(q_W, h_R)$.
- 6) On baisse complètement la vanne aval et on observe, après un transitoire, un écoulement stationnaire de hauteur $h_L = 10$ cm à sa gauche. On ferme alors brusquement la vanne et on observe un ressaut mobile de vitesse W négative tel que $h_R = 17$ cm. En déduire les valeurs de q_W , puis de W et enfin de q à l'aide de l'abaque de la figure 1.2.
- 7) Tracer, dans le plan (x, t) , les caractéristiques des équations de Saint Venant de part et d'autre de ce choc mobile. Indiquer dans un tableau les valeurs numériques des inverses des

pentés (en m/s) de chacune des familles des caractéristiques dessinées.

Mise en mouvement d'un ressaut immobile

On suppose que l'on est en présence d'un ressaut immobile situé en $x_c = 6$ m tel que $Q = 15$ l/s et $h_L = 5$ cm.

- 8) Déterminer graphiquement h_R .
- 9) A $t = 0$, on abaisse la vanne aval pour faire passer brusquement la hauteur d'eau de la valeur h_R à la valeur $h_f = 8$ cm. Calculer le temps T au bout duquel le ressaut devient mobile en négligeant les termes de pente et de frottement.
- 10) Dessiner schématiquement dans ce cas les caractéristiques dans un plan (x, t) pour $t \leq T$.
- 11) Calculer la vitesse U_f à gauche de la vanne aval dans les premiers instants qui suivent l'abaissement de la vanne.

Perte de charge pour un ressaut stationnaire

On s'intéresse ici à la famille des ressauts stationnaires ($W = 0$) obtenus pour des débits et des réglages de vannes différents. On mesure alors sa position $x = x_c$, les hauteurs h_L et h_R ainsi que la perte de charge $\Delta H = D_L - D_R$ à l'aide de tubes de Pitot (voir figure 1.1).

- 12) En utilisant les abaques graphiques de la figure 1.4, indiquer les valeurs manquantes du tableau 1.1, pour $i = 1, 2, \dots, 20$.

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (l/s)	7.5	7.5	7.5	10	1071013	2018
q (m ² .s ⁻¹)	.03	.03	.03	.04	.048111416	.08
x_c (m)	1.5	2	5	2.5	4	7.5	0	3	6	11.5
h_L (cm)	1.5	2	335	4	315	5	7
h_R (cm)	10.31	6.5	11.86	7.2	19.4	16.21719
\mathcal{I} (m ³ .s ⁻²)	.061	.04724	.067912	.168	.1420

TABLE 1.1 – Tableau "ressauts stationnaires" à compléter avec les valeurs i pour $i = 1, 2, \dots, 20$.

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_c (cm)	4.5	8.7
D_L (cm)	21.9	39.2
D_R (cm)	10.8	20.3
ΔH (cm)	11.1	19
h_L (cm)	1.5	2	335	4	315	5	7
h_R (cm)	10.31	6.5	11.86	7.2	19.4	16.21719
$\frac{(h_R-h_L)^3}{4h_R h_L}$ (cm)	11.0	18.9

TABLE 1.2 – Tableau "perte de charge des ressauts stationnaires" à compléter.

- 13) On définit la hauteur critique par la relation $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. À partir des abaques de la figure 1.4, compléter les valeurs de h_c dans le tableau 1.2.

- 14) On mesure la charge hydraulique avant et après le ressaut à partir de la hauteur du fluide dans des tubes de Pitot. Indiquer les hauteurs D_L et D_R mesurées dans le tableau 1.2.
- 15) En déduire les pertes de charge ΔH pour les dix expériences du tableau 1.2.
- 16) Vérifier, pour les dix cas du tableau, que l'on a $\Delta H = (h_R - h_L)^3 / (4h_R h_L)$.

Position du ressaut stationnaire dans le canal

On s'intéresse ici aux profils stationnaires $h(x)$ et $U(x)$, solutions de l'équation (1.1), de part et d'autre du ressaut stationnaire. On suppose que $U \geq 0$ dans tout le canal.

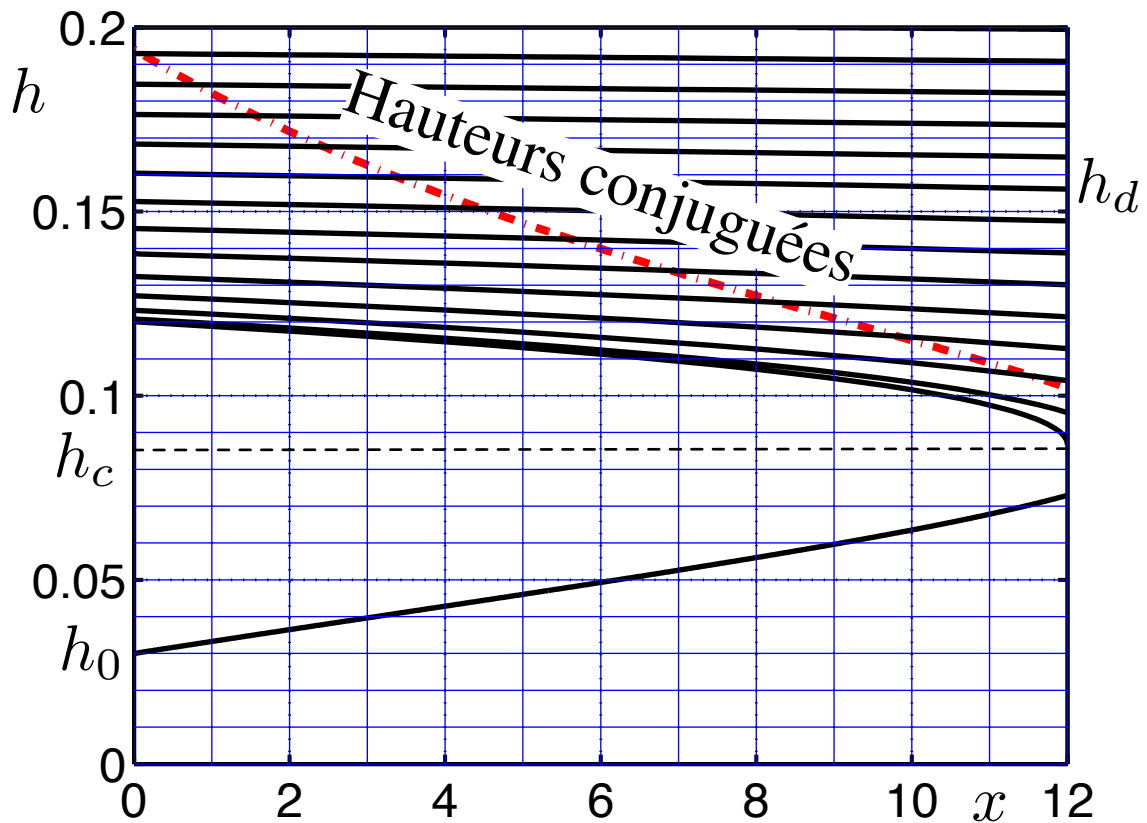


FIGURE 1.3 – Solutions de $G[h(x)/h_c] = A(x - x_0)$ pour $q = 0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $K_s = 100 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ dans un canal de longueur $d = 12 \text{ m}$. Courbe telle que $h(0) = h_0 = 3 \text{ cm}$ ainsi que la courbe de ses hauteurs conjuguées pour l'impulsion (tiretée). Courbes telles que $h(d) = h_d$ avec $h_d \geq h_c$ et $h_c = 8.7 \text{ cm}$.

- 17) Justifier que le débit linéique $q = U h$ est constant. Exprimer le nombre de Froude $Fr(x) = U(x) / \sqrt{g h(x)}$ sous la forme $Fr = P(h/h_c)$ où $P(H)$ est une fonction que l'on explicitera.
- 18) Montrer que $h(x)$ est solution de l'équation $\frac{dh}{dx} = -J / (1 - Fr^2)$ avec $J = q^2 K_s^{-2} h^{-\alpha_1}$ où α_1 est un coefficient que l'on précisera.
- 19) En déduire que $\frac{dh}{dx} = \mathcal{F}(h)$ avec $\mathcal{F}(h)/h_c = A F(h/h_c)$ où $F(H) = H^{-10/3} / (H^{-3} - 1)$ et $A = q^{-8/9} K_s^{\alpha_2} g^{\alpha_3}$ où α_2 et α_3 sont des constantes que l'on précisera.
- 20) Tracer schématiquement le graphe de la fonction $F(H)$. En déduire l'existence de courbes de remous $h(x)$ croissantes avec x , que l'on appellera "courbes de type H_3 ", ainsi que des

"courbes de type H_2 " décroissantes. Tracer schématiquement l'allure des courbes de remous H_3 et H_2 sur un même graphe.

- 21) Montrer que les solutions de l'équation $H'(X) = F[H(X)]$ vérifient l'équation implicite $G[H(X)] = X - X_0$ où X_0 est une constante et $G(H) = \frac{3}{4} H^{\alpha_4} - \frac{3}{13} H^{\alpha_5}$ où α_4 et α_5 sont des constantes que l'on précisera.
- 22) Tracer schématiquement le graphe de la fonction $X = G(H)$ dans le demi-plan (X, H) pour $X \in [-2, 1]$ et $H \in [0, 2]$.
- 23) Montrer que les solutions stationnaires sont de la forme $h(x) = h_c H[A(x - x_0)]$ où $H(X)$ est une solution de l'équation différentielle $H'(X) = F[H(X)]$. En déduire un tracé plus précis des courbes de remous de types H_3 et H_2 .
- 24) La figure 1.3 représente des courbes $h(x)$ solutions de l'équation $G[h(x)/h_c] = A(x - x_0)$, d'une part pour $h(0) = h_0 = 3$ cm, d'autre part pour $h(d) = h_d$ variable avec $h_d \geq h_c$, le débit étant fixé à $q = 0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. La courbe tiretée représente les hauteurs conjuguées de la courbe issue de $h(0) = h_0 = 3$ cm. À partir de ces tracés, donner les valeurs des positions x_c du ressaut pour les valeurs de h_d suivantes : $h_d = 19,4$ cm (exp. 7), $h_d = 16,2$ cm (exp. 8), $h_d = 13,9$ cm (exp. 9) et $h_d = 10,6$ cm (exp. 10). Tracer l'allure de la ligne d'eau de part et d'autre du ressaut stationnaire. On négligera les perturbations des courbes de remous dues à la forme de cette vanne.

Corrigé 0.1 Ressauts hydrauliques dans un canal

Caractéristiques sans pente ni frottement

1) Les relations de saut pour un ressaut sur fond plat sont $h_L(U_L - W) = h_R(U_R - W)$ et $h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R(U_R - W) + \frac{1}{2} g h_R^2$. **2)** Dans le cas $W = 0$, on a $q = h_L U_L = h_R U_R$. En reportant $U_L = q/h_L$ et $U_R = q/h_R$ dans la deuxième relation de saut, on obtient $\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R)$. **3)** La courbe iso- q pour laquelle les hauteurs $h_L = 5$ cm et $h_R = 10$ cm sont conjuguées correspond à $q = .06 \text{ m}^2/\text{s}$. On en déduit $Q = q L = 15 \text{ l/s}$, $U_L = q/h_L = 1.2 \text{ m/s}$ et $U_R = q/h_R = 0.6 \text{ m/s}$. **4)** Comme $c_L = \sqrt{g h_L} = 0.7 \text{ m/s}$ et $c_R = \sqrt{g h_R} = 1 \text{ m/s}$, on a $U_L + c_L = 1.9 \text{ m/s}$, $U_L - c_L = 0.5 \text{ m/s}$, $U_R + c_R = 1.6 \text{ m/s}$ et $U_R - c_R = -0.4 \text{ m/s}$. Le tracé des caractéristiques et de la trajectoire du choc dans le plan (x, t) est représenté sur la figure 1.5a). **5)** La deuxième relation de saut peut se mettre sous la forme $h_L (U_L - W)^2 + h_L W (U_L - W) + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R (U_R - W)^2 + h_R W (U_R - W) + \frac{1}{2} g h_R^2$. Comme $q_W = h_L (U_L - W) = h_R (U_R - W)$, on a $h_L (U_L - W)^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R (U_R - W)^2 + \frac{1}{2} g h_R^2$. En utilisant $(U_R - W) = q_W/h_R$ et $(U_L - W) = q_W/h_L$ on obtient $\mathcal{I}(q_W, h_L) = \mathcal{I}(q_W, h_R)$. **6)** La courbe iso- q_W pour laquelle les hauteurs $h_L = 10$ cm et $h_R = 17$ cm sont conjuguées correspond à $q_W = .15 \text{ m}^2/\text{s}$. Comme $U_R = 0$, on a $q_W = -h_R W$ d'où $W = -q_W/h_r = -0.9 \text{ m/s}$. Comme $q = h_L U_L$, on peut écrire $q_W = h_L (U_L - W) = q - h_L W$ et donc $q = q_W + h_L W = 0.06 \text{ m}^2/\text{s}$. **7)** On calcule $U_L = q/h_L = 0.6 \text{ m/s}$ et on a $U_R = 0 \text{ m/s}$. Comme $c_L = \sqrt{g h_L} = 1 \text{ m/s}$ et $c_R = \sqrt{g h_R} = 1.3 \text{ m/s}$, on a $U_L + c_L = 1.6 \text{ m/s}$, $U_L - c_L = -0.4 \text{ m/s}$, $U_R + c_R = 1.3 \text{ m/s}$ et $U_R - c_R = -1.3 \text{ m/s}$. Le tracé des caractéristiques et de la trajectoire du choc dans le plan (x, t) est représenté sur la figure 1.5b).

Mise en mouvement d'un ressaut immobile

8) Comme $q = Q/L = 0.06 \text{ m}^2/\text{s}$, on lit $h_R = 10$ cm sur le graphique. **9)** Comme $U_R = q/h_R = 0.6 \text{ m/s}$ et $c_R = \sqrt{g h_R} = 1 \text{ m/s}$, l'information sur le mouvement de la vanne se propage à la vitesse $U_R - c_R = -0.4 \text{ m/s}$ en ce qui concerne l'amont. Elle parcourt donc la distance

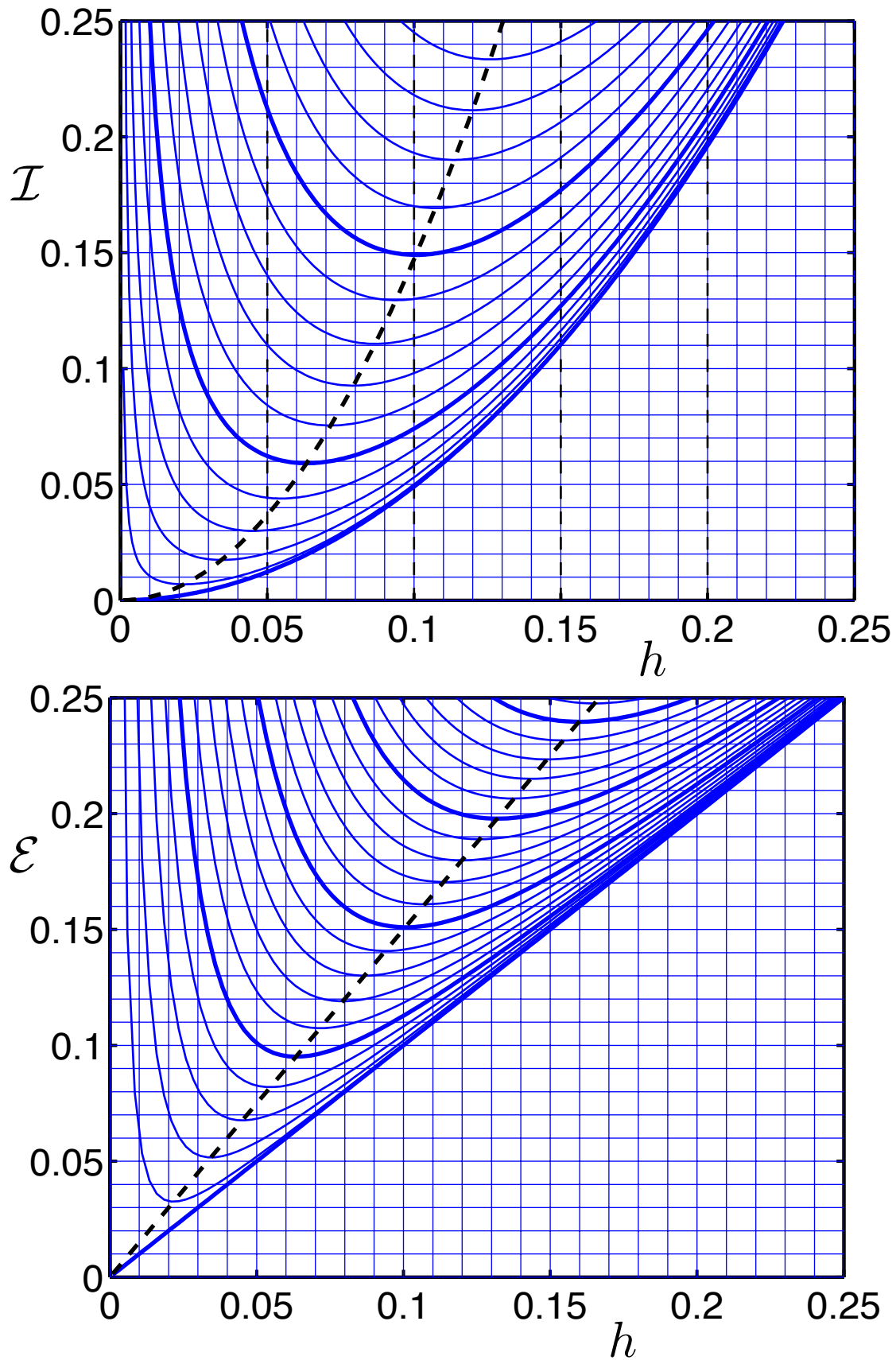


FIGURE 1.4 – Tracé en fonction de h (en m), pour q variable par pas de $.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, des fonctions : a) $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$ (en $\text{m}^3 \text{ s}^{-2}$) et b) $\mathcal{E}(q, h) = h + q^2/(2gh^2)$ (en m).

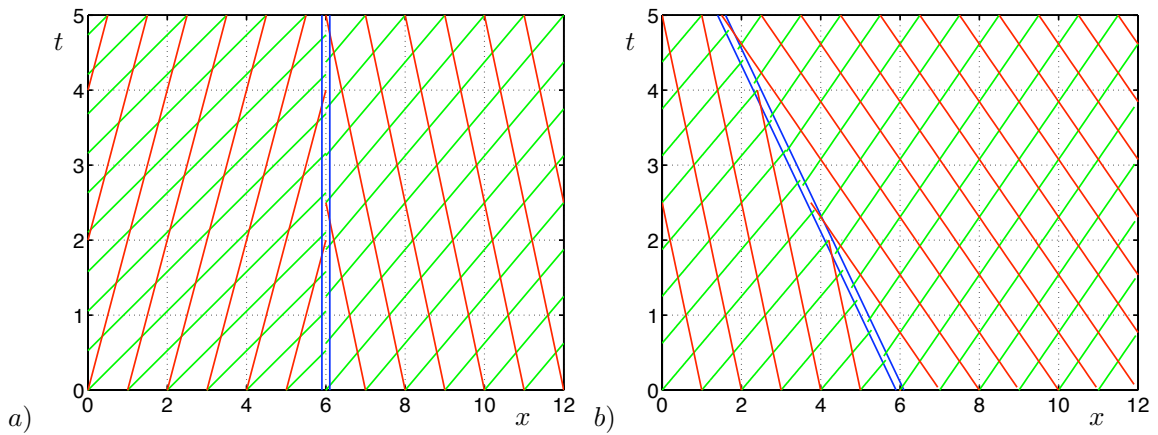
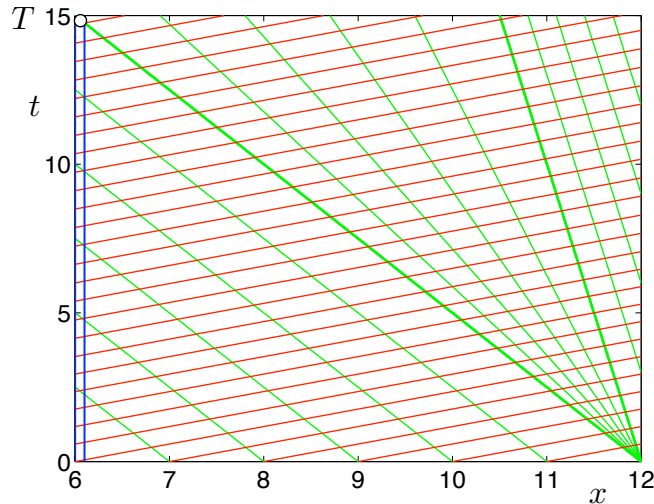


FIGURE 1.5 – Courbes caractéristiques autour du choc a) immobile ou b) mobile.

$d - x_c = 6$ m en $T = (d - x_c)/|U_R - c_R| = 15$ s. **10)** Le tracé des caractéristiques dans le plan (x, t) pour $t \leq T$ est représenté sur la figure 1.6. On est en présence d'une onde de détente centrée. **11)** En utilisant l'invariance de $J_1 = U + 2c$ le long d'une caractéristique C_1 reliant l'axe des x à $t = 0$ à l'axe des t à $x = d$, on obtient que $U_R + 2c_R = U_f + 2c_f$ et donc $U_f = U_R + 2(c_R - c_f)$ avec $c_f = \sqrt{g h_f} = 0.9$ m/s. On a donc $U_f = 0.8$ m/s.


 FIGURE 1.6 – Onde de détente centrée qui atteint le choc au bout du temps T .

Perte de charge pour un ressaut stationnaire

12) La détermination graphique de h_R en fonction de h_L est présentée sur la figure 1.8a en utilisant la relation $\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R)$. Les valeurs manquantes du tableau 1.1 sont indiquées dans le tableau 1.3 en utilisant également la relation $Q = qL$.

13) Les valeurs de h_c se lisent sur la figure 1.8 en notant le minimum des courbes iso- q , en trait gras pour les valeurs de q considérées. Les valeurs manquantes de h_c dans le tableau 1.2 sont

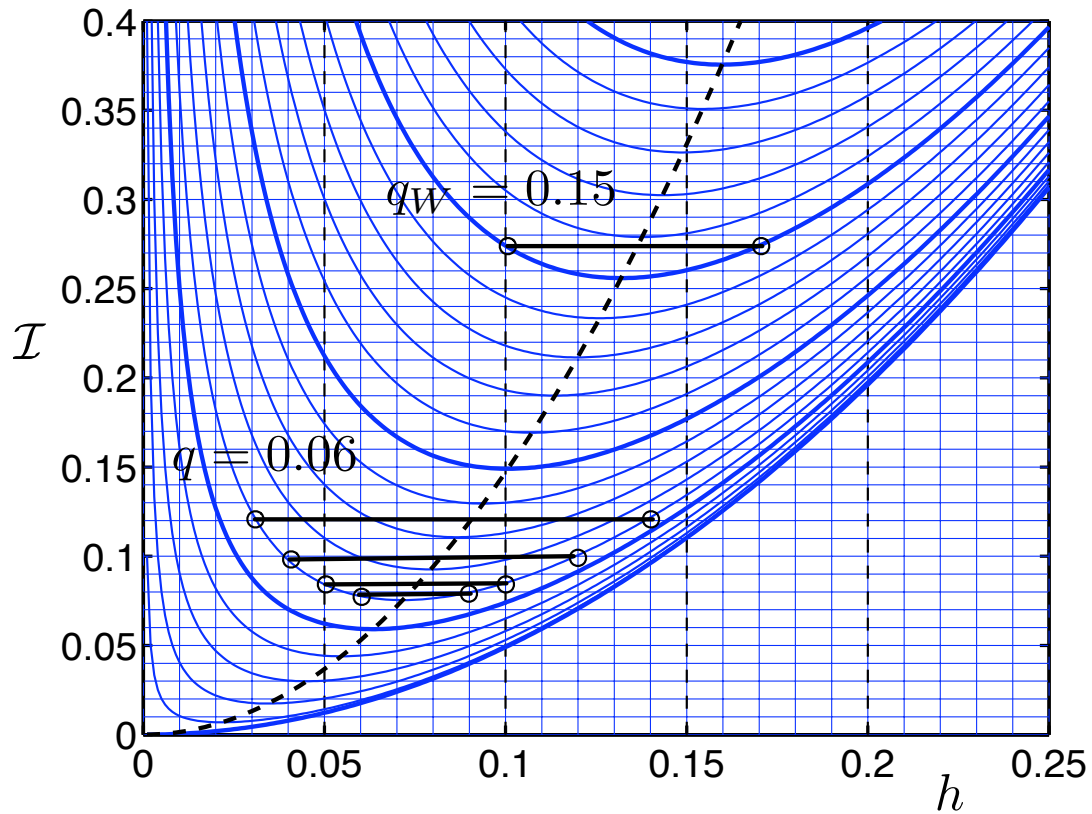


FIGURE 1.7 – Hauteurs conjuguées (h_L, h_R) pour $q = 0.06 \text{ m}^2/\text{s}$: (3 cm, 14 cm), (4 cm, 12 cm), (5 cm, 10 cm), (6 cm, 9 cm). Hauteurs conjuguées (h_L, h_R) pour $q_w = 0.15 \text{ m}^2/\text{s}$: (10 cm, 17 cm).

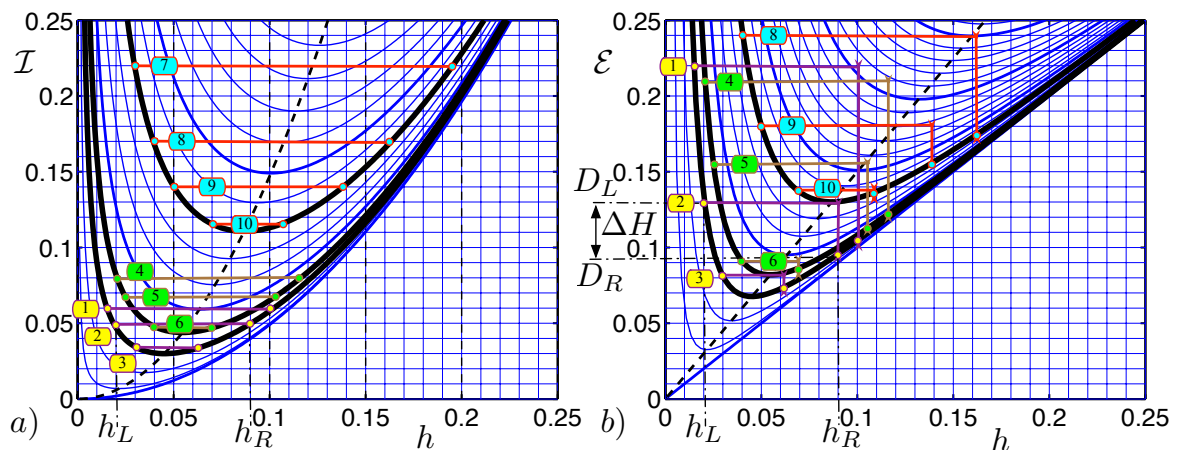


FIGURE 1.8 – Impulsion $\mathcal{I}(q, h)$ et énergie spécifique $\mathcal{E}(q, h)$ pour $q \in \{.03, .04, .08\} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. a) Détermination graphique des valeurs de h_R à partir de h_L . b) Détermination graphique de la perte de charge $\Delta H = D_L - D_R$.

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (l/s)	7.5	7.5	7.5	10	10	10	20	20	20	20
q ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	.03	.03	.03	.04	.04	.04	.08	.08	.08	.08
x_c (m)	1.5	2	5	2.5	4	7.5	0	3	6	11.5
h_L (cm)	1.5	2	3	2	2.5	4	3	4	5	7
h_R (cm)	10.3	8.6	6.5	11.8	10.2	7.2	19.4	16.2	13.9	10.6
\mathcal{I} ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$)	.061	.047	.034	.082	.067	.048	.22	.168	.14	.115

TABLE 1.3 – Tableau "ressauts stationnaires" complété par les valeurs manquantes.

indiquées dans le tableau 1.4. **14**) Comme la vitesse en nulle dans le tube, la conservation de la charge entraîne que $D_L = \mathcal{E}(q, h_L)$ et $D_R = \mathcal{E}(q, h_R)$. Ces valeurs se lisent sur la figure 1.8b. Les valeurs manquantes de D_L et D_R du tableau 1.2 sont indiquées dans le tableau 1.4. **15**) La perte de charge est $\Delta H = D_L - D_R$. Les valeurs manquantes de ΔH du tableau 1.2 sont indiquées dans le tableau 1.4. **16**) La perte de charge ΔH est présentée sur la figure 1.8a pour plusieurs valeurs de h_R et h_c . Cette perte de charge est bien une fonction décroissante de $h_R - h_c$, qui s'annule pour $h_R = h_c$.

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_c (cm)	4.5	4.5	4.5	5.5	5.5	5.5	8.7	8.7	8.7	8.7
D_L (cm)	21.9	13.5	8.1	22.4	15.5	9.1	39.2	24.4	18	13.7
D_R (cm)	10.8	9.3	7.6	12.4	11	8.8	20.3	17.4	15.6	13.6
ΔH (cm)	11.1	4.2	0.5	10.0	4.5	0.3	19	7	2.5	0.2
h_L (cm)	1.5	2	3	2	2.5	4	3	4	5	7
h_R (cm)	10.3	8.6	6.5	11.8	10.2	7.2	19.4	16.2	13.9	10.6
$\frac{(h_R - h_L)^3}{4h_R h_L}$ (cm)	11.0	4.2	0.55	10.0	4.5	0.28	18.9	7.0	2.5	0.16

TABLE 1.4 – Tableau "perte de charge des ressauts stationnaire" complété.

Position du ressaut stationnaire dans le canal

17) Comme les profils sont stationnaires, l'équation (1.1) entraîne que $q = U h$ est constant. En utilisant $q = U h$, on obtient $Fr = (h/h_c)^{-3/2}$ et l'on a donc $P(H) = H^{-3/2}$. **18**) Comme les profils sont stationnaires et que $U \geq 0$, l'équation (1.1) entraîne $U \frac{dU}{dx} + g \frac{dh}{dx} = -gU^2/(K_s^2 h^{4/3})$. En éliminant $U = q/h$, on obtient $(-q^2/h^3 + g) \frac{dh}{dx} = -gq^2/(K_s^2 h^{10/3})$ ce que l'on peut écrire sous la forme $\frac{dh}{dx} = -J/(1 - Fr^2)$ avec $J = q^2 K_s^{-2} h^{-10/3}$. On a donc $\alpha_1 = 10/3$. **19**) On a donc $\frac{dh}{dx} = -q^2 K_s^{-2} h^{-10/3} / [1 - (h/h_c)^{-3}] = h_c A F(h/h_c)$ avec $A = q^2 K_s^{-2} h_c^{-13/3}$. En utilisant la définition $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$ de la hauteur critique, on en déduit $A = q^{-8/9} K_s^{-2} g^{13/9}$. On a donc $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = 13/9$. **20**) Le graphe de la fonction $F(H)$ est présenté sur la figure 1.9. Si $h(x_0) < h_c$, la fonction $\mathcal{F}(h)$ est positive et donc $h(x)$ est croissante (courbe H_3). Si $h(x_0) > h_c$, la fonction $\mathcal{F}(h)$ est négative et donc $h(x)$ est décroissante (courbe H_2). Ces deux types de courbes atteignent la valeur h_c au bout d'une distance finie avec une pente $\frac{dh}{dx}$ infinie. L'allure de ces courbes est donnée sur la figure 1.9b. **21**) L'équation différentielle ordinaire $\frac{dH}{dX}/F(H) = 1$ s'écrit $(H^{1/3} - H^{10/3}) \frac{dH}{dX} = 1$ et s'intègre en $G(H) = X - X_0$ avec $G(H) = \frac{3}{4} H^{4/3} - \frac{3}{13} H^{13/3}$. On a donc $\alpha_4 = 4/3$ et $\alpha_5 = 13/3$. **22**) Le tracé du graphe de $G(H)$ est représenté sur la figure 1.9b. **23**) Les courbes de remous sont de la forme $h(x)/h_c = H[A(x - x_0)]$ où $H(X)$ est solution de l'équation implicite $X = G(H)$. Leur allure est donc donnée par la figure 1.9b. **24**) Les tracés

des lignes d'eau des expériences 7 à 10, en représentant le ressaut par une discontinuité, sont présentés sur la figure 1.10. On peut lire $x_c \in \{0, 3, 6, 11.5\}$ m et $h(d) \in \{19, 16.2, 14, 10.5\}$ respectivement.

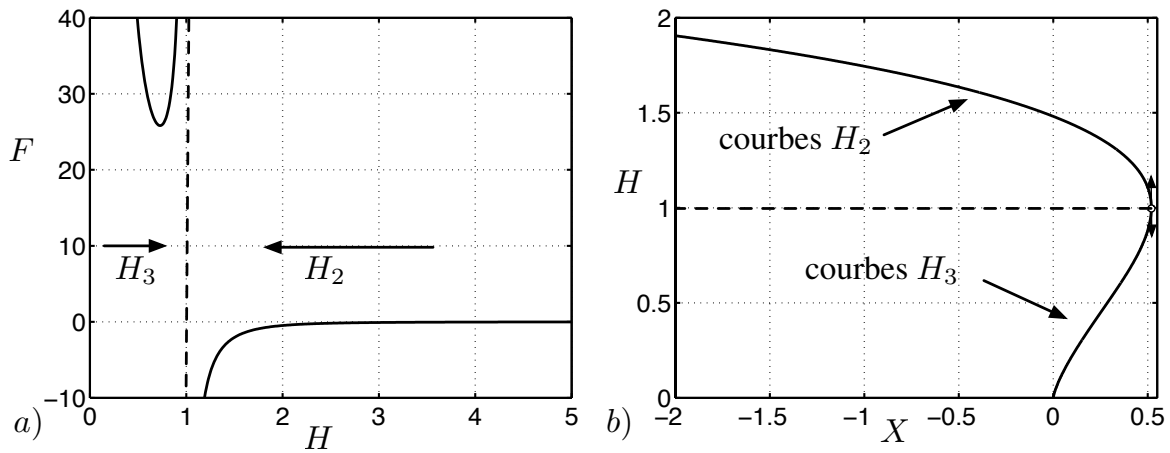


FIGURE 1.9 – a) Tracé de $F(H)$ en fonction de H . b) Graphe (X, H) de la fonction $X = G(H)$.

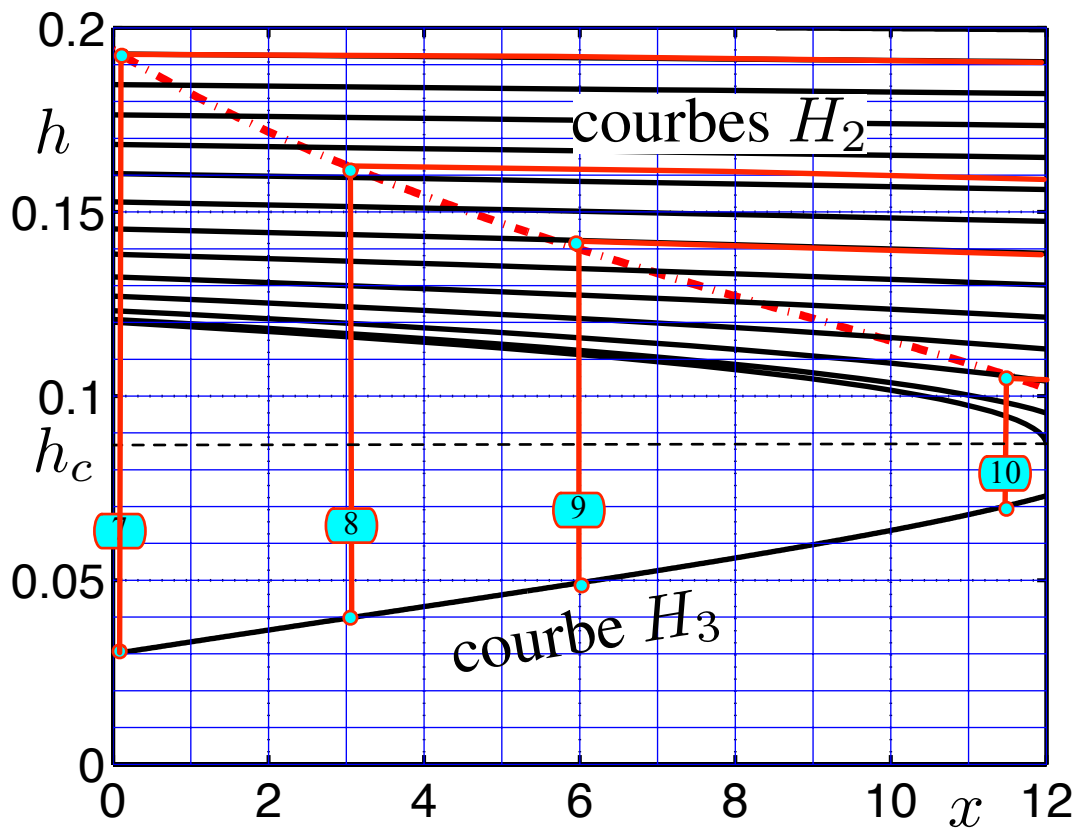


FIGURE 1.10 – Lignes d'eau avec $h(d)$ variable avec $q = 0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $h(0) = 3 \text{ cm}$ et $h(d) \geq h_c$. Les ressauts sont schématisés par une discontinuité.

2 DM 2 : Tuyère hydraulique de Laval

On dispose d'un canal à fond plat horizontal dont la largeur variable s'écrit $L(x) = L_a - r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec $r = 3$ cm, $\sigma = 50$ cm et $L_a = 25$ cm. On note $L_r = L_a - r = 22$ cm la largeur de la tuyère au col. On suppose que la hauteur $h(x)$ et la vitesse $U(x)$ de la couche d'eau sont stationnaires. On dispose, "loin" à l'amont de la tuyère en $x = x_a$, une vanne de fond dont l'ouverture réglable est notée e (figure 1.11). On cherche à décrire les régimes d'écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de e en négligeant toutes les pertes de charges.

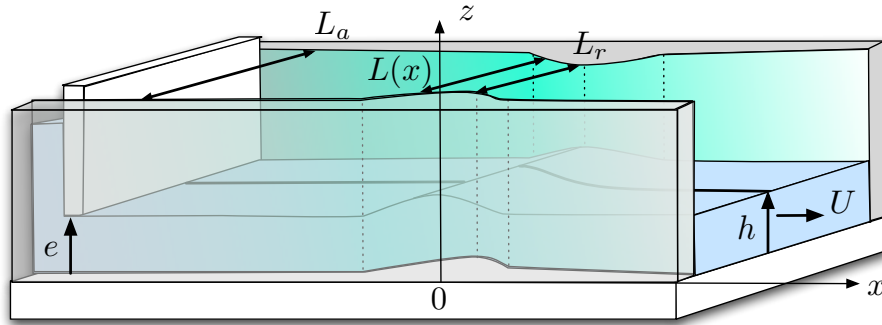


FIGURE 1.11 – Géométrie de la tuyère de Laval hydraulique.

- 25) Montrer que les grandeurs $Q = h(x) U(x) L(x)$ et $E = h(x) + U^2(x)/(2g)$ sont indépendantes de x pour les régimes stationnaires. Que représentent ces grandeurs ? Quelles sont leurs unités. Indiquer comment on peut faire varier leurs valeurs de manière indépendante.
- 26) On note $h_c(x) = g^{-1/3} L^{-2/3}(x) Q^{2/3}$. Que représente cette hauteur en un point x donné. On note $h_{ca} = h_c(x_a) = g^{-1/3} L_a^{-2/3} Q^{2/3}$, $h_{cr} = h_c(0)$ et $\Lambda(x) = L_a/L(x)$. On suppose que $h_{ca} = 5$ cm. À quel débit Q correspond ce cas ? On pourra utiliser l'abaque de la figure 1.15 qui trace $q(h) = g^{1/2} h^{3/2}$ en fonction de h . Montrer que $h_c(x) = h_{ca} \Lambda^{2/3}(x)$. En déduire que $h_{cr} = 5.44$ cm. Tracer l'allure de $h_c(x)$.
- 27) Montrer que la ligne d'eau $h(x)$ est solution de l'équation $\mathcal{H}[E, h(x)] = h_c(x)$ avec $\mathcal{H}(E, h) = 2^{1/3} h^{2/3} (E - h)^{1/3}$. Tracer $\mathcal{H}(E, h)$ en fonction de $h \in [0, 20]$ cm pour différentes valeurs de $E \in [0, 20]$ cm. Montrer que le maximum $2E/3$ de ces courbes est atteint pour $h = 2E/3$. En déduire le tracé de la droite qui relie ces maxima.

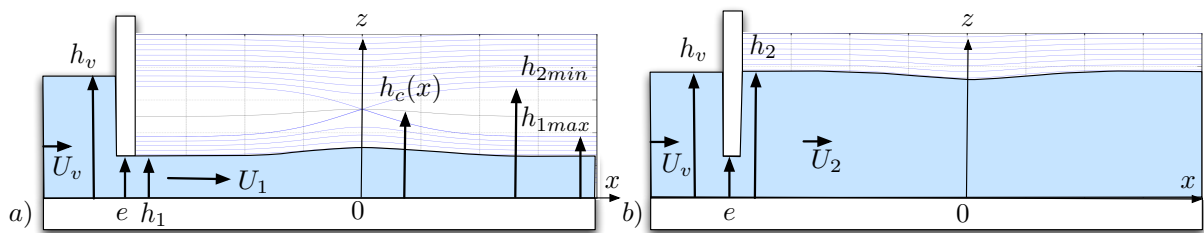


FIGURE 1.12 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture de vanne.

- 28) Pour $e = 2.5$ cm, on observe deux régimes tels que la hauteur h_v de la couche d'eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 1.12). À l'aval de cette vanne, cette hauteur est $h_1 = e$ pour le premier régime et h_2 pour le second. Déterminer, à l'aide des abaques de la figure 1.17, la charge spécifique commune aux deux régimes ainsi que h_v et h_2 .
- 29) Montrer que $h_{cr} \sim 5.4$ cm. Tracer les droites $\mathcal{H} = h_{ca}$ et $\mathcal{H} = h_{cr}$ sur les abaques de la figure 1.17. Montrer que $h_c(x) \in [h_{ca}, h_{cr}]$. En utilisant la relation $h_c(x) = \mathcal{H}(E, h)$,

dessiner l'allure des deux lignes d'eau stationnaires pour le cas $e = 2.5$ cm. Tracer ces lignes pour de nouvelles valeurs de e . Montrer qu'il existe une valeur maximale h_{1max} de h_1 , conjuguée vis-à-vis de l'énergie spécifique \mathcal{E} avec une valeur minimale h_{2max} de h_2 . Déterminer graphiquement ces valeurs.

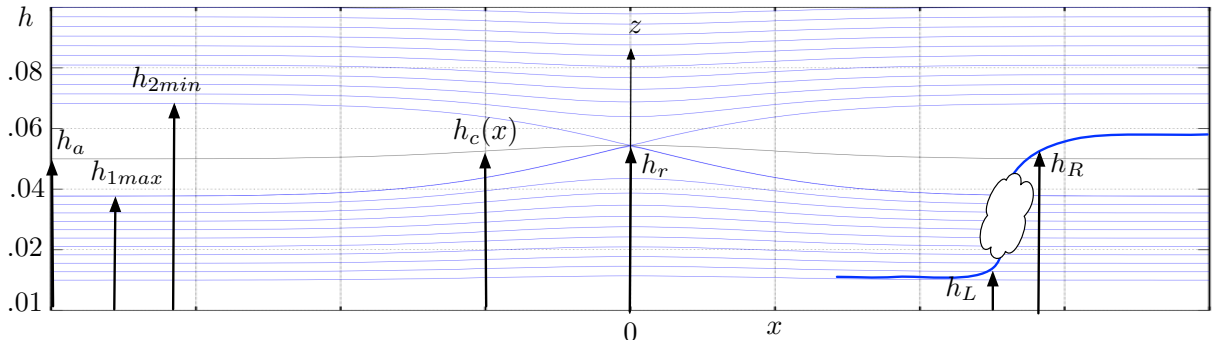


FIGURE 1.13 – Trajectoires possibles pour un débit Q donné.

- 30) Que se passe-t-il si $e \geq h_{1max}$? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau h au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement. Que vaut $h(0)$?

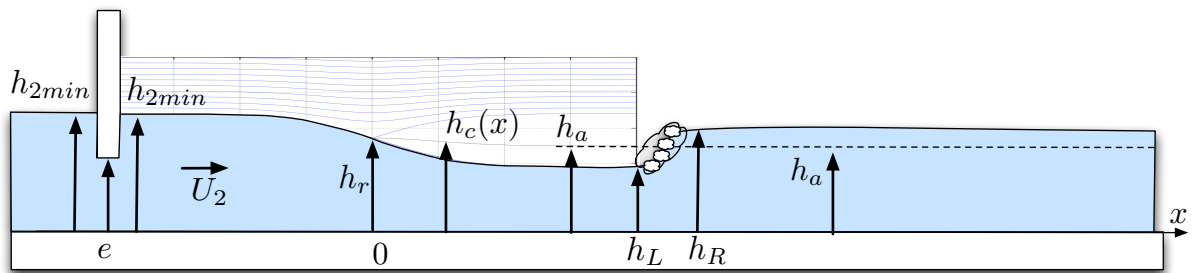


FIGURE 1.14 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique.

- 31) On veut se servir de ce dispositif pour mesurer le débit Q . Décrire la méthode dans le cas où l'on sait mesurer la hauteur au col. Exprimer Q en fonction de h_{cr} en supposant connu L_r . Que vaut Q si $h_{cr} = 5.5$ cm et $L_r = 22$ cm.
- 32) On suppose que l'on connaît $\Lambda_r = L_a/L_r$ mais que l'on ne sait mesurer $h = h_{2min}$ qu'à l'amont de la tuyère. Justifier qu'en amorçant la tuyère cette mesure est celle de h_{2min} . En utilisant la relation $Q = \sqrt{g} L_a h_{ca}^{3/2}$ pour relier Q à la hauteur critique h_{ca} en aval, montrer que la détermination du débit à partir de la mesure de h revient à résoudre l'équation

$$\frac{3}{2} \Lambda_r^{2/3} = \xi + \frac{1}{2} \xi^{-2} \quad (1.2)$$

avec $\xi = h_{2min}/h_{ca}$. Résoudre graphiquement cette équation dans le cas où $h_{2min} = 14$ cm, $L_a = 25$ cm et $L_r = 14$ cm en utilisant les abaques de la figure 1.16 et en vérifiant les résultats sur les abaques de la figure 1.17. En déduire la valeur du débit Q .

Corrigé 1 Tuyère de Laval hydraulique

1) La conservation de la masse pour un écoulement stationnaire entraîne que le débit Q (m^3/s) est constant. La conservation de la charge sur fond plat entraîne que la l'énergie spécifique

E (m) est constante. À débit Q fixé, on peut faire varier $E = e + Q^2/(2g L_a^2 e^2)$ en réglant l'ouverture e . **2)** La hauteur $h_c(x)$ est la hauteur critique du découlement au point x , c'est-à-dire celle pour laquelle le nombre de Froude $Fr(x) = U(x)/\sqrt{gh(x)}$ est égal à un. En effet $Fr(x)^2 = h^3(x)/h_c^3(x)$. On en déduit que $Q = g^{1/2} L h^{3/2} \sim 8.6$ l/s. Comme $h_c(x)/h_{ca} = (L/L_a)^{-2/3}$, on a

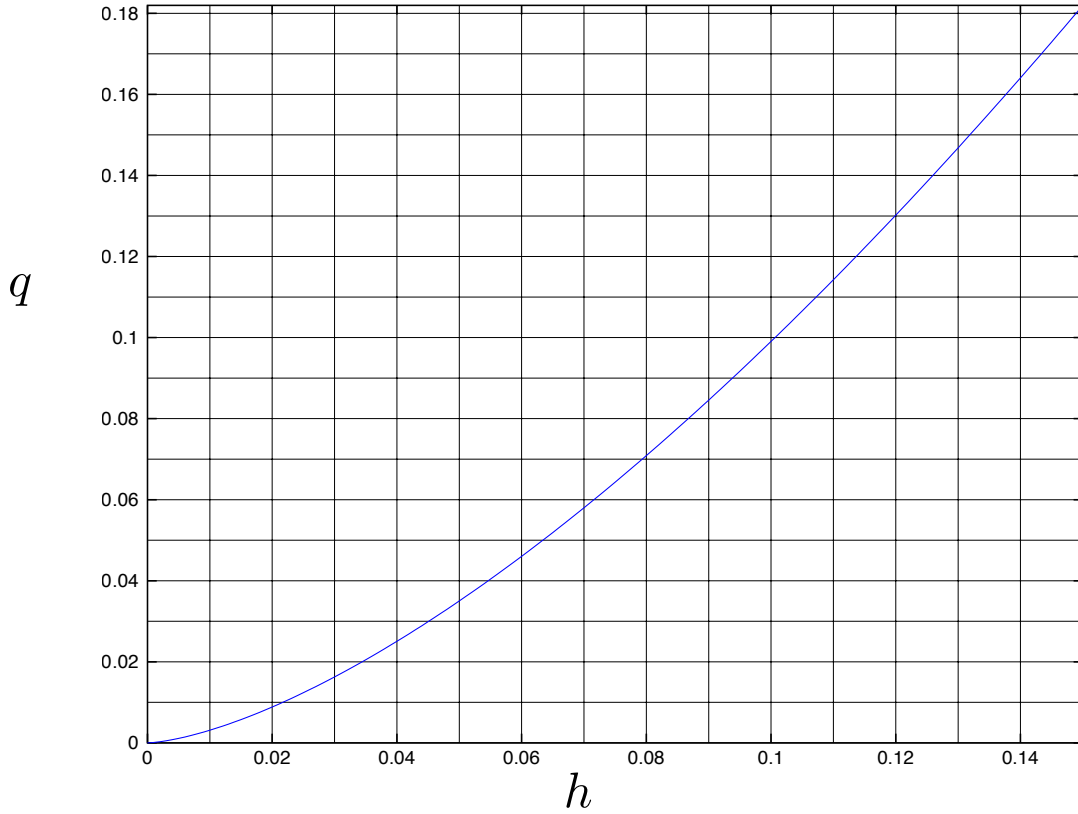


FIGURE 1.15 – Fonction $q(h) = g^{1/2} h^{3/2}$ pour $g = 9.81$ m.s⁻².

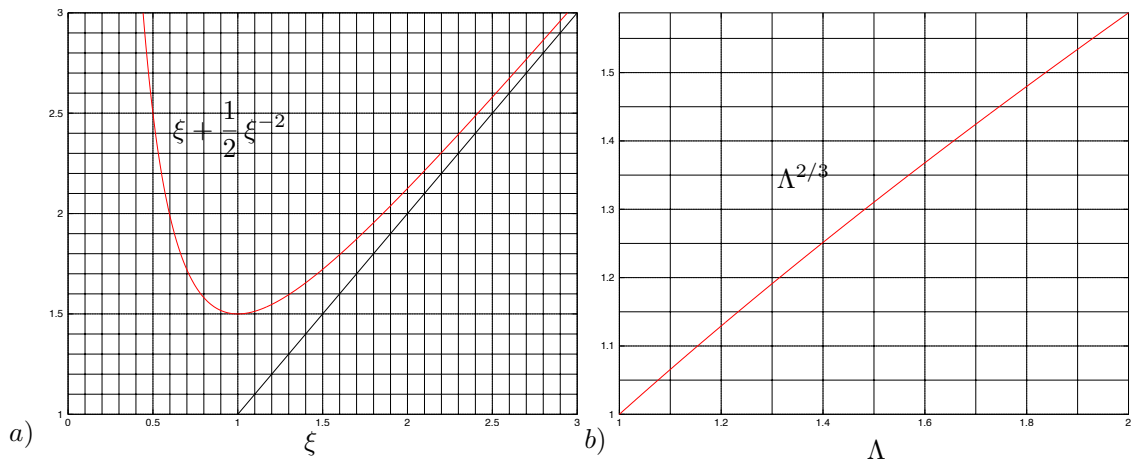


FIGURE 1.16 – a) Fonction $f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}\xi^{-2}$. b) Fonction $f(\Lambda) = \Lambda^{2/3}$.

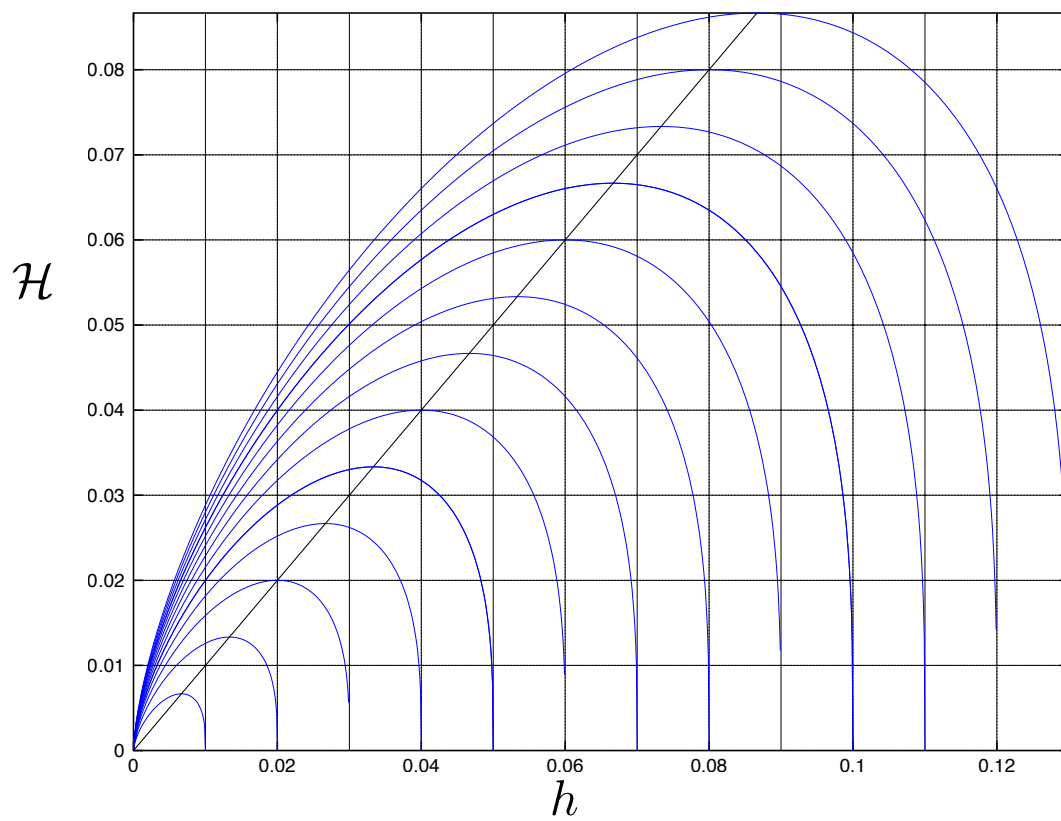
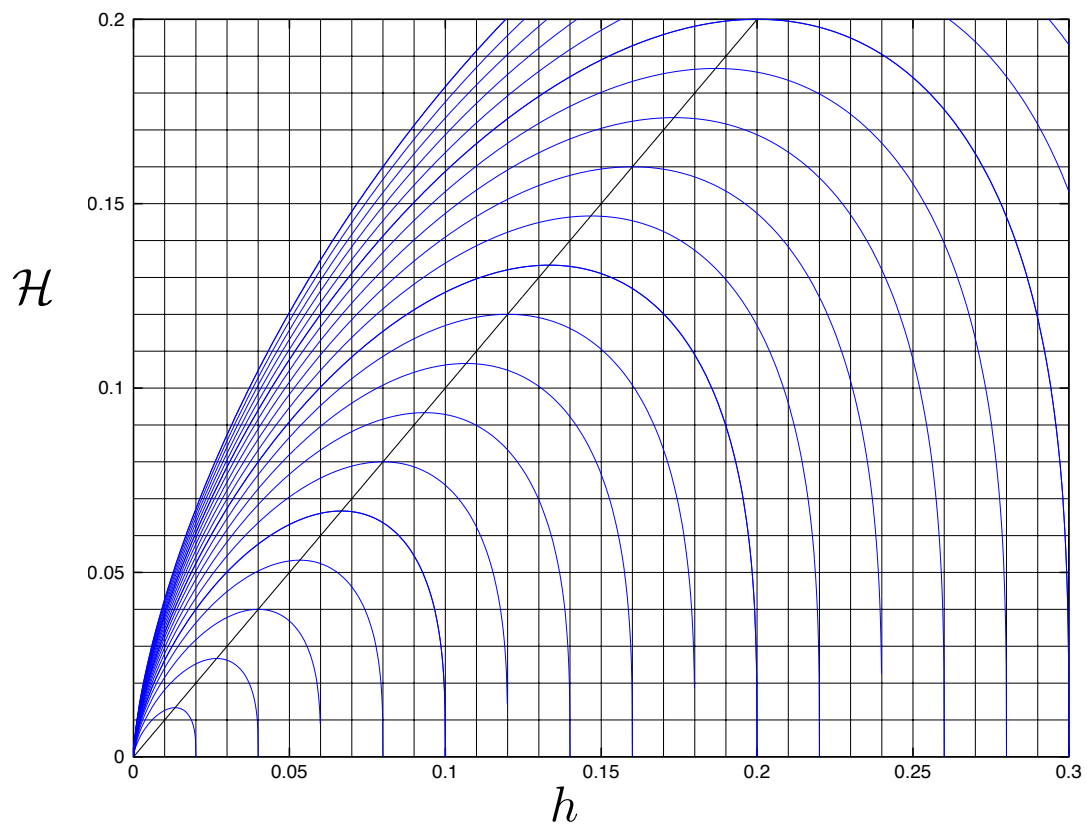
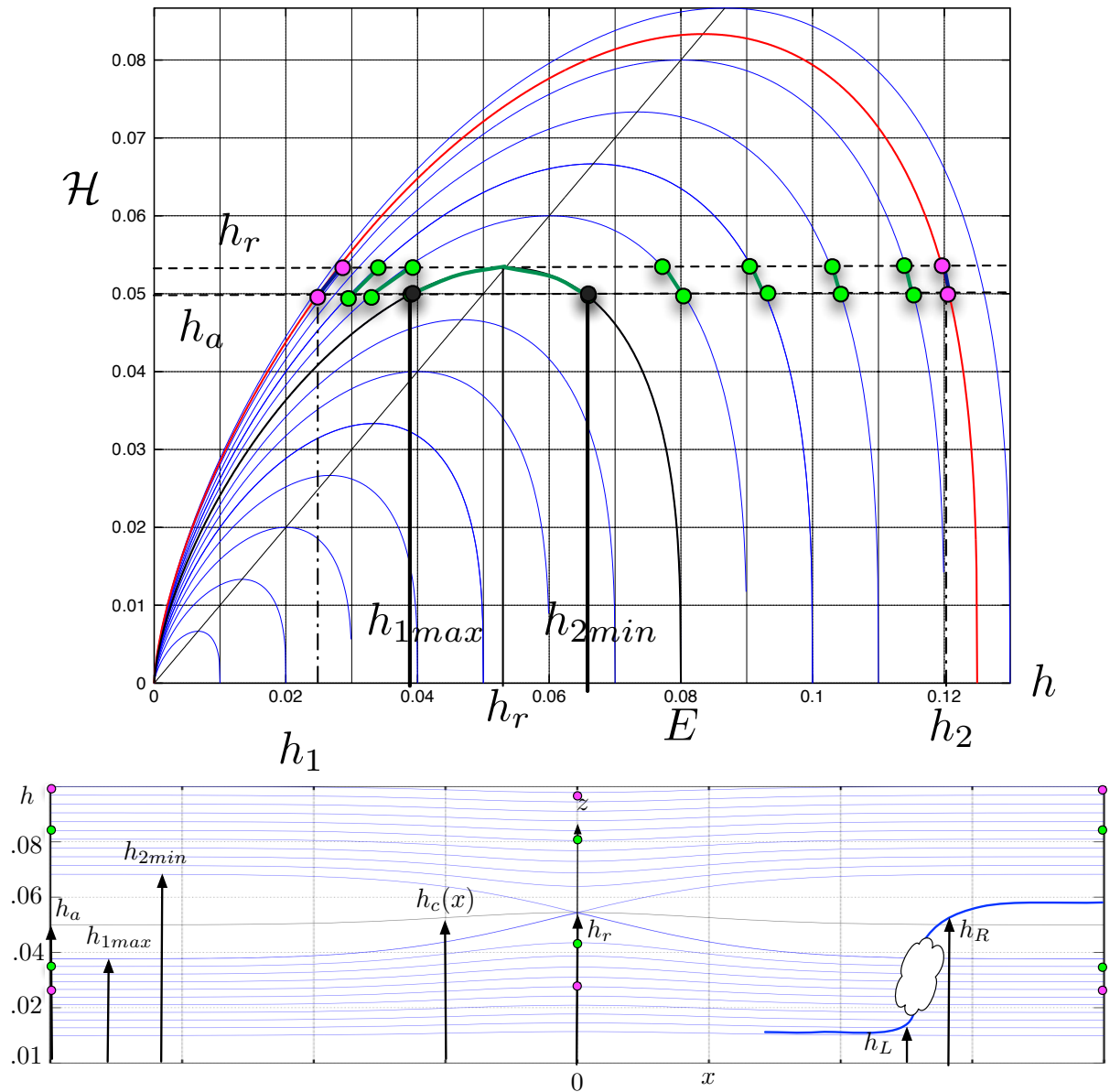


FIGURE 1.17 – Fonction $\mathcal{H}(E, h) = 2^{1/3} h^{2/3} (E - h)^{1/3}$.

bien $h_c(x) = h_{ca} \Lambda^{2/3}(x)$. On a donc $h_c = h_{ca} \Lambda_r^{2/3} = 5.4$ cm avec $\Lambda_r = L_a/L_r \sim 1.4$. Le tracé de $h_c(x)$ est effectué sur la figure 1.13. **3)** En reportant $Q = U h L$ dans $E = h + \frac{U^2}{2g}$ on obtient $2 h^2 (E - h) = \frac{Q^2}{g L^2} = h_c^3$ en utilisant la définition $h_c = \left(\frac{Q^2}{g L_a^2}\right)^{1/3}$ de la hauteur critique $h_c(x)$. Le tracé $\mathcal{H}(E, h)$ en fonction de h est présenté dans la figure 1.17 pour diverses valeurs de E . On a $\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = -\frac{2}{3} \frac{1}{h} + \frac{1}{3} \frac{1}{E-h} = \frac{3h-2E}{3h(E-h)}$. Les maxima $\mathcal{H} = \frac{2}{3}E$, atteints pour $h = \frac{2}{3}E$ sont alignés sur la première bissectrice. Les pentes en $h = 0$ et $h = E$ sont verticales. **4)** On a $h_v = h_2$ dans la mesure où on néglige les pertes de charges à la traversée de la vanne de fond. On a $h_1 = e$ en négligeant les variations de hauteur en sortie de vanne de fond. Comme $h_{ca} = \mathcal{H}(E, h_1)$ avec $h_1 = 2.5$ cm et $h_{ca} = 5$ cm, on lit sur l'abaque de la figure 1.17 que $E \sim 12.5$ cm et donc $h_2 \sim 12$ cm. **5)** On a $h_{cr} = h_c(0) = h_{ca} \Lambda_r^{2/3} = 5.4$ cm. Comme $h_c(x) = h_{ca} \Lambda^{2/3}(x)$ avec $\Lambda(x) = L_a/L(x) \geq 1$, on a $h_{ca} \leq h(x) \leq h_{cr}$. Pour chaque choix de h_1 ou de h_2 le domaine de variation de $h(x)$ est obtenu en dessinant l'intersection avec la droite $\mathcal{H} = h_{cr}$ de la courbe du graphe qui passe par le point $(h, \mathcal{H}) = (h_1, h_{ca})$ ou $(h, \mathcal{H}) = (h_2, h_{ca})$ respectivement (figure 1.18). Les valeurs h_{1max} et h_{2min} sont les valeurs conjuguées pour $E = 3 h_{cr}/2$. On lit sur le graphique les valeurs $h_{1max} \sim 3.8$ cm et $h_{2min} \sim 6.8$ cm. **6)** lorsque $e \geq h_{1max}$, l'écoulement reste bloqué sur la courbe qui relie h_{1min} à h_{2max} avec passage critique en $x = 0$ avec $h(0) = h_c$. **7)** Pour mesurer le débit, il suffit d'installer un venturi hydraulique capable de faire passer l'écoulement de fluvial à torrentiel. En mesurant h_{cr} au col, on en déduit $Q = \sqrt{g} L_r h_{cr}^{2/3}$. Pour $h_{cr} = 5.5$ cm, le graphe de la figure 1.15 conduit à $q(h_{cr}) = 0.04$ m²/s et donc à $Q = q(h_{cr}) L_r = 8.8$ l/s. **8)** La seule hauteur possible en amont d'une tuyère amorcée est h_{2min} . On a donc $h_{ca} = \mathcal{H}(3 h_{cr}/2, h_{2min})$ puisque $E = 3 h_{cr}/2$ lorsque la tuyère est amorcée, ce qui s'écrit $2 h_{2min}^2 (3 h_{cr}/2 - h_{2min}) = h_{ca}^3$. Comme $h_{cr} = h_{ca} \Lambda_r^{2/3}$, on en déduit l'équation indiquée. Comme $\Lambda = L_a/L_r \sim 1.8$ on lit $\Lambda^{2/3} \sim 1.5$ sur l'abaque de la figure 1.16b d'où $\frac{3}{2} \Lambda^{2/3} \sim 2.2$. On lit, sur l'abaque de la figure 1.16a que $\xi \sim 2.1$, d'où $h_{ca} = h_{cr}/\xi \sim 6,7$ cm. On vérifie sur l'abaque de la figure 1.17 que les valeurs obtenues pour $E \sim 15$ cm, $h_{cr} \sim 10$ cm et $h_{ca} \sim 6,7$ cm correspondent bien à un passage critique pour $h_{2min} = 14$ cm. On en déduit $q(h_{ca}) = .055$ m²/s et donc $Q = q(h_{ca}) L_a = 13,7$ l/s.

FIGURE 1.18 – Détermination graphique des courbes $h(x)$.