SEMAINE 2 - SERIE 2

OPERATEURS DIFFERENTIELS

Rachid Ababou, Vladimir Bergez,
Laurent Bletzacker, Louis Randriamihamison

Semaine du 17 novembre 2003

Table des matières

Chapitre 1

Chapitre 2

Une série d'exercices sur les Opérateurs Différentiels

2.1 Exercice avec correction détaillée

1. **Le potentiel Newtonien**

   La loi de Newton affirme que deux corps de masses respectives m et m' exercent l'un sur l'autre des forces opposées, d'intensité proportionnelle au produit de leurs masses, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Plus précisément, un corps de masse m, de centre de masse A, de coordonnées (a, b, c) dans un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ exerce sur un corps de masse m', de centre de masse M de coordonnées (x, y, z) la force suivante :

   $$\vec{F} = -Kmm' \frac{\overrightarrow{AM}}{||AM||^3}$$

   (a) Expliciter les coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   (b) Montrer que le champ $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.

   (c) Déterminer une fonction $\phi(x, y, z)$ telle que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$. Donner alors toutes les fonctions ϕ vérifiant $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.

2. **Le potentiel Electromagnétique**

   Une charge q placée à l'origine O d'un repère de l'espace et animée d'une vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ non relativiste ($v << c$) crée au point M repéré par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$ un champ magnétique $\vec{H} = \dfrac{q}{4\pi} \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{||\vec{r}||^3}$

   (a) Calculer les composantes du champ $\vec{H}$ en coordonnées cartésiennes.

(b) Calculer la divergence div $\vec{H}$.

(c) Déterminer un champ de vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{H} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$. Quels est la forme générale des champs de vecteurs répondant à la question ?

Correction détaillée

1. (a) Les coordonnées se calculent aisément :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-a \\ z-a \end{pmatrix} \text{ et } ||\overrightarrow{AM}|| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = \rho$$

d'où

$$\vec{F} = -Kmm' \begin{pmatrix} \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}^3} \\ \\ \dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}^3} \\ \\ \dfrac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}^3} \end{pmatrix} = -Kmm' \begin{pmatrix} \dfrac{x-a}{\rho^3} \\ \\ \dfrac{y-b}{\rho^3} \\ \\ \dfrac{z-c}{\rho^3} \end{pmatrix}$$

(b) Pour affirmer que le champ $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire, il faut vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$. On effectue le calcul :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = (-Kmm') \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{x-a}{\rho^3} \\ \\ \dfrac{y-b}{\rho^3} \\ \\ \dfrac{z-c}{\rho^3} \end{pmatrix}$$

On se rappelle alors que

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{\rho^3} = -3\,\frac{x-a}{\rho^5}$$

Et de même pour les autres dérivées. On obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = (-Kmm')\begin{pmatrix} -3\dfrac{(y-b)(z-c)}{\rho^5} + 3\dfrac{(y-b)(z-c)}{\rho^5} \\ \\ -3\dfrac{(x-a)(z-c)}{\rho^5} + 3\dfrac{(x-a)(z-c)}{\rho^5} \\ \\ -3\dfrac{(y-b)(x-a)}{\rho^5} + 3\dfrac{(y-b)(x-a)}{\rho^5} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Ce résultat montre que le champ $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire, c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire $\phi(x, y, z)$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

(c) On cherche donc une fonction $\phi(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z) = (-Kmm')\,\frac{x-a}{\rho^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = (-Kmm')\,\frac{y-a}{\rho^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = (-Kmm')\,\frac{z-a}{\rho^3}$$

On constate la symétrie des 3 équations en x, y, z. Aussi suffit-il de n'en résoudre qu'une, par exemple la première :

$$\frac{x-a}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^2}\frac{x-a}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial x}\rho$$

D'où on peut prendre pour fonction ϕ :

$$\phi(x,y,z) = Kmm'\,\frac{1}{\rho} = \frac{Kmm'}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Pour obtenir toutes les fonctions ϕ répondant à la question, il suffit d'y ajouter une fonction dont le gradient est nul, c'est-à-dire une constante C.

$$\phi(x,y,z) = \frac{Kmm'}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} + C$$

Ce résultat est conforme à la théorie du potentiel scalaire qui affirme que celui-ci n'est définit qu'à une constante près.

2. (a) C'est un simple calcul de produit vectoriel :

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} z\,v_y - y\,v_z \\ x\,v_z - z\,v_x \\ y\,v_x - x\,v_y \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\\
&= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{z\,v_y-y\,v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{x\,v_z-z\,v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{y\,v_x-x\,v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= \frac{q}{4\pi}\frac{-3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(x(z\,v_y-y\,v_z)+y(x\,v_z-z\,v_x)+z(y\,v_x-x\,v_y)\Big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Le fait que $\operatorname{div}\vec{H}=0$ nous permet d'affirmer l'existence au moins localement d'un champ vectoriel $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ tel que $\vec{H}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Déterminons les composantes d'un tel champ : Les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi}\frac{z\,v_y-y\,v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi}\frac{x\,v_z-z\,v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi}\frac{y\,v_x-x\,v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Ce système ne se résoud pas par un procédé sytématique!

On peut par exemple poser :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_z}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi}\frac{-y\,v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi}\frac{-z\,v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

etde même pour les autres relations. On trouve un vecteur $\vec{A}$ répondant à la question :

$$\vec{A}=\frac{q}{4\pi}\begin{pmatrix}\dfrac{v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\end{pmatrix}$$

Pour déterminer tous les vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{H}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, il suffit d'ajouter au vecteur ci-dessus un champ de vecteur $\vec{V}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}=\vec{0}$ c'est-à-dire un champ de gradient.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\, q}{4\pi} \begin{pmatrix} \dfrac{v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$$

où ϕ est un champ scalaire arbitraire de classe C^2.

2.2 Exercice avec indications et réponses

On considère le champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V} = \big(x\, f(r), y\, f(r), 2z\, f(r)\big)$ où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $r \longmapsto f(r)$ est une fonction de r de classe C^1.

1. Déterminer la fonction f vérifiant $f(1) = 1$ pour qu'il existe un champ de vecteurs $\vec{U}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$.
2. Déterminer alors le champ de vecteur $\vec{U} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), 0\big)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$.
3. Donner la forme générale des potentiels-vecteurs $\vec{U}$.

Indications et réponses

1. Pour que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel, on doit avoir $\mathrm{div}\, \vec{V} = 0$, ce qui donne l'équation différentielle que doit vérifier la fonction f :

$$4f(r) + r f'(r) = 0$$

la résolution de cette équation avec la condition $f(1) = 1$ donne

$$f(r) = \frac{1}{r^4}$$

Le champ $\vec{V}$ s'ecrit alors :

$$\vec{V} = \big(\frac{x}{r^4}, \frac{y}{r^4}, \frac{2z}{r^4}\big) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

2. Si le champ $\vec{U}$ vérifie $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$, alors on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{-x}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2z}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

On peut donc prendre comme solution particulière :

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{yz}{(x^2+y^2)^2} \\
Q(x,y,z) &= \frac{-xz}{(x^2+y^2)^2} \\
R(x,y,z) &= 0
\end{aligned}
$$

3.

$$\vec{U} = \left(\frac{yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-xz}{(x^2+y^2)^2}, 0\right) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

2.3 Exercice libre

A rendre sur feuille séparée pour le lundi 24 novembre 2003

On considère le champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V} = \left(x^2+y^2, -xy, -x\right)$

1. Déterminer une fonction ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 1$ et telle que $\phi(z)\vec{V}$ soit un champ de rotationnel.
2. Déterminer alors un champ de vecteurs $\vec{U} = ((P(x,y,z), Q(x,y,z), 0)$ tel que $\phi(z).\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.