Remplissage de la maquette Orifices et ajutages

O. Thual et A. El Moussaoui, 16/07/2021

Dans le cadre de la constrution d'un jeu sérieux réalisant un jumeau numérique de la maquette "Orifices et ajutages", la présente note décrit la modélisation de la phase de remplissage et la trajectoire du jet.

1 Courbe de remplissage

Dans un premier temps, on suppose que le débit Q_e injecté dans la cuve est constant. Le débit sortant est $Q_s = \mu\, A \sqrt{g\ , H}$, où $g = 9,81$ m.s^{-2} est la gravité, A l'aire de l'orifice, H la hauteur entre le centre de l'orifice et la surface libre de la cuve, et $\mu = 0,6$ une constante. Si $S = 1$ m^2 est la section de la cuve, l'équation d'évolution de H s'écrit

$$S\,\dot{H} = Q_e - Q_s = Q_e - \mu\,\sqrt{g\,H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{H} = a - b\,\sqrt{H}\;, \tag{1}$$

avec $a = Q_e/S$ et $b = \mu\,\sqrt{g}/S$. En supposant que $H(0) = 0$, la hauteur $H(t)$ est solution de l'équation implicite :

$$t = -\frac{2\,a}{b^2}\,\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{b}{a}\,\sqrt{H}\right) - \frac{2}{b}\,\sqrt{H}\;. \tag{2}$$

La figure 2 compare la solution analytique avec une simulation numérique obtenue avec un schéma d'Euler.

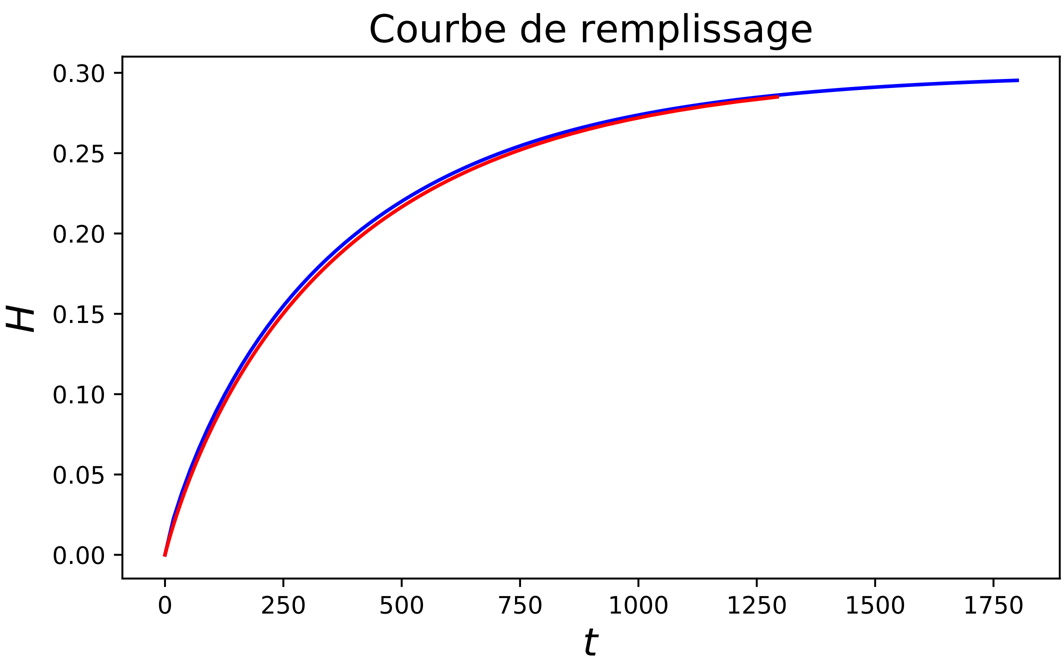

Figure 1: *Hauteur $H(t)$: Schéma d'Euler (bleue) et solution analytique (rouge).*

2 Jet parabolique

Á la sortie de l'orifice, le jet est propulsé à la vitesse $V = 0.98\,\sqrt{2\,g\,H}$. L'équation de la trajectoire du jet est obtenu en résolvant $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{z} = -g$ avec $x(0) = 0$, $z(0) = d$, $\dot{x}(0) = V$ et $\dot{z}(0) = 0$.

On en déduit :

$$x(t) = V\,t \quad \text{et} \quad z(t) = d - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z = F(x) = d - \frac{g\,x^2}{2\,V^2}\,. \tag{3}$$

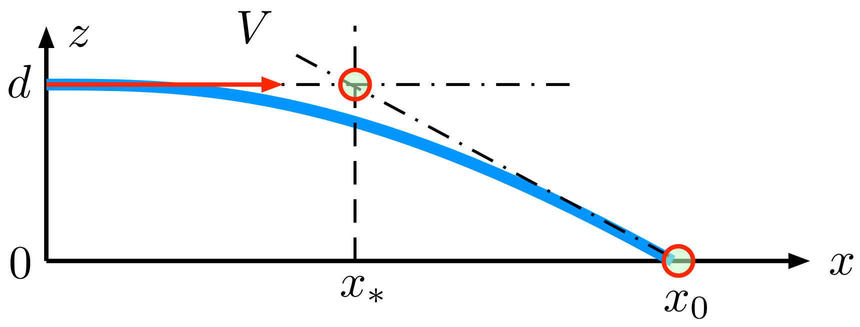

Figure 2: *Tracé du jet parabolique et point d'intersection des tangentes.*

On en déduit que le jet touche le sol ($z = 0$) pour $x_0 = V\,\sqrt{2\,d/g}$. En ce point la dérivée est $F'(x_0) = -g\,x_0/V^2 = -\sqrt{2\,g\,d}/V$. L'intersection des tangentes à la courbe issues des points $(0, d)$ et $(x_0, 0)$ est solution du système :

$$z = d \quad \text{et} \quad z = -F'(x_0)\,(x - x_0) = -\frac{\sqrt{2\,g\,d}}{V}\left(x - V\,\sqrt{\frac{2\,d}{g}}\right)\,. \tag{4}$$

Cette intersection a lieu au point (x_*, d) avec $d = -\frac{\sqrt{2\,g\,d}}{V}\left(x - V\,\sqrt{\frac{2\,d}{g}}\right)$, ce qui conduit à :

$$x_* = V\,\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = V\,\sqrt{\frac{d}{2\,g}} = \frac{x_0}{2}\,. \tag{5}$$

En conclusion, $x_0 = V\,\sqrt{2\,d/g}$ et $x_* = x_0/2$.