

Chapitre 6

Hydraulique à surface libre

O. Thual, 15 février 2021

Sommaire

1	Frottement rugueux de Manning-Strickler	2
1.1	Pertes de charge dans les canaux à surface libre	2
1.2	Régime rugueux du diagramme de Moody	3
1.3	Formule de Manning-Strickler	4
2	Nombre de Froude	5
2.1	Définition du nombre de Froude	5
2.2	Régime torrentiel ou fluvial	5
3	Courbes de remous	6
3.1	Cas des canaux de grande largeur constante	6
3.2	Courbes de remous en faibles ou fortes pentes	7
3.3	Courbes de remous avec ressaut hydraulique	7

Introduction

La charge des écoulements à surface libre fait intervenir la cote de la surface libre, la profondeur et le carré de la vitesse débitante. Les pertes de charge, dues au frottement, traduisent, la plupart du temps, une diminution de la cote de fond, en suivant la pente du canal, ce qui permet de maintenir une profondeur et une vitesse dans des intervalles raisonnables. La plupart des écoulements à surface libre correspondent à des régimes rugueux, ce qui permet de décrire le frottement à l'aide de la formule de Manning-Strickler. Cette formule permet d'exprimer la hauteur normale pour laquelle la pente de charge et la pente du fond sont égales. L'augmentation ou la diminution de la profondeur au passage d'obstacles ou en présence de frottement dépend du nombre de Froude, qui permet de distinguer les régimes torrentiel ou fluvial suivant que ce nombre est plus grand ou plus petit que un. La hauteur critique est définie comme étant la profondeur, qui ne dépend que du débit, pour laquelle le nombre de Froude vaut un. La variation de la profondeur le long de l'écoulement s'exprime alors en fonction de la pente du fond, de la pente du frottement et du nombre de Froude, ce qui permet de tracer les courbes de remous, c'est-à-dire les lignes d'eau du régime stationnaire. La variation de la profondeur est nulle pour la profondeur normale et devient infinie à l'approche de la profondeur critique. La comparaison entre ces deux hauteurs permet de définir les notions de pente faible et pente forte. Le cas des canaux à sections rectangulaires infiniment larges est abordé à titre d'exemple. Le phénomène de ressaut hydraulique stationnaire est introduit.

1 Frottement rugueux de Manning-Strickler

1.1 Pertes de charge dans les canaux à surface libre

L'aire de la section d'un canal ou d'une rivière est notée A . Son périmètre est la somme de la largeur miroir B , en contact avec l'atmosphère, et du périmètre mouillé \mathcal{P} , en contact avec le fond (figure 6.1). On définit alors le rayon hydraulique $R_H = A/\mathcal{P}$ et le diamètre hydraulique par $D_H = 4 R_H$.

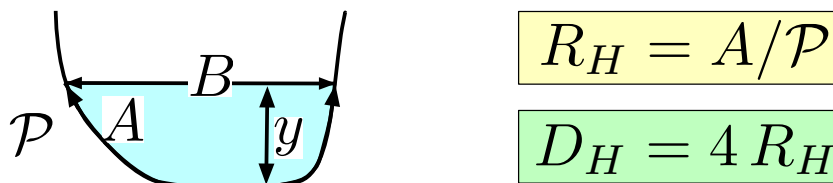


FIGURE 6.1 – Définition du rayon R_H et du diamètre D_H hydrauliques.

La charge hydraulique des écoulements à surface libre (voir chapitre 2), est définie par la relation

$$H = \frac{P_a}{\rho g} + Z_f + y + \frac{V^2}{2g}, \quad (6.1)$$

où P_a est la pression atmosphérique, Z_f la cote verticale du fond, y la profondeur et V la vitesse moyenne dans la section. On peut visualiser la charge

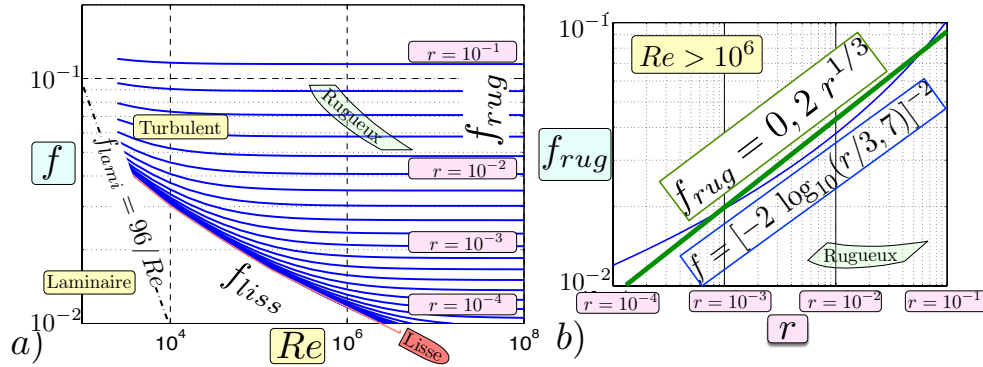


FIGURE 6.3 – a) Diagramme de Moody. b) Régime rugueux $f_{rug}(r)$.

Comme f_{rug} est ainsi proportionnel à $R_H^{-1/3}$ et S_f à f_{rug}/D_H , S_f est proportionnel à $R_H^{-4/3}$ avec une constante qui dépend de la vitesse, de la gravité et de la rugosité absolue. Cette approximation est à la base de la formule de Manning Strickler.

1.3 Formule de Manning-Strickler

Dans le cas des écoulements à surface libre en régime rugueux, ce qui est souvent le cas dans les applications pratiques, la pente de frottement S_f dépend de la vitesse V , ou du débit $Q = VA$, et du rayon hydraulique R_H , à travers la formule de Manning-Strickler :

$$V = K_s \sqrt{S_f} R_H^{2/3} \iff S_f = \frac{V^2}{K_s^2 R_H^{4/3}} = \frac{Q^2}{K_s^2 A^2 R_H^{4/3}}. \quad (6.5)$$

où K_s ($m^{1/3}.s^{-1}$) est le coefficient de Strickler qui rend compte de la rugosité des parois du canal. On note $n = 1/K_s$ le coefficient de Manning. Les valeurs du coefficient de Strickler ou du coefficient de Manning sont données dans des tables qui décrivent avec précision la nature des fonds ([?], [?]). Quelques ordres de grandeurs sont indiqués dans la table 6.1.

Fond	Strickler K_s	Manning n	Variations
Ciment lissé	90	0,011	20%
Béton	40	0,025	30%
Terre	30	0,033	20%
Herbes ou graviers	25	0,040	25%
Pierres ou broussailles	20	0,050	20%
Mauvaises herbes ou crue	10	0,100	40%

TABLE 6.1 – Valeurs des coefficients de Strickler K_s et de Manning $n = 1/K_s$ en fonction de la nature des canaux ou rivières.

Comme A et R_H ne dépendent que de la profondeur y , il en va de même pour S_f si le débit est fixé. Étant donné un débit Q et une pente géométrique $S_0 = -dZ_f/ds$, il existe une (en général unique) profondeur $y_n(Q, S_0)$, dite "profondeur normale", pour laquelle $S_f = S_0$.

2 Nombre de Froude

2.1 Définition du nombre de Froude

La pente de frottement S_f permet d'exprimer la variation de charge dH sur une longueur ds dans la direction de l'écoulement à surface libre à travers les relations

$$dH = -S_f ds \quad \text{avec} \quad H = \frac{P_a}{\rho g} + Z_f + y + \frac{V^2}{2g}. \quad (6.6)$$

La variation de charge $dH = dZ_f + dy + d[V^2/(2g)]$ fait intervenir la variation de la cote du fond Z_f , de la profondeur y et du terme d'énergie cinétique $V^2/(2g)$.

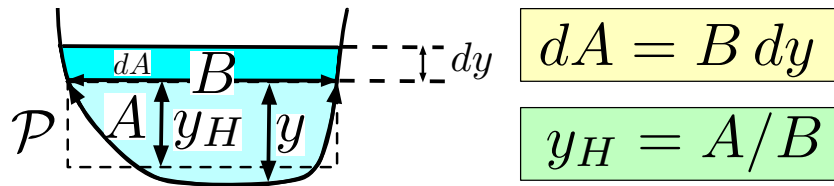


FIGURE 6.4 – Variation de la section A en fonction de la largeur miroir B et de la variation de la profondeur y .

Comme le débit $Q = V A$ est constant et que la variation $dA = B dy$ de la section fait intervenir la largeur miroir B (voir figure 6.4) on peut écrire

$$d(V^2) = d\left(\frac{Q^2}{A^2}\right) = -2 \frac{Q^2}{A^3} dA = -2 V^2 \frac{B}{A} dy. \quad (6.7)$$

On définit alors $y_H = A/B$ la profondeur hydraulique qui permet d'écrire

$$d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -Fr^2 dy \quad \text{avec} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{g y_H}}. \quad (6.8)$$

Comme B et A ne dépendent que de y , il en va de même de Fr pour un débit Q fixé. Il existe alors une (rarement plusieurs) profondeur $y_c(Q)$, dite profondeur critique, pour laquelle $Fr = 1$.

2.2 Régime torrentiel ou fluvial

La variation du terme d'énergie cinétique $V^2/(2g)$ de la charge hydraulique étant reliée par l'équation (6.8) à la variation de la profondeur y et au nombre de Froude Fr , la dérivation de l'équation (6.6), exprimant la charge hydraulique H , conduit à :

$$(1 - Fr^2) dy = -dZ_f + dH. \quad (6.9)$$

À l'approche d'un obstacle tel que $dZ_f > 0$ ou en présence d'un frottement qui induit une perte de charge $dH < 0$, on distingue deux régimes :

- $Fr > 1$: la profondeur y **augmente**, le régime est dit torrentiel.
- $Fr < 1$: la profondeur y **diminue**, le régime est dit fluvial.

D'une manière plus générale, la variation de la profondeur $y(s)$ avec la coordonnée curviligne s le long de l'écoulement est donnée par l'importante équation de l'hydraulique stationnaire issue de l'équation (6.9) :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}, \quad (6.10)$$

où $S_0 = -dZ_f/ds$ est la pente géométrique et $S_f = -dH/ds$ la pente de frottement. Suivant que le régime est fluvial ou torrentiel, la profondeur variera dans un sens ou dans un autre en présence d'un déséquilibre entre la pente du fond et la pente de frottement. On remarque alors deux propriétés :

- Le numérateur s'annule lorsque la profondeur s'approche de la hauteur normale y_n : la dérivée de la profondeur tend vers zéro.
- Le dénominateur s'annule lorsque la profondeur s'approche de la hauteur critique y_c : la dérivée de la profondeur tend vers l'infini.

3 Courbes de remous

3.1 Cas des canaux de grande largeur constante

Dans la suite de ce chapitre, on se place dans le cas des conduites de sections rectangulaires de grande largeur miroir $B \gg y$, ce qui entraîne que $R_H = y$, $D_H = 4y$ et $y_H = y$. On suppose également que la largeur miroir B est constante, ce qui permet d'affirmer que le débit $q = Q/B$ est constant pour les régimes stationnaires étudiés ici.

La formule de Manning-Strickler (6.5) s'écrit alors $V = K_s \sqrt{S_f} y^{2/3}$ ainsi que $S_f = V^2/(K_s^2 y^{4/3}) = q^2/(K_s^2 y^{10/3})$, ce qui entraîne

$$S_f = S_0 \left(\frac{y_n}{y} \right)^{-10/3} \quad \text{avec} \quad y_n = \left(\frac{q^2}{K_s^2 S_0} \right)^{3/10}, \quad (6.11)$$

où y_n est la hauteur normale, définie comme étant la profondeur pour laquelle $S_f = S_0$.

Le nombre de Froude, défini par l'équation (6.8), vérifie ici $Fr^2 = V^2/(gy) = q^2/(gy^3)$, ce qui entraîne

$$Fr^2 = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{-3} \quad \text{avec} \quad y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}, \quad (6.12)$$

où y_c est la hauteur critique, définie comme étant la profondeur pour laquelle $Fr = 1$.

On en déduit que l'équation de l'hydraulique stationnaire (6.10) s'écrit ici :

$$\frac{dy}{ds} = \mathcal{F}(y) = S_0 \frac{1 - (y/y_n)^{-10/3}}{1 - (y/y_c)^{-3}}. \quad (6.13)$$

Les solutions $y(s)$ de cette équation différentielle sont appelées "courbes de remous", qui permettent de remonter aux lignes d'eau de cote $Z_f(s) + y(s)$.

3.2 Courbes de remous en faibles ou fortes pentes

Le tracé de la courbe de la fonction $\mathcal{F}(y)$ de l'équation (6.13) permet de donner l'allure des courbes de remous $y(s)$. On note tout d'abord que $\mathcal{F}(y_n) = 0$. La limite $\mathcal{F}(y_c) = \pm\infty$ se traduit par une asymptote verticale. Enfin, la limite $\mathcal{F}(\infty) = S_0$ se traduit par une asymptote horizontale à l'infini.

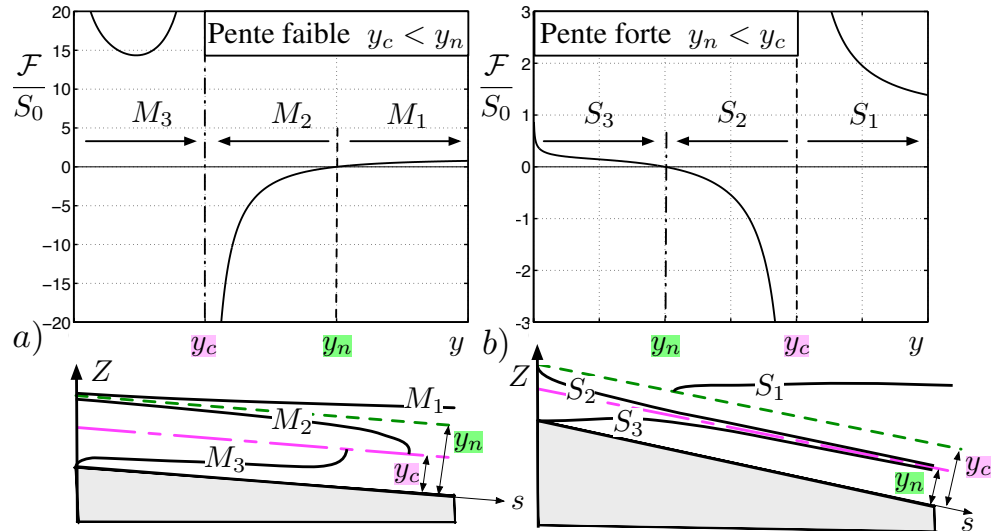


FIGURE 6.5 – Tracé de \mathcal{F}/S_0 et courbes de remous. a) Pente faible : courbes de remous M_1 , M_2 et M_3 . b) Pente forte : courbes de remous S_1 , S_2 et S_3 .

On doit ensuite distinguer deux cas :

- **Faible pente** : cas $y_c < y_n$. Le tracé de $\mathcal{F}(y)/S_0$ est représenté sur la figure 6.5a, ainsi que les courbes de remous M_3 , M_2 et M_1 dont le sens de variation est donné par le signe de \mathcal{F} .
- **Forte pente** : cas $y_n < y_c$. Le tracé de $\mathcal{F}(y)/S_0$ est représenté sur la figure 6.5b, ainsi que les courbes de remous S_3 , S_2 et S_1 dont le sens de variation est donné par le signe de \mathcal{F} .

Lorsque s croît (vers l'aval), les courbes de remous de type M_2 et M_3 , en faible pente, se terminent au bout d'une distance finie avec un dérivée de dy/ds infinie.

Lorsque s décroît (vers l'amont), les courbes de remous de type S_2 et S_1 , en forte pente, se terminent au bout d'une distance finie avec une dérivée de dy/ds infinie, tandis que les courbes de remous de type M_3 et S_3 tendent vers zéro au bout d'une distance finie.

La plupart de courbes de remous n'ont donc d'existence physique que si elles sont interrompues par des changements de pente. Les seules courbes de remous solutions dans le cas d'une pente constante sont la courbe M_1 et la solution homogène $y = y_n$.

3.3 Courbes de remous avec ressaut hydraulique

Pour illustrer la combinaison de courbes de remous en présence de changements de pente, un premier exemple est représenté sur la figure 6.6. Le passage de

la pente faible vers la pente forte s'effectue à une profondeur y_c en connectant une M_2 à une S_2 . Comme y_c ne dépend que de q , cette transition d'un régime fluvial ($y > y_c$) à un régime torrentiel ($y < y_c$) permet de mesurer le débit. La courbe S_2 converge ensuite vers la hauteur normale y_n dont la mesure permet de déterminer le coefficient de Strickler, connaissant la pente géométrique S_0 et le débit. Cette courbe se prolonge en une M_3 lorsque la pente redevient faible, la hauteur normale y_n repassant alors au-dessus de y_c . Cette M_3 est interrompue par un ressaut hydraulique qui fait transiter abruptement la ligne d'eau vers une M_1 qui connecte l'écoulement à un plan d'eau horizontal.

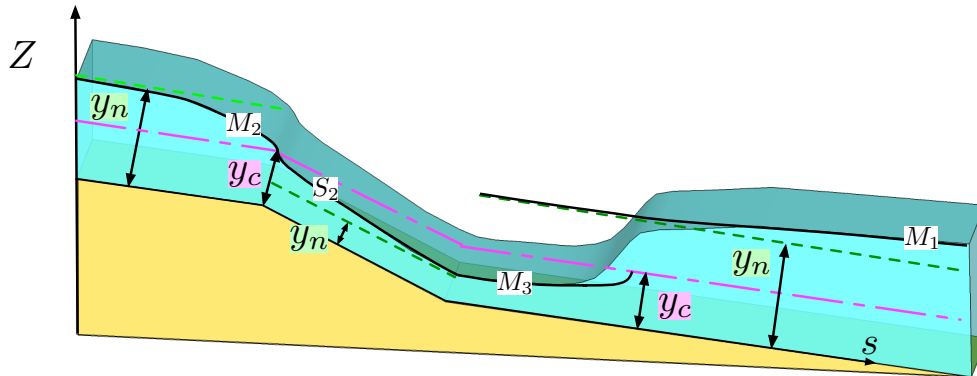


FIGURE 6.6 – Courbes de remous : $M_2 \rightarrow S_2 \rightarrow M_3 \rightarrow$ ressaut $\rightarrow M_1$.

Un deuxième exemple est obtenu en forçant l'écoulement à devenir torrentiel à l'aide d'une vanne de fond (figure 6.7). La courbe S_3 qui émerge tendrait vers la hauteur normale si elle n'était pas interrompue par un ressaut hydraulique connectant la ligne d'eau avec une courbe S_1 qui permet une transition vers un plan d'eau horizontal.

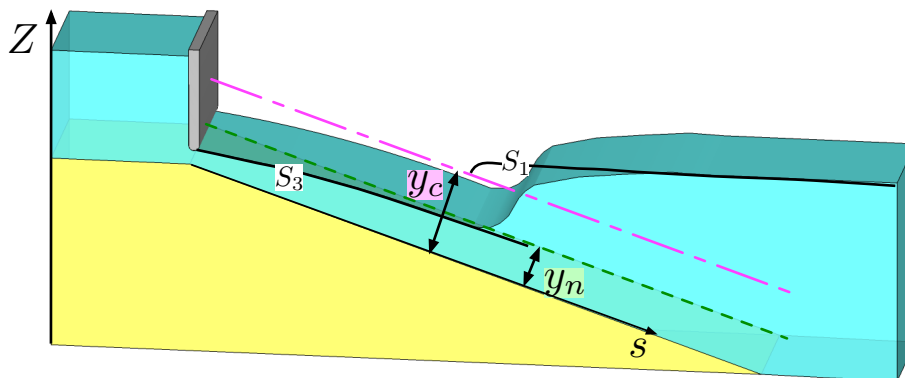


FIGURE 6.7 – Courbes de remous : $S_3 \rightarrow$ ressaut $\rightarrow S_1$.

Ces deux exemples illustrent la nécessité de faire apparaître des ressauts hydrauliques dans les écoulements stationnaires. Ils sont souvent modélisés comme des discontinuités (chocs). Les relations de saut, qui permettent de calculer leurs amplitudes, traduisent la conservation du débit $q = yV$ et de l'impulsion $\mathcal{I} = yV^2 + (1/2)gy^2$, obtenue en faisant un bilan de quantité de mouvement. En revanche, la charge H n'est pas conservée dans la mesure où le ressaut dissipe de l'énergie à cause de sa nature turbulente.

FORMULAIRE

Charge hydraulique des écoulements à surface libre

La charge s'exprime en fonction de la pression atmosphérique P_a , de la cote Z_f du fond du canal, de la profondeur y de la lame d'eau et de de la vitesse débitante V :

$$H = \frac{P_a}{\rho g} + Z_f + y + \frac{V^2}{2g}$$

Relation de Darcy-Weisbach

Les écoulements à surface libre étant la plupart du temps en régime rugueux, la pente de frottement S_f s'exprime à l'aide du coefficient de frottement f_{rug} :

$$- \frac{dH}{ds} = S_f = f_{rug}(r) \frac{V^2}{2g D_H}$$

Formule de Manning Strickler

La pente de frottement $S_f = -dH/ds$ s'exprime à partir du coefficient de Strickler K_s ou du coefficient de Manning $n = 1/K_s$ par la relation

$$V = K_s \sqrt{S_f} R_H^{2/3}$$

Équation de l'hydraulique stationnaire

En régime stationnaire, les courbes de remous $y(s)$ sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

Courbe des remous en grandes largeurs

Dans le cas des canaux de grande largeur miroir, les courbes de remous $y(s)$ sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{ds} = S_0 \frac{1 - (y/y_n)^{-10/3}}{1 - (y/y_c)^{-3}} \quad \text{avec} \quad y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad y_n = \left(\frac{q^2}{K_s^2 S_0} \right)^{3/10}$$

EXERCICES

EXERCICE 6.1 Changement de pente

On considère un canal de section rectangulaire, de largeur miroir $B = 10$ m constante et grande devant la profondeur. La pente du fond passe abruptement d'une pente $-dZ_f/ds = S_{01} = 0,05$ à une pente $-dZ_f/ds = S_{02} = 0,5$ (figure 6.8). On mesure alors les profondeurs $y_1 = 54$ cm loin en amont de la rupture de pente, $y_0 = 47$ cm à la rupture et $y_2 = 13$ cm loin en aval. On suppose que l'écoulement à surface libre est en régime rugueux et que le coefficient de Strickler du fond est constant.

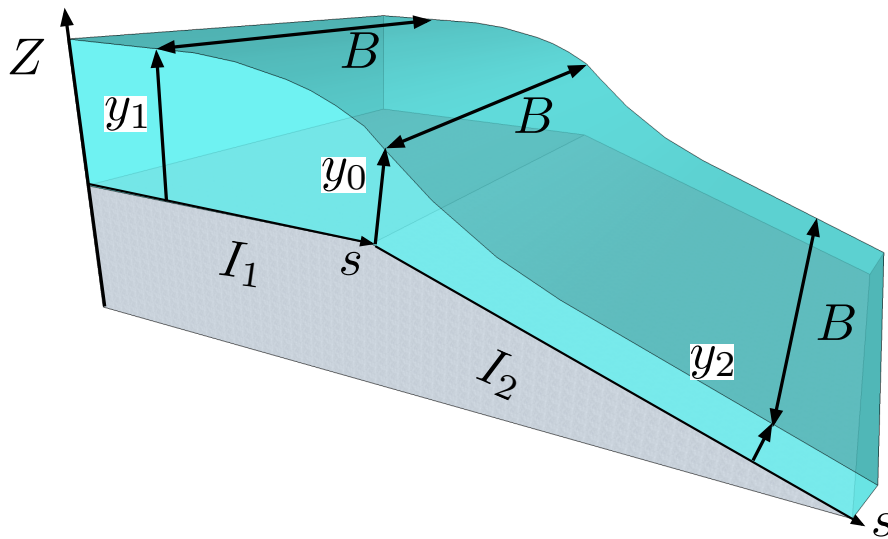


FIGURE 6.8 – Écoulement stationnaire avec changement de pente.

- 1) Calculer le débit Q .
- 2) Calculer le coefficient de Strickler K_s et le coefficient de Manning n . Vérifier la cohérence des mesures y_1 et y_2 compte tenu d'une précision de mesure de 1 cm.
- 3) Qualifier les courbes de remous observées.

Corrigé 5.1 Changement de pente

1) Comme $y_0 = y_c = (q^2/g)^{1/3}$ avec $Q = qB$, on trouve $Q = B\sqrt{gy_0^3} = 10 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. 2) Comme $y_n = [q^2/(K_s^2 S_0)]^{3/10}$, on a $K_s = \sqrt{q^2 y_n^{-10/3}/S_0}$. Pour $y_1 = y_n(S_{01})$, on trouve $K_{s1} = \sqrt{q^2 y_1^{-10/3}/S_{01}} = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour $y_2 = y_n(S_{02})$, on trouve $K_{s2} = \sqrt{q^2 y_2^{-10/3}/S_{02}} = 43 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit que $K_s = 41 \pm 2 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ avec la précision des mesures. On a $n = 1/K_s = 0,024 \pm 0,001 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$. 3) Il s'agit d'une M_2 pour la faible pente S_{01} ($y_c < y_n$) et d'une S_2 pour la forte pente S_{02} ($y_n < y_c$).

NOTATIONS

A	Aire d'une section (m^2)
dA	Aire infinitésimale d'une section (m^2)
B	Largeur miroir (m)
Fr	Nombre de Froude ()
f	Coefficient de frottement ()
f_{rug}	Coefficient de frottement du régime rugueux ()
g	Gravité (m.s^{-2})
H	Charge hydraulique (m)
K_s	Nombre de Strickler ($\text{m}^{1/3}.\text{s}^{-1}$)
M_1, M_2, M_3	Courbes de remous en pente faible ()
n	Nombre de Manning ($\text{m}^{-1/3}.\text{s}$)
P	Pression (Pa)
dP	Pression infinitésimale (Pa)
P_a	Pression atmosphérique (Pa)
\mathcal{P}	Périmètre mouillé (m)
Q	Débit ($\text{m}^3.\text{s}^{-1}$)
R_H	Rayon hydraulique (m)
r	Rugosité relative ()
Re	Nombre de Reynolds ()
S_0	Pente géométrique ()
S_f	Pente de frottement ()
s	Coordonnée curviligne (m)
S_1, S_2, S_3	Courbes de remous en pente forte ()
V	Vitesse (m.s^{-1})
y	Profondeur (m)
y_n	Profondeur normale (m)
y_c	Profondeur critique (m)
y_H	Profondeur hydraulique (m)
Z	Coordonnée verticale (m)
dZ	Longueur infinitésimale dans la direction verticale (m)
Z_f	Cote du fond (m)
ϵ	Rugosité absolue (m)
ρ	Masse volumique de l'eau (kg.m^{-3})
ν	Viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)