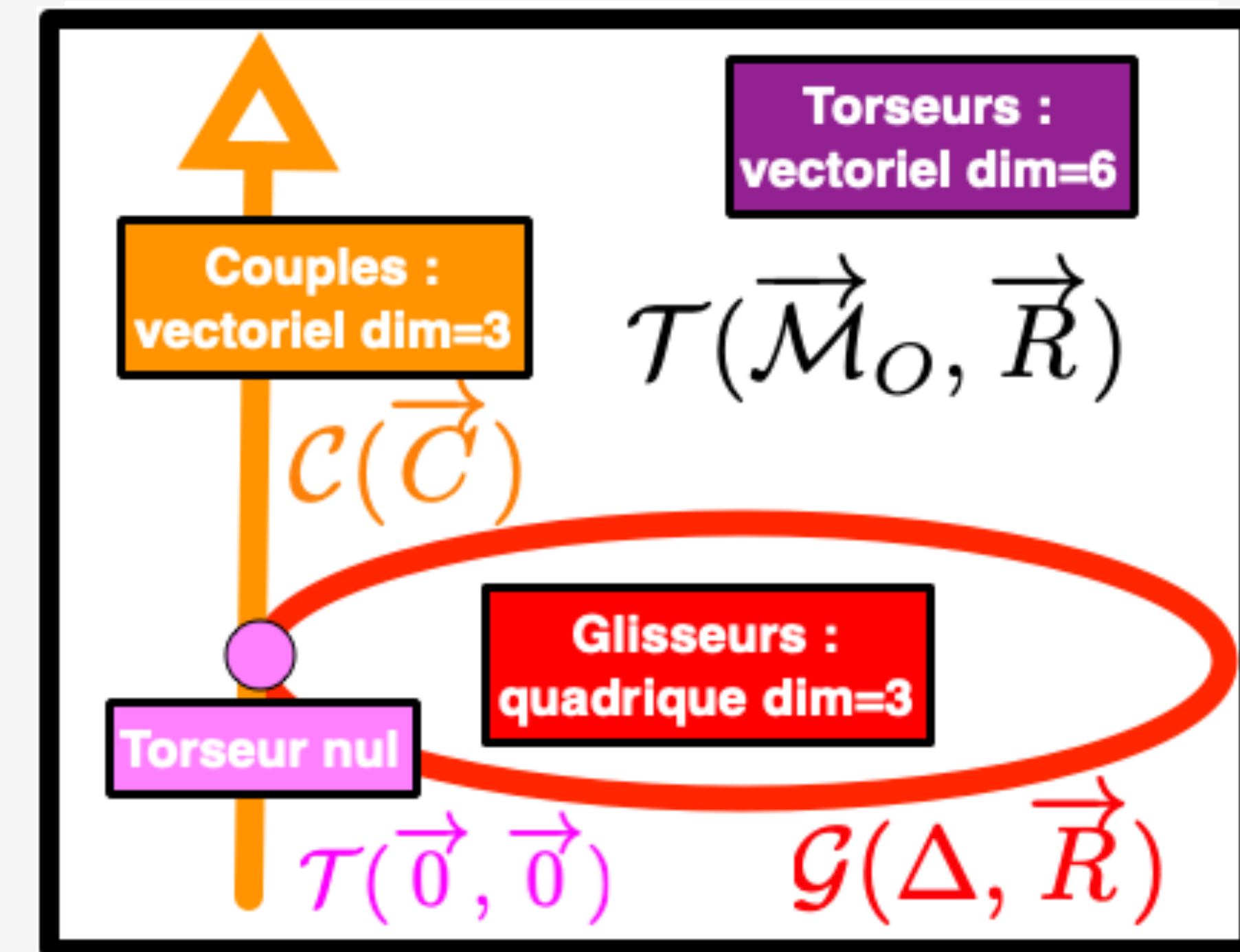
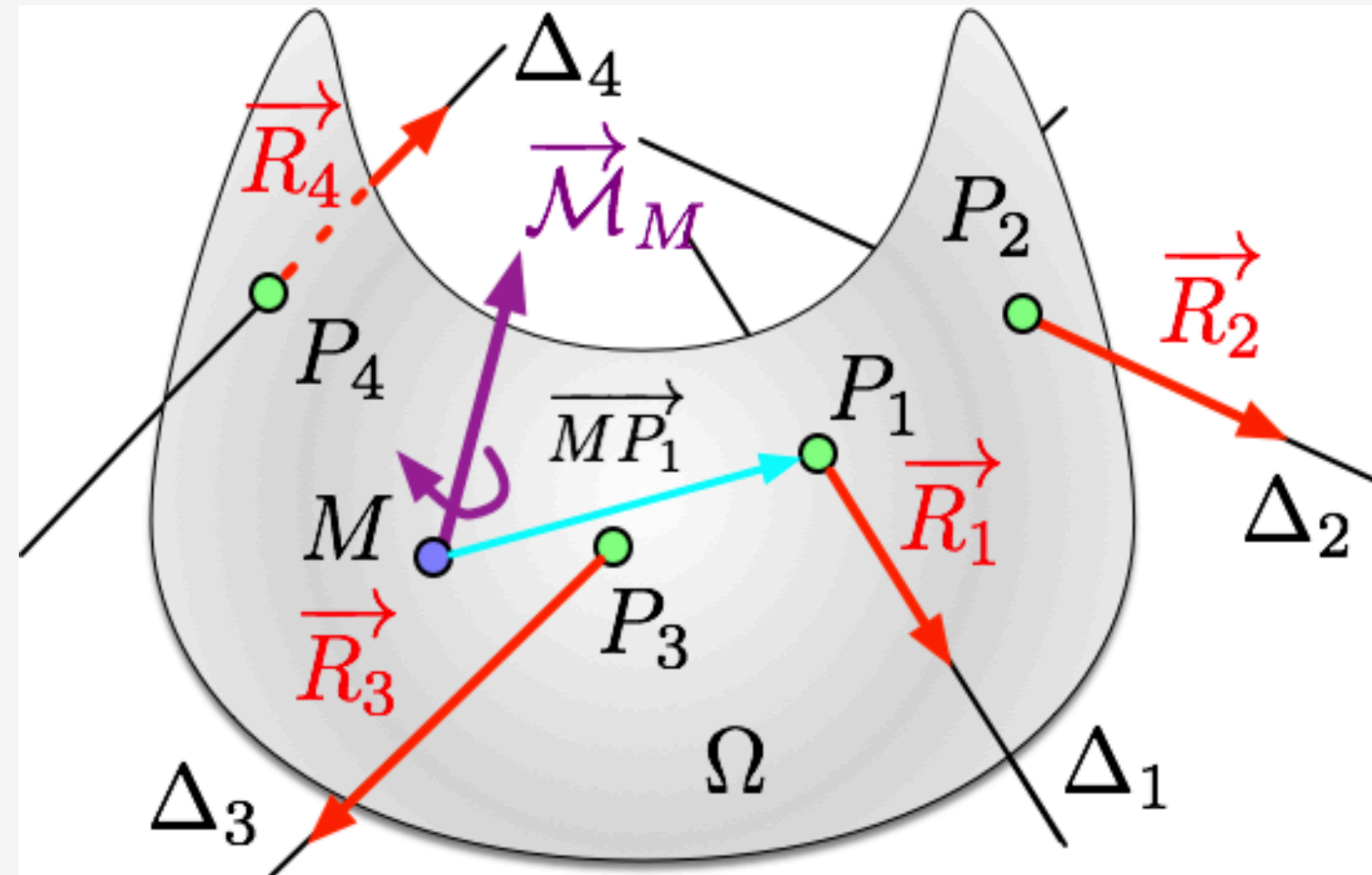
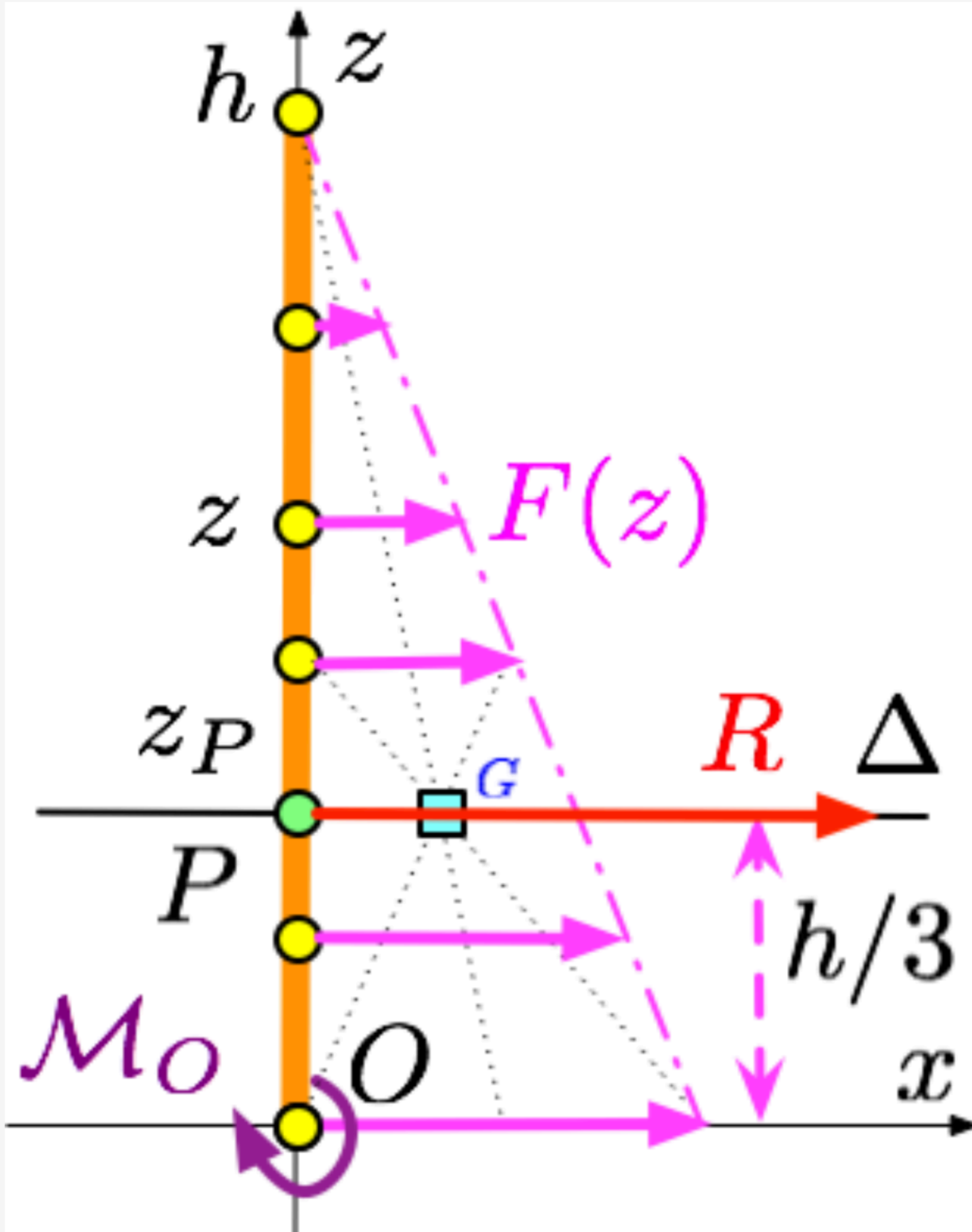
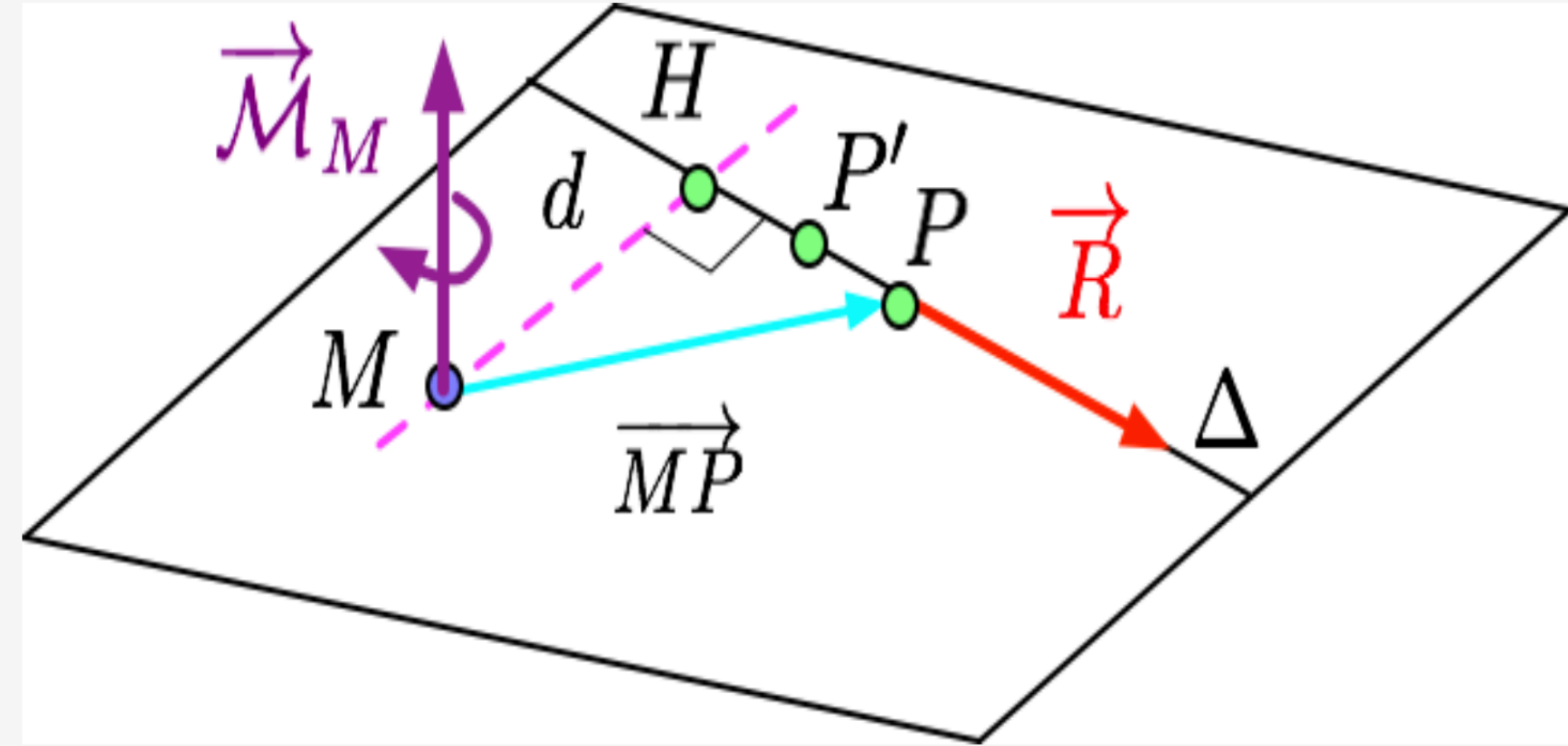


Point d'application d'un système de forces

Olivier THUAL, Toulouse INP

Janvier 2025



Force simple sur un barreau

On considère un barreau solide de longueur h et d'axe Oz . On lui applique un force $\mathcal{F}(P, R)$ de point d'application P et d'intensité R dans la direction de la droite $\Delta(P)$ passant par P et parallèle à l'axe Ox .

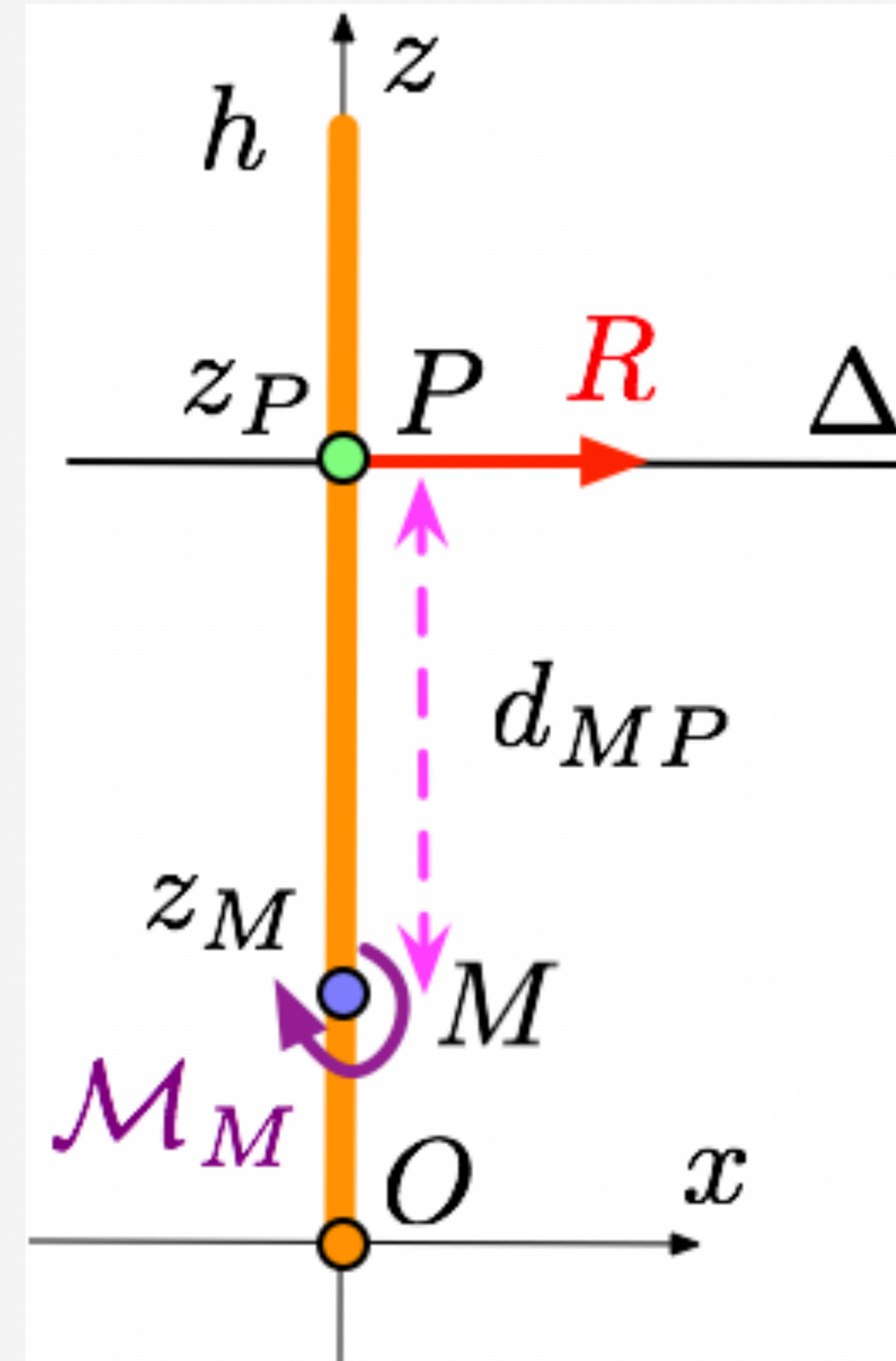
Le moment $\mathcal{M}_M$ de la force $\mathcal{F}(P, R)$ par rapport à un point M quelconque du barreau solide est défini par :

$$\mathcal{M}_M = d_{MP} R \quad \text{avec} \quad d_{MP} = z_P - z_M,$$

où z_M et z_P sont les coordonnées des points M et P le long de l'axe Oz .

On modélise l'action de la force $\mathcal{F}(P, R)$ de point d'application P et d'intensité R par sa "propension à vouloir faire tourner" le barreau solide autour d'un point M quelconque. On la représente donc comme l'application suivante :

$$M \longmapsto \mathcal{M}_M = (z_P - z_M) R .$$



Point d'application de deux forces parallèles

On applique au barreau solide les deux forces $\mathcal{F}_1(P_1, R_1)$ et $\mathcal{F}_2(P_2, R_2)$ de points d'application P_1 et P_2 et d'intensités R_1 et R_2 dans des directions parallèles à l'axe Ox .

On modélise l'action de la somme de ces deux forces par l'application qui associe à tout point M la somme de leurs moments :

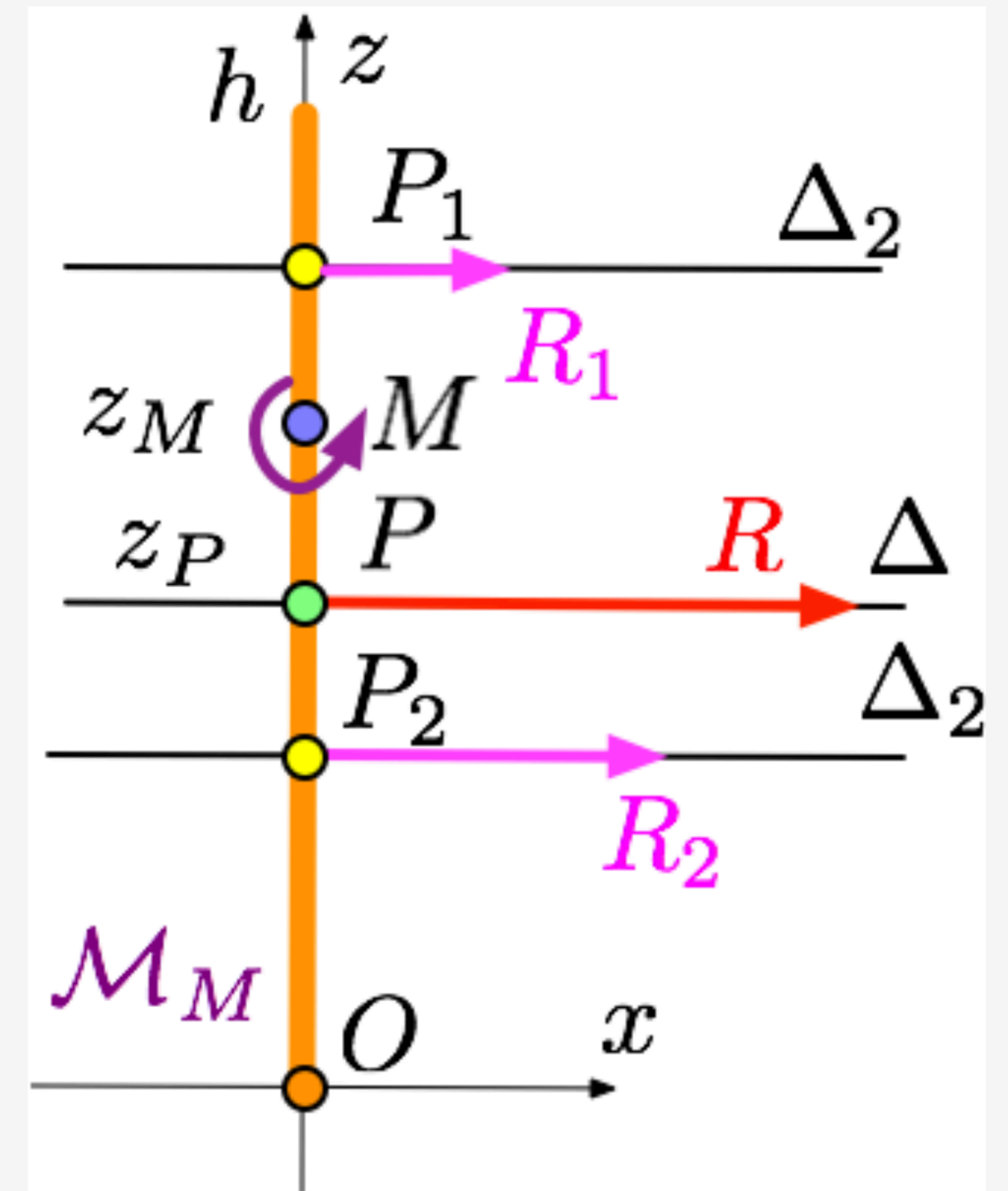
$$M \mapsto \mathcal{M}_M = (z_{P_1} - z_M) R_1 + (z_{P_2} - z_M) R_2 .$$

Il existe un point P de coordonnée z_P dont le moment est nul :

$$\mathcal{M}_P = (z_{P_1} - z_P) R_1 + (z_{P_2} - z_P) R_2 = 0$$

$$\Rightarrow z_P = \frac{z_{P_1} R_1 + z_{P_2} R_2}{R_1 + R_2}$$

Le point P est le barycentre des points P_1 et P_2 affectés des poids R_1 et R_2 .



La somme des deux forces est équivalente à l'action, sur le barreau solide, d'un force $\mathcal{F}(P, R)$ de point d'application P et d'intensité $R = R_1 + R_2$. En effet, on montre facilement la relation :

$$\mathcal{M}_M = (z_P - z_M) R .$$

Point d'application d'un continuum de forces

On applique une densité linéique de forces $\mathcal{F}[z, F(z)]$ de même direction Ox . On modélise l'action de ce système de forces sur le barreau solide par l'application qui

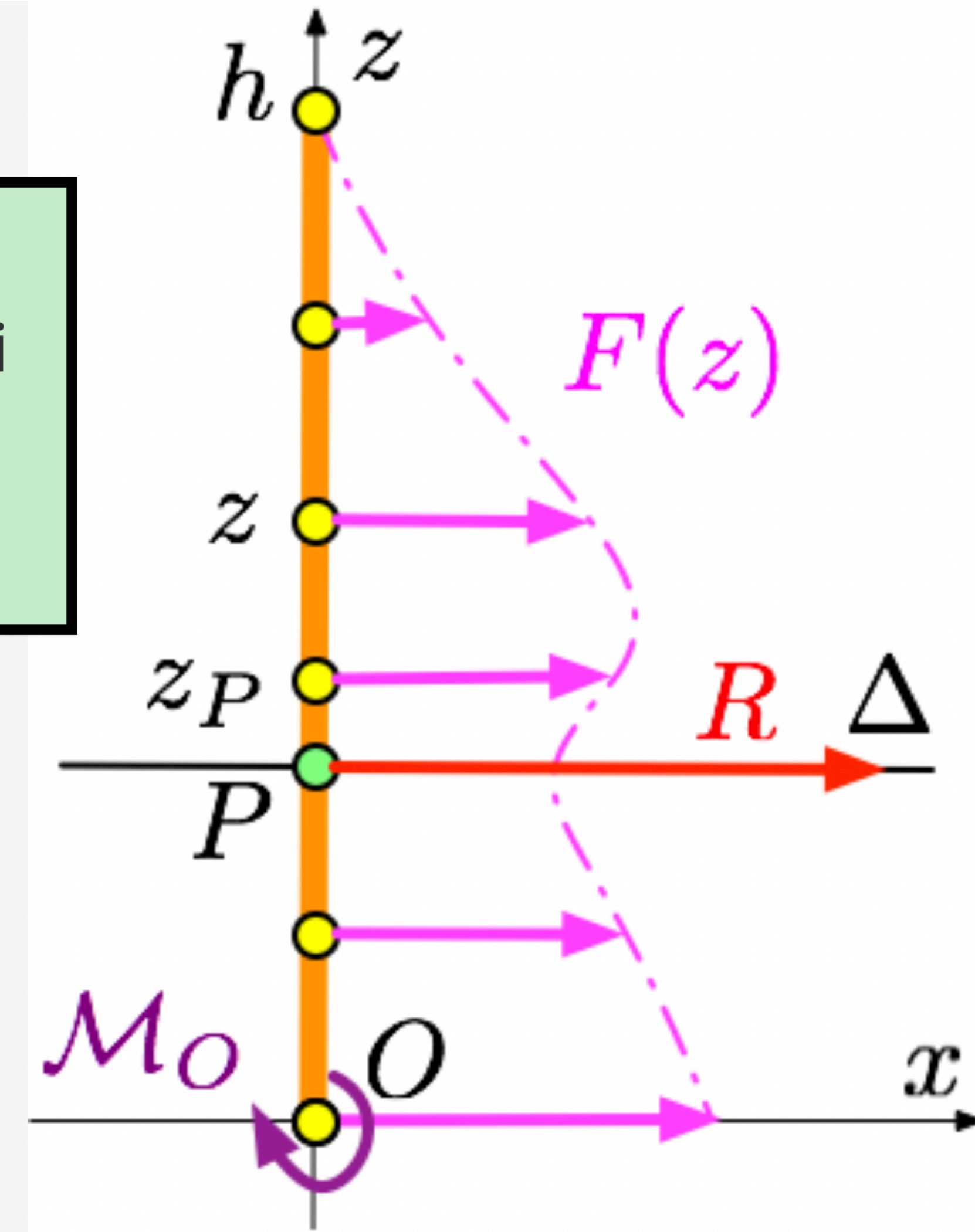
associe à tout point M le moment $\mathcal{M}_M = \int_0^h (z - z_M) F(z) dz$.

Il existe un point P de coordonnée z_P dont le moment est nul :

$$\mathcal{M}_P = \int_0^h (z - z_P) F(z) dz = 0 \implies$$

$$z_P = \frac{1}{R} \int_0^h z F(z) dz \text{ avec } R = \int_0^h F(z) dz .$$

Le point P est le barycentre des points du barreau, affectés des poids $F(z)$.



La densité de forces est équivalente à l'action, sur le barreau solide, d'un force $\mathcal{F}(P, R)$ de point d'application P et d'intensité R . En effet, on montre facilement la relation $\mathcal{M}_M = (z_P - z_M) R$.

Continuum de forces linéaire

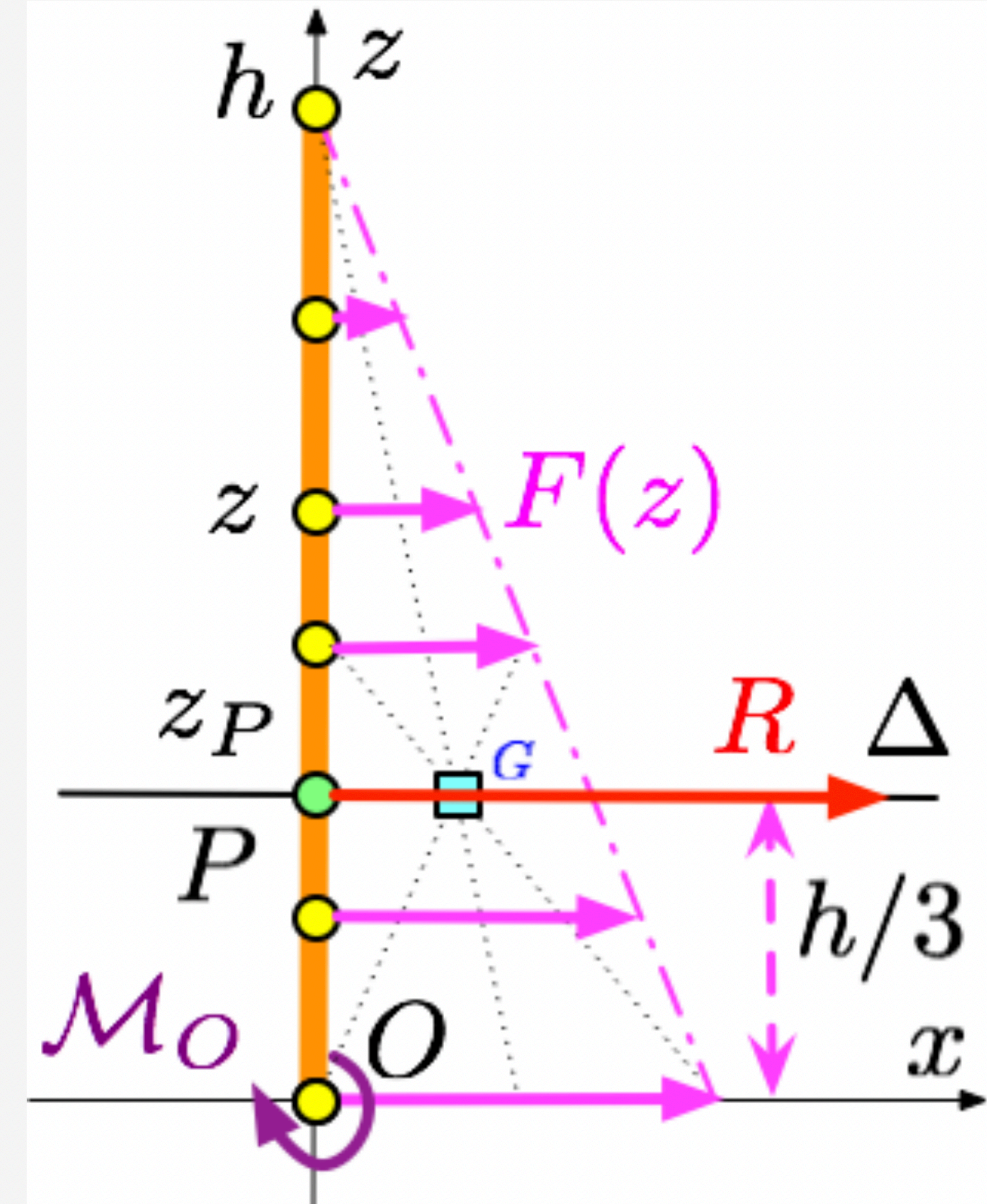
On suppose ici que le continuum de forces $F(z) = F_0(h - z)$ est linéaire.

La résultante des forces est

$$R = \int_0^h F(z) dz = \int_0^h F_0(h - z) dz = F_0 \left[hz - \frac{hz^2}{2} \right]_0^h = \frac{F_0 h^2}{2}.$$

La coordonnée z_P du point d'application est donnée par

$$\begin{aligned} z_P &= \frac{1}{R} \int_0^h z F(z) dz = \frac{F_0}{R} \int_0^h z(h - z) dz \\ &= \frac{F_0}{R} \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{F_0}{R} \frac{h^3}{6} = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$



Le point P est situé au tiers de la hauteur du triangle des forces, dont le barycentre est le point G .

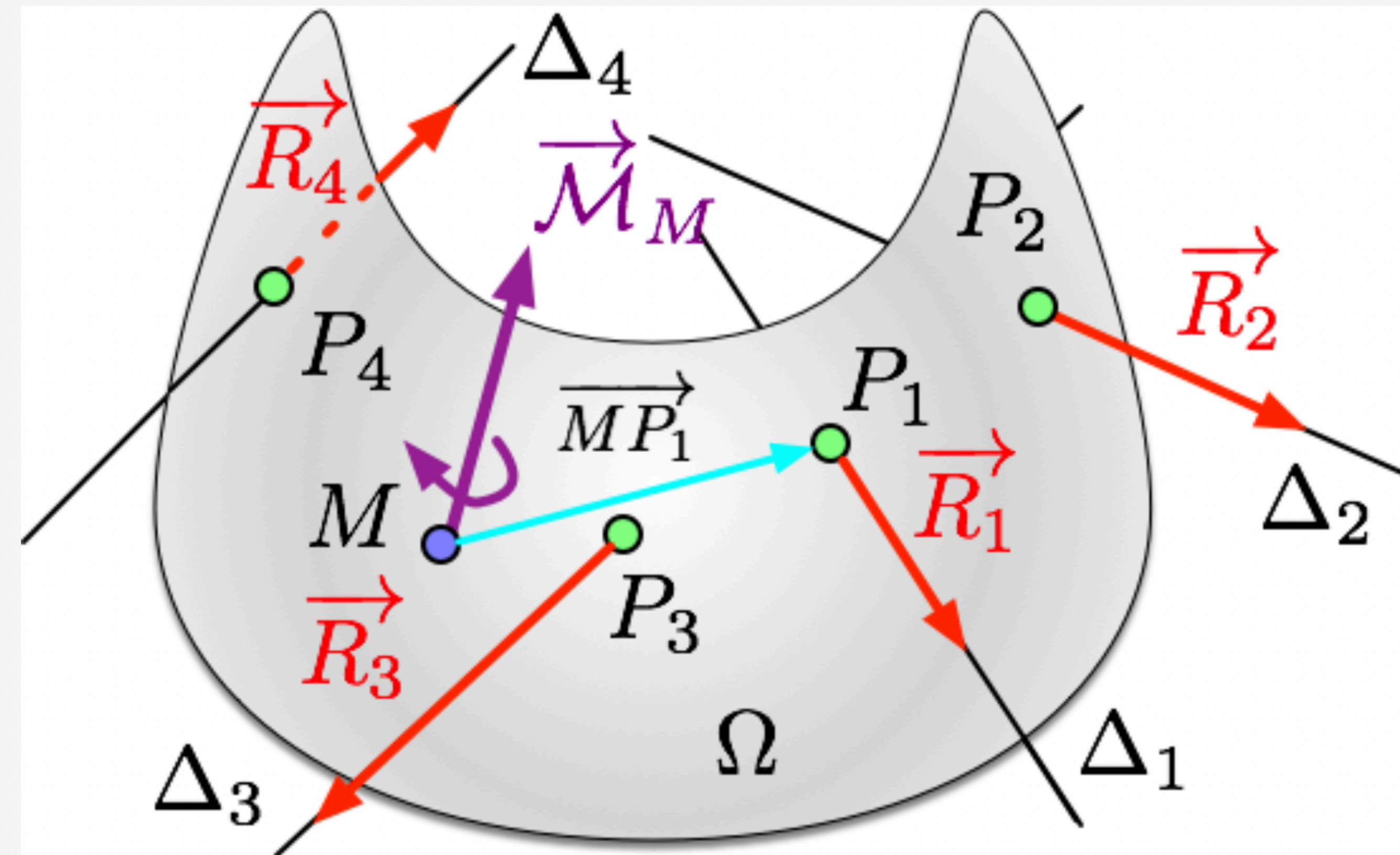
Modélisation des systèmes de forces agissant sur un solide

On considère un solide Ω soumis à un système de forces de N points d'application P_i et d'intensités $\vec{R}_i$ pour $i = 1, \dots, N$. On note Δ_i les droites $\Delta(P_i, \vec{R}_i)$.

On modélise ce système de force par sa "propension à faire tourner un solide autour d'un point M " quelconque, et donc par l'application qui associe à tout point M le moment $\mathcal{M}_M$ des toutes les forces en ce point :

$$M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M .$$

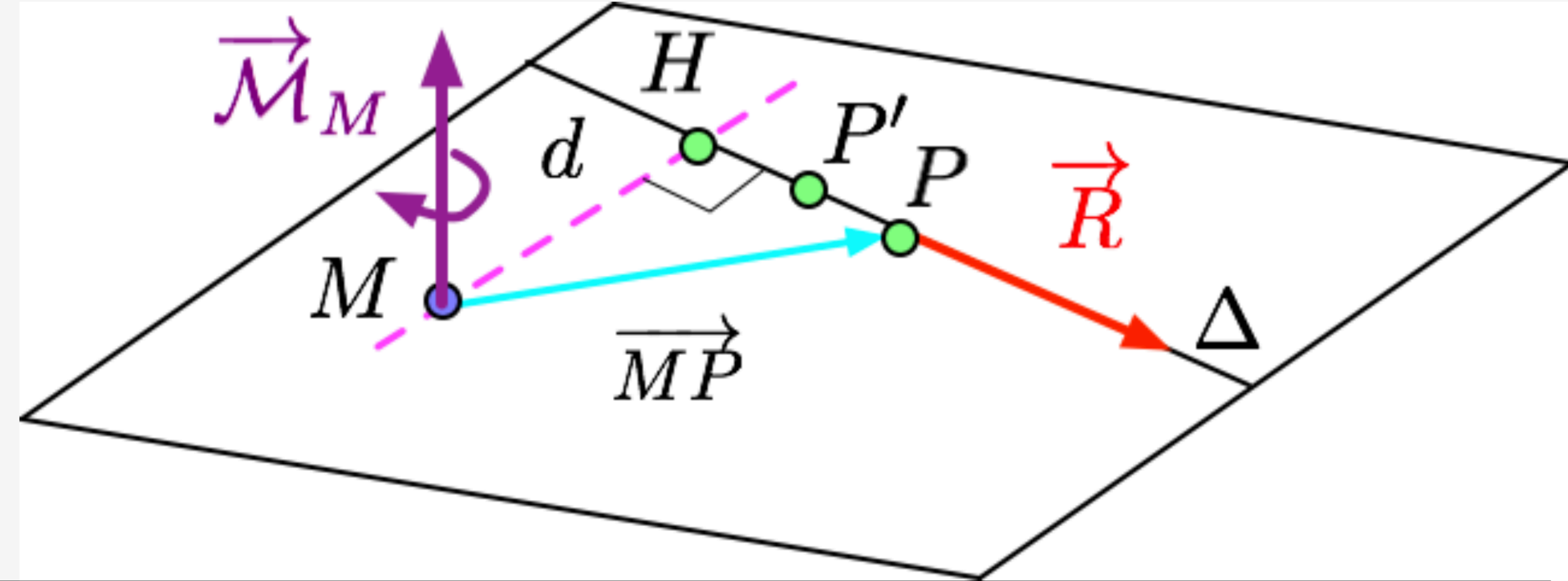
Une telle application est appelé "torseur" et possède des propriétés très particulières que nous allons examiner. Mais commençons par définir le moment d'une force par rapport à un point.



Moment d'une force simple par rapport à un point

On considère une force $\mathcal{F}(P, \vec{R})$ de point d'application P est d'intensité $\vec{R}$. On modélise son action sur un solide par l'application :

$$M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}.$$



En utilisant les propriétés du produit vectoriel, $\vec{\mathcal{M}}_M$ est un vecteur de module $||\vec{\mathcal{M}}_M|| = d ||\vec{R}||$, où d est la distance de M à la droite $\Delta(P, \vec{R})$. La direction du moment est perpendiculaire au plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\vec{R}$. Sa direction est obtenue en indiquant que le repère $(\overrightarrow{MP}, \vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_M)$ est direct.

On remarque que pour tout point P' de la droite $\Delta(P, \vec{R})$ la force $\mathcal{F}(P', \vec{R})$ conduit aux mêmes moments $\vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MP'} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}$ puisque $\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} = \vec{0}$. On appelle alors "glisseur" $\mathcal{G}(\Delta, \vec{R})$ l'application qui associe à tout point M le moment $\vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}$ où P est un point quelconque de la droite Δ .

Modélisation des systèmes de forces agissant sur un solide

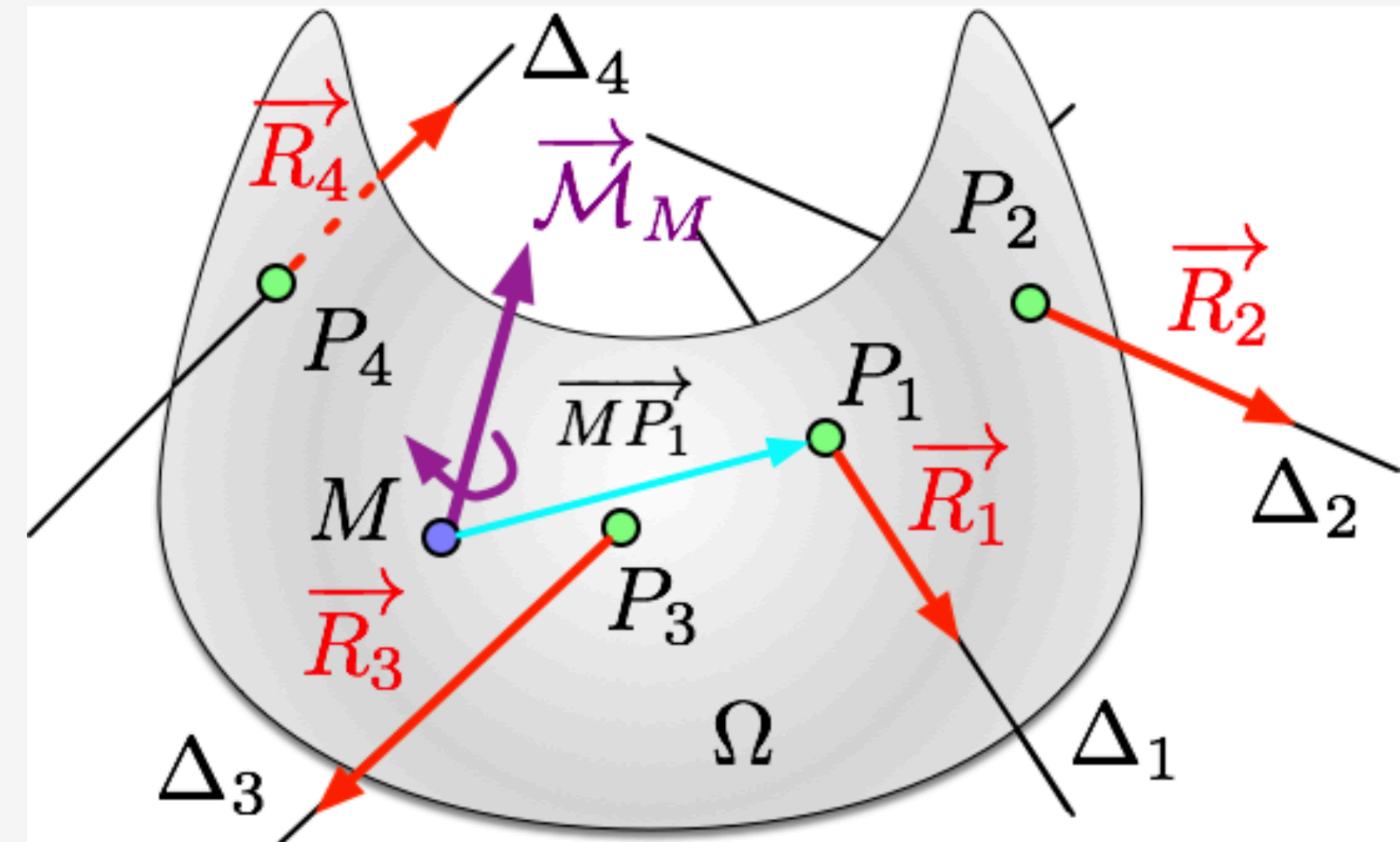
Le moment en un point M d'un système de forces de N glisseurs $\mathcal{G}(\Delta_i, \vec{R}_i)$ s'obtient en choisissant au hasard des points P_i sur les droites Δ_i et en écrivant $\vec{\mathcal{M}}_M = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{MP_i} \wedge \vec{R}_i$.

L'application $M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M$ ainsi obtenue est un torseur, qui vérifie, pour tous points A et B , la propriété

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} \quad \text{avec} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i.$$

On appelle "torseur" toute application qui vérifie cette propriété. En choisissant un point O quelconque, on note alors $\mathcal{T}(\vec{\mathcal{M}}_O, \vec{R})$ un torseur que l'on définit par la relation

$$M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M = \vec{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{R}.$$

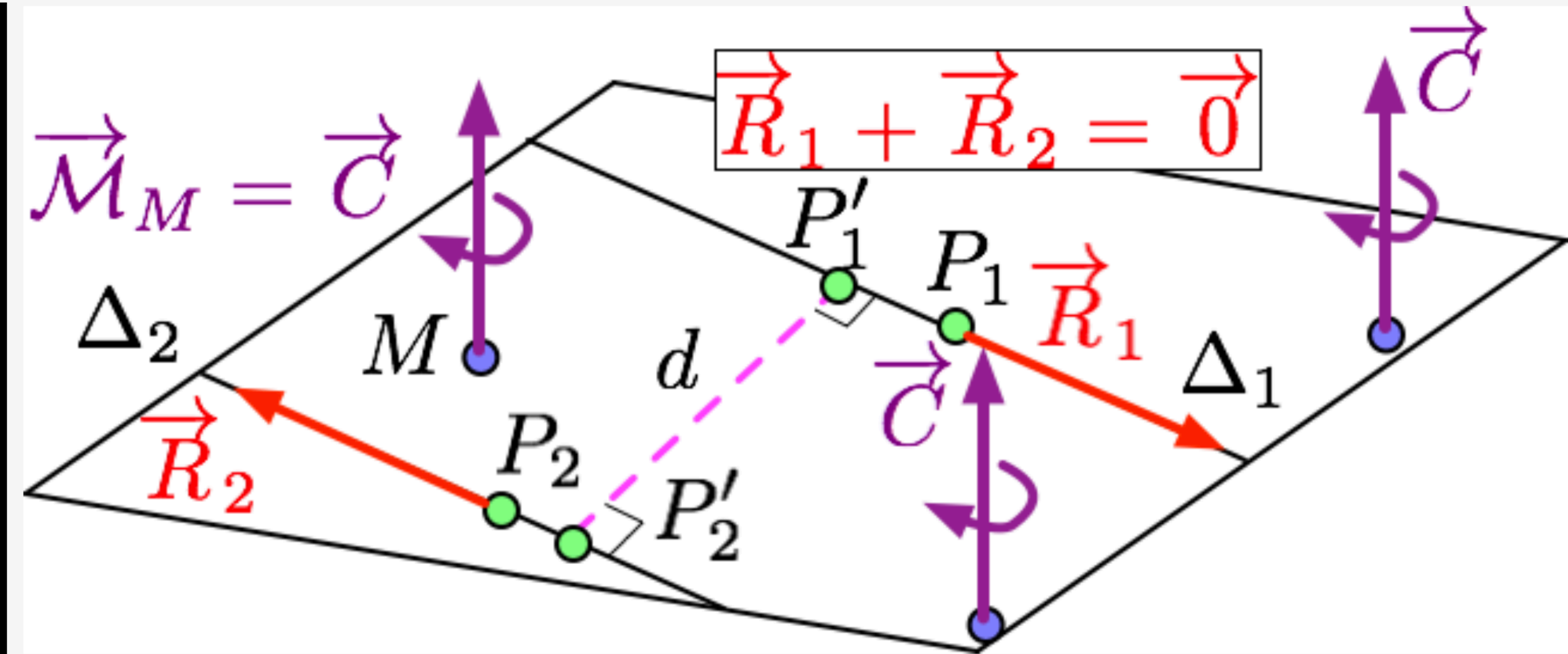


Un torseur particulier : le couple

La somme de deux glisseurs $\mathcal{G}(\Delta_1, \vec{R}_1)$ et $\mathcal{G}(\Delta_2, \vec{R}_2)$ tels que $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0}$ est le torseur

$$M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MP_1} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{MP_2} \wedge \vec{R}_2 ,$$

où P_1 et P_2 sont deux points que l'on peut choisir au hasard sur les droites Δ_1 et Δ_2 .



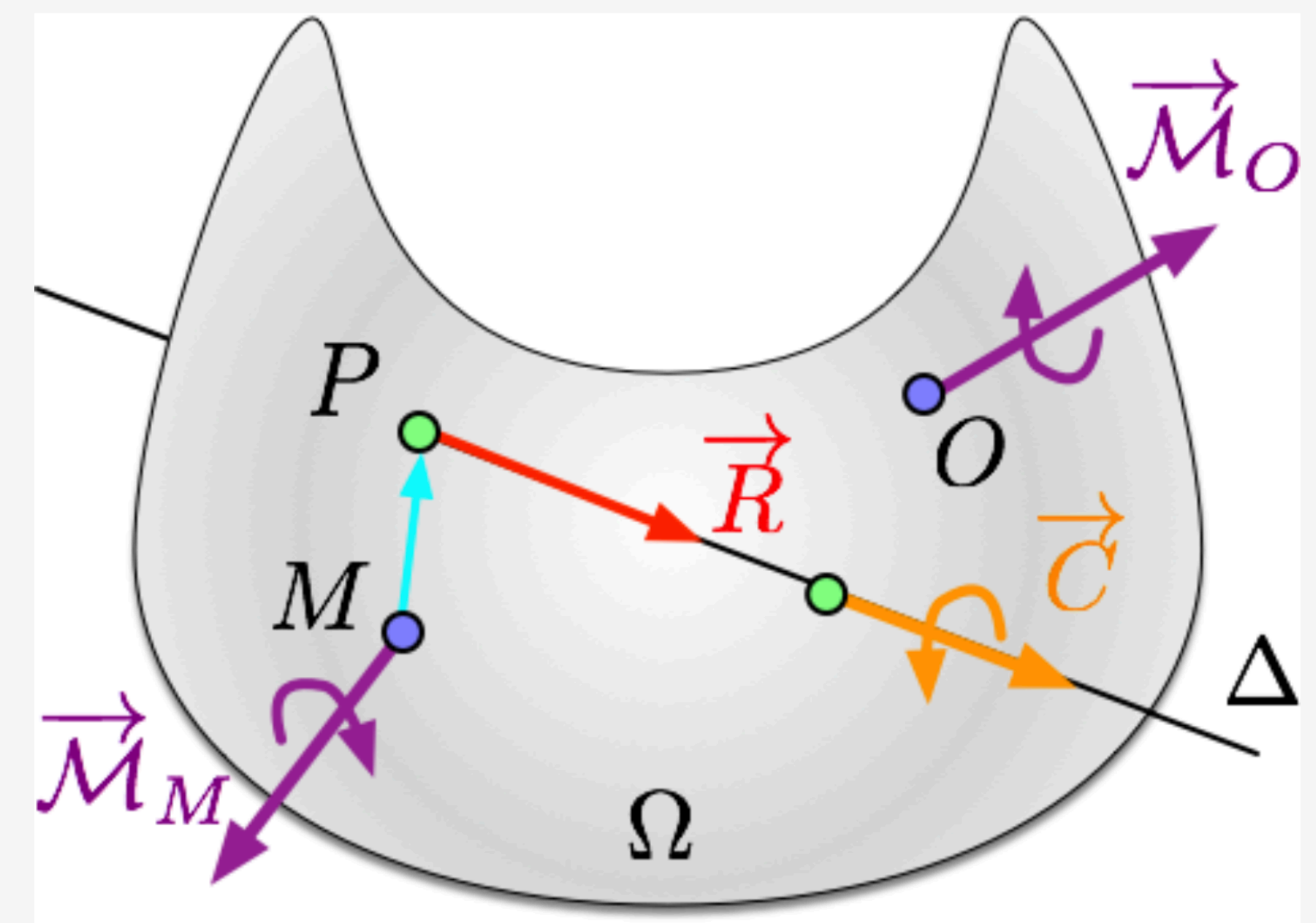
Comme $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$, le couple est une application constante $M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M = \vec{C}$ avec

$$\vec{C} = (\overrightarrow{MP_2} + \overrightarrow{P_2P_1}) \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{MP_2} \wedge (-\vec{R}_1) = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{R}_1 = \overrightarrow{P_2P_1} \wedge \vec{R}_2 = \overrightarrow{P'_1P'_2} \wedge \vec{R}_1 = \overrightarrow{P'_2P'_1} \wedge \vec{R}_2$$

où P'_1 et P'_2 sont des points des droites Δ_1 et Δ_2 tels que $\overrightarrow{P'_2P'_1}$ est perpendiculaire à la direction commune des ces droites. Le couple $\vec{C}$ est donc un vecteur perpendiculaire au plan engendré par les deux droites et son module est $||\vec{C}|| = d||\vec{R}_1|| = d||\vec{R}_2||$ avec $d = ||\overrightarrow{P'_1P'_2}||$. On note $\mathcal{C}(\vec{C})$ ce torseur couple.

Les torseurs "tire-bouchon"

On considère un torseur $\mathcal{T}(\vec{\mathcal{M}}_O, \vec{R})$ qui est la somme du glisseur $\mathcal{G}(\Delta, \vec{R})$ et du couple $\mathcal{C}(\vec{C})$ tel que $\vec{R}$ et $\vec{C}$ sont parallèles. L'action sur un solide Ω est : on pousse une force d'intensité $||\vec{R}||$ le long de la droite Δ tout en tournant autour de cette droite avec le couple d'intensité $||\vec{C}||$, comme lorsque l'on visse un tire-bouchon.



On montre que tout $\mathcal{T}(\vec{\mathcal{M}}_O, \vec{R})$ est un torseur "tire-bouchon". En effet, on définit le point P par la relation :

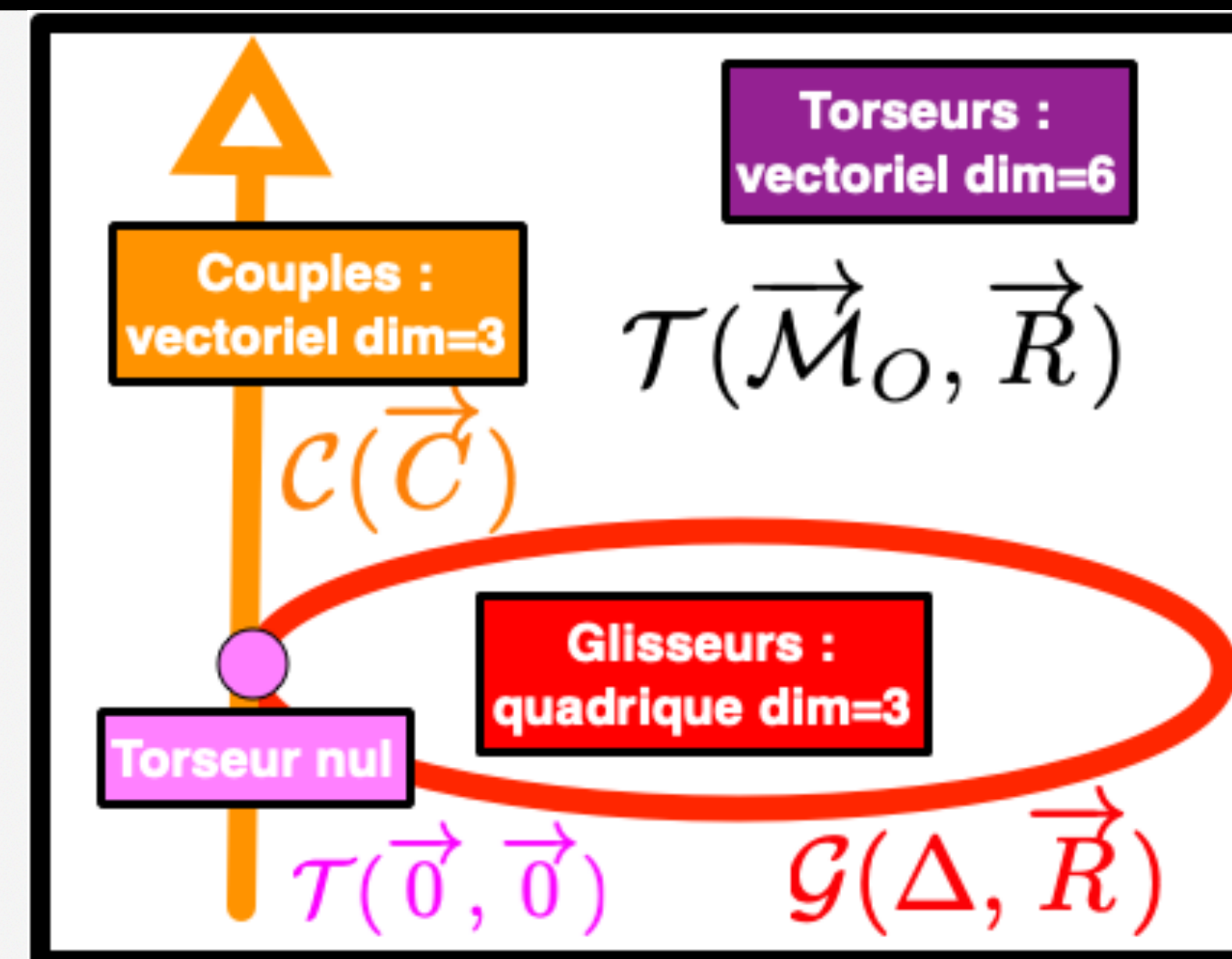
$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O}{\vec{R}^2} \implies \vec{\mathcal{M}}_P - \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{PO} \wedge \vec{R} = \vec{R} \wedge \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O}{\vec{R}^2} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O}{\vec{R}^2} \vec{R} - \vec{\mathcal{M}}_O$$

On a donc $\vec{\mathcal{M}}_P = \left(\vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O / \vec{R}^2 \right) \vec{R} = \vec{C}$ que l'on peut voir comme un couple $\mathcal{C}(\vec{C})$ parallèle à la résultante $\vec{R}$ du glisseur $\mathcal{G}[\Delta(P, \vec{R}), \vec{R}]$. Comme $\vec{\mathcal{M}}_M = \vec{\mathcal{M}}_P + \vec{MP} \wedge \vec{R} = \vec{C} + \vec{MP} \wedge \vec{R}$ on voit que le torseur $\mathcal{T}$ est la somme du couple $\mathcal{C}$ et du glisseur $\mathcal{G}$, et donc un torseur "tire-bouchon".

Conclusion : l'espace vectoriel

Les torseurs sont donc des applications $M \mapsto \vec{\mathcal{M}}_M$ caractérisées par la relation $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$ pour tout couple de point (A, B) . Ils modélisent l'action d'un système de forces sur un solide car le moment $\vec{\mathcal{M}}_M$ traduit la "propension à faire tourner le solide autour d'un point M ".

L'ensemble des torseurs $\mathcal{T}(\vec{\mathcal{M}}_O, \vec{R})$ forme un espace vectoriel de dimension 6 : choix de $\vec{\mathcal{M}}_O$ et choix de $\vec{R}$. Les couples $\mathcal{C}(\vec{C})$ forment un sous-espace vectoriel de dimension 3 : choix de $\vec{C}$. Enfin, les glisseurs $\mathcal{G}(\Delta, \vec{R})$ forment une quadrique de dimension 3 : choix d'un point P à qui l'on affecte un moment nul et choix d'un vecteur $\vec{R}$.



Pour tout torseur $\mathcal{T}$ de résultante $\vec{R}$, il existe une droite unique Δ et un couple unique $\mathcal{C}(\vec{C})$ dans la direction de Δ , tel que $\mathcal{T} = \mathcal{C}(\vec{C}) + \mathcal{G}(\Delta, \vec{R})$

La généralisation du système de forces perpendiculaires à un barreau remplace le point d'application par une "droite d'application" et complète l'action de la résultante par un couple, ces deux vecteurs étant parallèles à la droite.

