MODULE 3

SYSTEMES DIFFERENTIELS - ANALYSE VECTORIELLE

EXERCICES - SEMAINE 3

Rachid Ababou
Laurent Bletzacker
Louis Randriamihamison
Vladimir Bergez

2003-2004

Table des matières

1 Première série : Intégrales Curvilignes **3**
1.1 Exercice avec correction détaillée 3
1.2 Exercice avec indications et réponses 7
1.3 Exercice libre 7

2 Deuxième série : Formule de Green-Riemann **9**
2.1 Exercice avec correction détaillée 9
2.2 Exercice avec indications et réponses 12
2.3 Exercice libre 14

3 Troisième série : Formule de Stockes-Ampère **17**
3.1 Exercice avec correction détaillée 17
3.2 Exercice avec indications et réponses 22
3.3 Exercice libre 24

Chapitre 1

Première série : Intégrales Curvilignes

1.1 Exercice avec correction détaillée

Potentiel central

Une particule chargée immobile placée à l'origine O d'un repère de l'espace crée un champ électrique autour d'elle qui a pour valeur au point M :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1. Exprimer le champ de vecteurs $\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes. Calculer son rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$.
2. Déterminer un champ scalaire ϕ tel que $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.
3. Déterminer les surfaces d'équipotentiel ou surfaces de niveaux $\phi =$ constante.
4. Une autre particule chargée se déplaçant dans le champ $\vec{E}$ est soumise à la force électrique $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}$.
   Calculer le travail de la force $\vec{F}$ lorsque la particule suit les courbes paramétrées suivantes :
   (a)
   $$\gamma(t) = (t, t, t) \quad t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$$
   (b)
   $$\delta(t) = (2 + \cos t, \sin t, 0) \quad t \in [-\pi, 0]$$
   Pourquoi obtient-on la même valeur dans les deux cas ?

Correction détaillée

Pour le cours correspondant, on pourra se réferrer au complément de cours de la troisième semaine.

Nous détaillons la solution de cet exercice en mettant en correspondance la terminologie mathématique usuelle et la terminologie physique.

1. La première question est immédiate puisque $\vec{r} = (x, y, z)$ et $||\vec{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel est par définition :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \quad = \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \quad = \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

2. Puisque le rotationnel du champ vectoriel $\vec{E}$ est nul sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$, il existe un champ scalaire
$\phi : \mathbb{R}^3 \backslash \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$.
Déterminons la fonction ϕ. L'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donne en intégrant :

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \varphi(y, z)$$

En dérivant par rapport à y cette égalité, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,z)$$

Et l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,z) = 0$$

Soit $\varphi(y,z) = \varphi(z)$. On recommence une dernière fois pour la dérivation par rapport à z :

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On trouve : $\varphi'(z) = 0$, soit $\varphi(z) = C$, où C est une constante indéterminée. Finalement, on peut écrire :

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque

La fonction ϕ est en fait le potentiel électrique crée par la charge q, ce potentiel n'est défini qu'à une constante arbitraire C près qui est le potentiel de référence.

3. Les surfaces de potentiel constant sont donc les lignes de niveaux de la fonction ϕ c'est-à-dire les surfaces d'équation cartésienne

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \text{constante}\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \text{constante}\end{aligned}$$

Ce sont donc des sphères centrées sur la particule.

4. (a) Le travail de la force $\vec{F}$ est la circulation du champ de vecteurs $\vec{F}$ le

long de la courbe γ. On calcule :

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \vec{F} \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt \\
&= \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 3 \frac{t}{(3t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt \\
&= \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}t^2}\, dt \\
&= \frac{q\,q'}{4\sqrt{3}\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{q\,q'}{6\pi\epsilon_0}
\end{aligned}$$

(b) De même, ici on calcule :

$$T = \int_{-\pi}^{0} \vec{F} \cdot \vec{\delta}' dt$$

$$\begin{aligned}
T = \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^{0} \Bigg[& \frac{2+\cos t}{((2+\cos t)^2 + \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} (-\sin t) \\
& + \frac{\sin t}{((2+\cos t)^2 + \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} (\cos t) \Bigg] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^{0} \frac{-2\sin t}{(5+4\cos t)^{\frac{3}{2}}} dt \\
&= \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(5+4\cos t)^{\frac{1}{2}}}\right]_{-\pi}^{0} \\
&= \frac{q\,q'}{6\pi\epsilon_0}
\end{aligned}$$

On constate que l'on obtient le même résultat. Ceci s'explique par le fait que les origines et les extrémités des deux courbes γ et δ sont respectivement sur les mêmes surfaces équipotentielles, à savoir la sphère de centre O et de rayon 1 pour les origines, et la sphère de centre O et de rayon 3 pour les extrémités.

Dans les deux cas, le travail peut se calculer par la différence de potentiel :

$$T = q'\Big(\phi((3,0,0) - \phi(1,0,0)\Big) = \frac{q\,q'}{6\pi\epsilon_0}$$

1.2 Exercice avec indications et réponses

On considère la fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} P(0,0) & = & 0 \\ P(x,y) & = & x\ln(x^2+y^2) - y \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{array}$$

1. Déterminer une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $Q(0,y) = 2y\ln y$ et telle que le champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$, $\vec{V}(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$ soit de la forme $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.
2. Déterminer alors les fonctions ϕ vérifiant $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.
3. Calculer alors la circulation du champ $\vec{V}$ le long du segment de droite joignant le point $(0,0)$ au point (x,y).

Indications et réponses

1. On doit avoir $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, on obtient aprés intégration :

$$\begin{array}{rcl} Q(0,0) & = & 0 \\ Q(x,y) & = & y\ln(x^2+y^2) - x \end{array}$$

2.

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x+y)^2 + C$$

3. Un calcul direct donne :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\gamma \vec{V}.\vec{\gamma}'\,dt & = & \left[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - 2xy\right]\displaystyle\int_0^1 t\;dt + 2(x^2+y^2)\int_0^1 t\ln t\,dt \\ & = & \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - \dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{array}$$

1.3 Exercice libre

On considère le champ vectoriel $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ z\,f(x) \\ y\,g(x) \end{pmatrix}$$

où f et g sont des fonctions numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les fonctions f et g telles que $\vec{V}$ soit un champ de gradient et telles que $f(0) = g(0) = 0$.
2. Déterminer les fonctions ϕ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

3. Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long de l'arc paramétré $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, avec $t \in [0, \pi]$.
4. Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long d'un arc quelconque joingnant le point $M(x, y, z)$ au point $N(x', y', z')$.

Chapitre 2

Deuxième série : Formule de Green-Riemann

2.1 Exercice avec correction détaillée

Aire de l'ellipse - Deuxième loi de Kepler

Pour introduire cet exercice, nous voulons rappeler les deux premières lois de Kepler régissant le mouvement des planètes dans notre système solaire :

Première loi : *Toutes les planètes décrivent autour du soleil des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.*

Deuxième loi :*Les aires balayées en des temps égaux par le rayon vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *allant du soleil (foyer) à la planète sont égales.*

Nous considérons une ellipse γ paramétrée par :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sqrt{a^2-b^2}+a\,\cos t \\ y(t) & = & b\,\sin t \\ t & \in & [0,2\pi] \qquad (0<b<a) \end{array}$$

1. En utilisant la formule de Riemann-Green, calculer l'aire totale intérieure à l'ellipse.
2. En utilisant à nouveau la formule de Riemann-Green, calculer l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ lorsque t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

Correction détaillée

Pour les compléments de cours correspondants, se réferrer aux chapitres 1 et 2 du Formulaire de la troisième semaine.

1. L'aire de l'ellipse se calcule normalement par l'intégrale double

$$\iint_E dx\,dy$$

La formule de Riemann-Green permet de transformer cette intégrale double en une intégrale curviligne le long de l'ellipse, en effet :
Déterminons un champ de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ tel que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Bien des réponse sont possibles parmi lesquelles nous retiendrons :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Pour la facilité des calculs nous utiliserons le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient

$$\begin{aligned} \iint_E dx\,dy &= \int_\gamma \vec{V}\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} [-y(t)]\,x'(t)\,dt \\ &= ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

2. Le secteur angulaire dont on veut calculer l'aire est délimité par 3 arcs distincts :

1. Un arc rectiligne allant de $O(0,0)$ à $A(\sqrt{a^2-b^2}+a,0)$

2. L'arc de l'ellipse allant de $A(\sqrt{a^2-b^2}+a,0)$ pour $(t=0)$ à $B(\sqrt{a^2-b^2},b)$ pour $(t=\frac{\pi}{2})$

3. Un arc rectiligne allant de $B(\sqrt{a^2-b^2},b)$ à $O(0,0)$

On doit donc selon la formule de Rieman-Green calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \vec{V}\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$ successivement le long de ces 3 arcs :

1) $\gamma_1 : t \longmapsto \big(t(\sqrt{a^2-b^2}+a),0\big)$, avec $t\in[0,1]$.

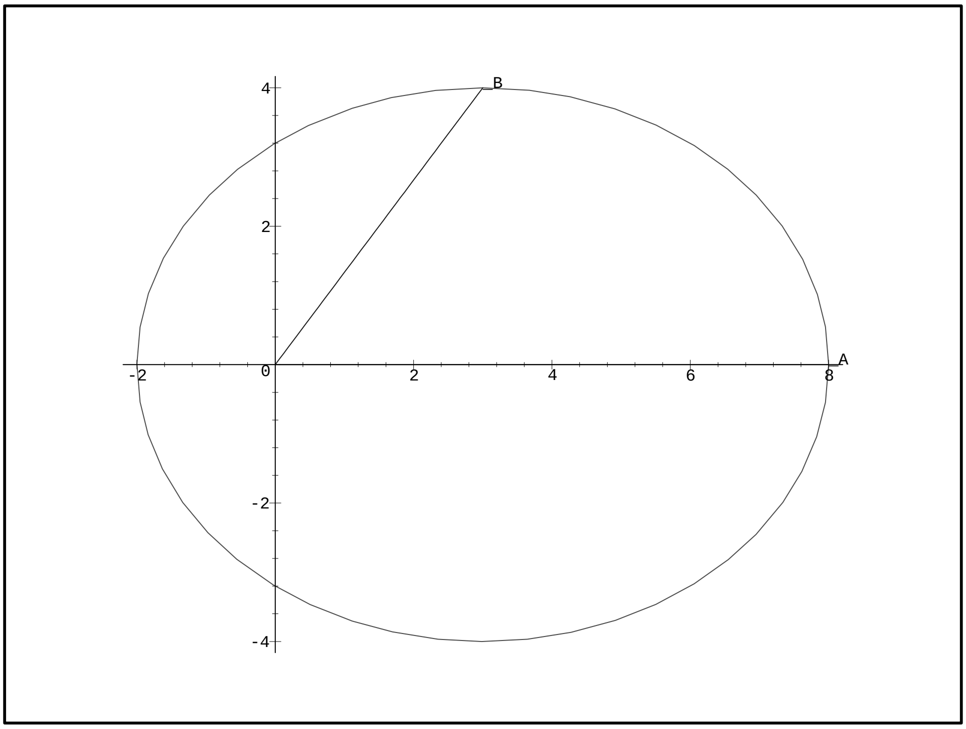

FIG. 2.1 – Aire du secteur OAB

2) $\gamma_2 : t \longmapsto (x(t), y(t))$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3) $\gamma_3 : t \longmapsto ((1-t)\sqrt{a^2-b^2}, (1-t)b)$, avec $t \in [0, 1]$.

Le champ de vecteurs $\vec{V} = (-y, 0)$ est identiquement nul le long de γ_1 donc sa circulation le long de γ_1 est nulle.
La circulation de $\vec{V} = (-y, 0)$ le long de l'arc elliptique est donnée comme dans la question 1) par :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \vec{\gamma_2}'(t)\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-y(t)]\, x'(t)\, dt \\
&= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \\
&= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt \\
&= \frac{\pi ab}{4}
\end{aligned}$$

La circulation $\vec{V} = (-y, 0)$ le long de l'arc rectiligne γ_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \vec{V} \cdot \vec{\gamma_3}'(t)\, dt &= \int_0^1 -(1-t)\, b \times (-\sqrt{a^2-b^2})\, dt \\
&= \sqrt{a^2-b^2} \int_0^1 (1-t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}
\end{aligned}$$

On a donc la circulation totale et donc l'aire balayée en additionnant :

$$Aire = \frac{\pi ab}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$$

2.2 Exercice avec indications et réponses

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe fermée constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).
2. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Riemann-Green.

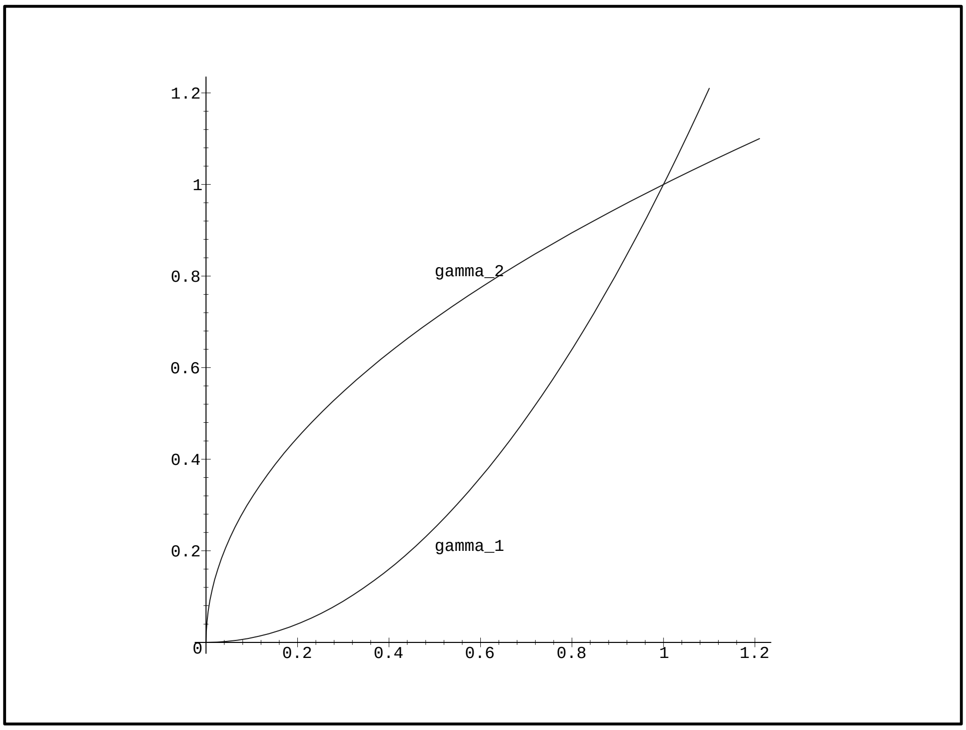

FIG. 2.2 – Arcs de parabole

Indications et réponses

1. Nous pouvons prendre comme paramétrisation du premier arc de parabole : $\gamma_1 : t \longmapsto (t, t^2)$ avec $t \in [0,1]$; et pour le second arc de parabole : $\gamma_1 : t \longmapsto ((1-t)^2, (1-t))$ avec $t \in [0,1]$.
   On obtient :
   $$C = \int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = \frac{1}{30}$$
2. La formule de Rieman-Green donne :
   $$\begin{aligned} C &= \iint_D \frac{\partial(x+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy-x^2)}{\partial y}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

2.3 Exercice libre

Exercice à rendre pour le lundi 1^{er} décembre 2003

1. On considère l'arche de cycloïde Γ paramétrée par
   $$\begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$
   Représenter graphiquement la courbe Γ en précisant les tangentes horizontales et verticales.
2. Calculer l'aire du domaine D intérieur à la courbe Γ.
3. Calculer l'intégrale
   $$I = \iint_D (y - x)\, dx\, dy$$
   en la transformant en intégrale curviligne

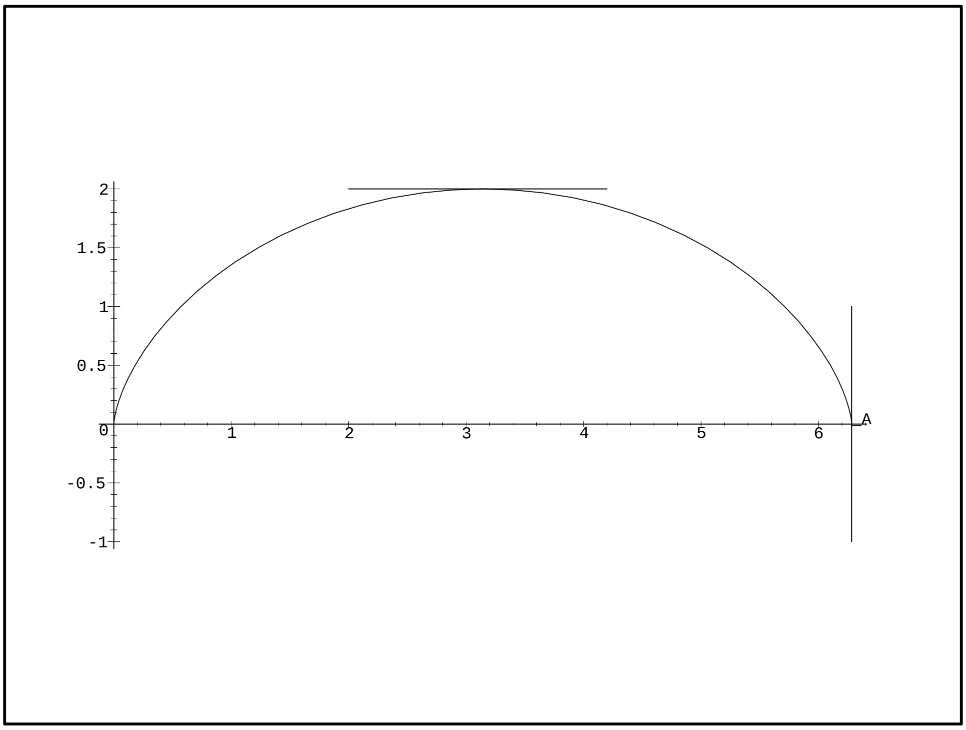

FIG. 2.3 – Arche de cycloïde

Chapitre 3

Troisième série : Formule de Stockes-Ampère

3.1 Exercice avec correction détaillée

Champ magnétique et calcul de flux

Cet exercice reprend une partie des calculs faits dans la deuxième semaine.

Une charge q placée à l'origine O d'un repère de l'espace et animée d'une vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ non relativiste ($v << c$) crée au point M repéré par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$ un champ magnétique $\vec{H} = \dfrac{q}{4\pi} \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{||\vec{r}||^3}$

1. Calculer les composantes du champs de vecteur $\vec{H}$ en coordonnées cartésiennes.
2. Déterminer un potentiel-vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{H} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.
3. On suppose qu'on a choisi le repère cartésien de telle manière que l'on ait : $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Calculer alors le flux de $\vec{H}$ sortant à travers une sphère de centre O et de rayon R.
4. Toujours pour $\vec{v} = (0, 0, 1)$, calculer le flux de $\vec{H}$ sortant à travers une portion de cylindre d'axe (Oy), de rayon R et allant de $y = 0$ à $y = 1$.

Correction détaillée

1. C'est un simple calcul de produit vectoriel :

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} z\,v_y - y\,v_z \\ x\,v_z - z\,v_x \\ y\,v_x - x\,v_y \end{pmatrix}$$

2. Déterminons les composantes d'un champ $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ tel que $\vec{H} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Déterminons les composantes d'un tel champ : Les équations

à résoudre sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi}\frac{z\,v_y - y\,v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi}\frac{x\,v_z - z\,v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi}\frac{y\,v_x - x\,v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Ce système ne se résoud pas par un procédé sytématique!
On peut par exemple poser :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_z}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi}\frac{-y\,v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi}\frac{-z\,v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

etde même pour les autres relations. On trouve un vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi}\left(\begin{array}{c} \dfrac{v_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{v_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{v_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right)$$

3. On utilise la paramétrisation de la sphère :

$$\begin{aligned}
x &= R\,\sin\varphi\,\cos\theta \\
y &= R\,\sin\varphi\,\sin\theta \\
z &= R\,\cos\varphi
\end{aligned}$$

Pour calculer un vecteur normal, on calcule d'abord les vecteurs dérivés par rapport à θ, $\vec{v_\theta}$ et par rapport à φ, $\vec{v_\varphi}$ tangents aux lignes de coordonnées :

$$\vec{v_\varphi} = \left(\begin{array}{c} R\cos\varphi\,\cos\theta \\ R\cos\varphi\,\sin\theta \\ -R\sin\varphi \end{array}\right) \qquad \vec{v_\theta} = \left(\begin{array}{c} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{array}\right)$$

Un vecteur normal est par exemple

$$\vec{N} = \vec{v_\varphi} \wedge \vec{v_\theta} = \left(\begin{array}{c} R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{array}\right)$$

On peut vérifier soit en calculant par exemple avec $\varphi = \theta = 0$ ou bien en utilisant la règle d'orientation du produit vectoriel que le vecteur obtenu est bien un vecteur **sortant** de la sphère
Le vecteur normal $\vec{N}$ sortant est donc :

$$\vec{N} = R^2 \sin\varphi \begin{pmatrix} \sin\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le champ $\vec{H}$ calculé sur la sphère est :

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\,R^3}\begin{pmatrix} -R\,\sin\varphi\,\sin\theta \\ R\,\sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi\,R^2}\begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le flux de $\vec{H}$ sortant à travers la sphère est :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \vec{B}\cdot\vec{N}\ d\varphi\, d\theta \\ &= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 0\ d\varphi\, d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le flux est nul, on aurait pu prédire ce résultat en utilisant la formule d'Ampère-Stockes qui nous conduisait à intégrer $\vec{A}$ sur un bord vide !

4. Pour calculer ce nouveau flux, nous utilisons ici la formule d'Ampère-Stockes :

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\cdot\vec{N})dudv = \int_\gamma (\vec{V}\cdot\vec{\gamma}')\ dt$$

où γ est le bord orienté de la surface Σ.
Ici la surface est une portion de cylindre paramétrisée par :

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta \\ y &\in [0,1] \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$

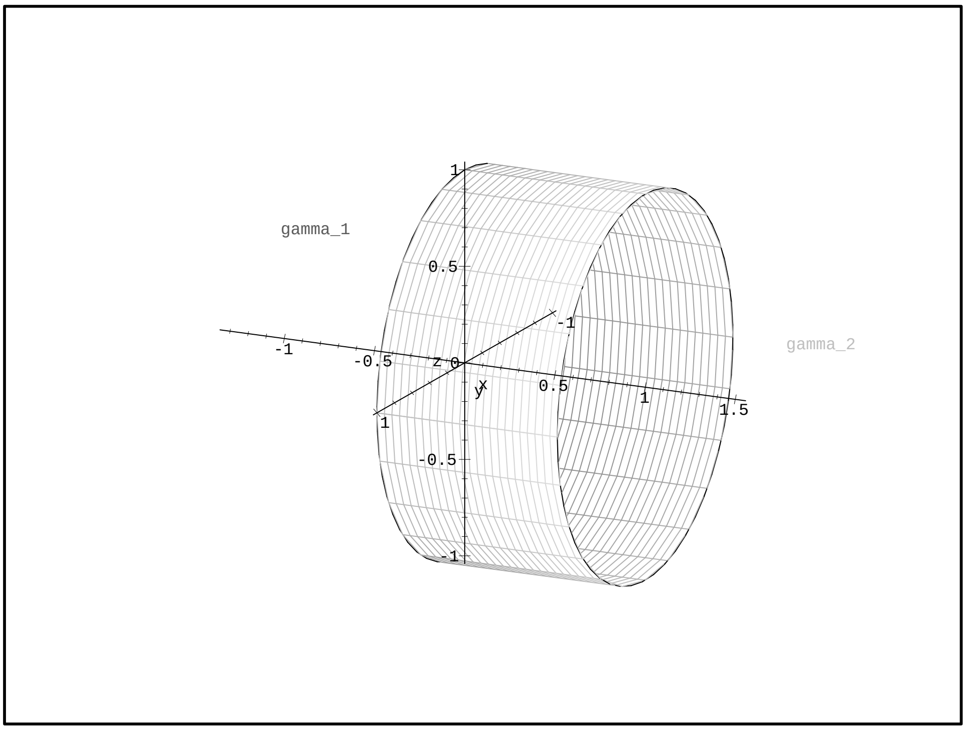

Fig. 3.1 – Un tronc de cylindre

Le bord de cette surface est la réunion des deux cercles γ_1 et γ_2 :

$$\begin{array}{lcll} \gamma_1 & : & x^2+z^2=R^2 \quad \text{et} \quad y=0 \\ \gamma_2 & : & x^2+z^2=R^2 \quad \text{et} \quad y=1 \end{array}$$

Nous devons parcourir ces cercles en respectant l'orientation : le vecteur $\vec{N} \wedge \vec{\gamma'}$ doit être dirigé vers la surface Σ.
Ainsi le cercle γ_1 aura pour paramétrisation :

$$\begin{array}{lcl} x & = & R\sin t \\ y & = & 0 \\ z & = & R\cos t \end{array}$$

alors que le cercle γ_2 aura pour paramétrisation :

$$\begin{array}{lcl} x & = & R\cos t \\ y & = & 1 \\ z & = & R\sin t \end{array}$$

Calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$ le long de γ_1 :

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

Calcul de la circulation de $\vec{A}$ le long de γ_1 :

$$C_1 = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} -\sin t \; dt = 0$$

Calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$ le long de γ_2 :

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(R^2+1)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

Calcul de la circulation de $\vec{A}$ le long de γ_2 :

$$C_2 = \frac{q}{4\pi}\frac{R}{(R^2+1)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi} \cos t \; dt = 0$$

Ici aussi le flux est nul alors que la surface n'est pas fermée.

3.2 Exercice avec indications et réponses

1. Soit $\vec{V}$ le champ vectoriel défini par :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} \\ \\ \dfrac{1}{y} \\ \\ \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}$$

   Calculer le flux ϕ_1 de $\vec{V}$ sortant à travers l'ellipsoïde Σ d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Soit $\vec{W}$ le champ vectoriel défini par :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -z^2 \end{pmatrix}$$

   Calculer Div $\vec{W}$.
   Calculer en utilisant la formule de Stockes-Ampère, le flux ϕ_2 de $\vec{W}$ sortant à travers la portion de paraboloïde Σ d'équation cartésienne :

$$z = x^2 + y^2 \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Indications et réponses

1. On fait un calcul direct de l'intégrale double.

$$\phi_1 = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right)$$

2. Div $\vec{W} = 0$, il existe donc un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$. Soit γ le bord orienté de Σ :

$$\phi_2 = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{\gamma}'\ dt = \pi$$

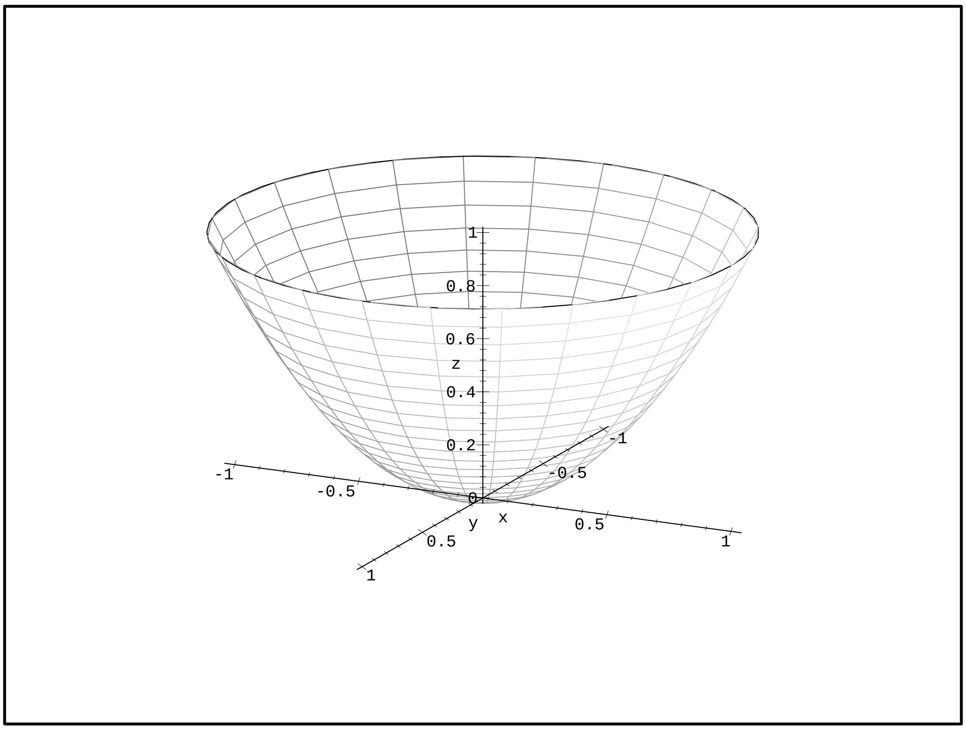

FIG. 3.2 – Le paraboloïde

3.3 Exercice libre

Exercice à rendre pour le lundi 1^{er} décembre 2003

On donne le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x\,g(y,z) \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

où g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la fonction g afin qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$$

2. Déterminer alors un vecteur $\vec{U}$ de composantes $\Big(0, Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.
3. En utilisant la formule de Stockes-Ampère, calculer le flux sortant de $\vec{V}$ à travers la demi-sphère d'équation :

$$z \geq 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$