

CALCUL DIFFERENTIEL et INTEGRAL :  
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Louis Randriamihamison  
Rachid Ababou  
Laurent Bletzacker  
Vladimir Bergez

2003-2004



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Différentiabilité</b>	<b>5</b>
1.1	Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.1.1	Préliminaires . . . . .	5
1.1.2	Dérivées partielles . . . . .	5
1.1.3	Différentiabilité . . . . .	7
1.2	Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	7
1.2.1	Différentiabilité . . . . .	7
1.2.2	Matrice jacobienne . . . . .	8
1.2.3	Opérations sur les différentielles . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Formules de Taylor et extréma</b>	<b>11</b>
2.1	Formule des Accroissements Finis . . . . .	11
2.2	Dérivées successives . . . . .	11
2.3	Formule de Taylor à l'ordre 2 . . . . .	12
2.4	Formule de Taylor à l'ordre n . . . . .	13
2.5	Extréma . . . . .	14
2.5.1	Condition nécessaire ou suffisante pour un extremum local	14
<b>3</b>	<b>Intégrales multiples</b>	<b>17</b>
3.1	Intégrales doubles . . . . .	17
3.1.1	Calcul en coordonnées cartésiennes (Fubini) . . . . .	17
3.1.2	Propriétés générales . . . . .	20
3.1.3	Changement de variables . . . . .	20
3.2	Intégrales triples . . . . .	21
3.2.1	Calcul en coordonnées cartésiennes (Fubini) . . . . .	21
3.2.2	Changement de variables . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Analyse vectorielle</b>	<b>23</b>
4.1	Introduction : Coordonnées de l'espace . . . . .	23
4.1.1	Coordonnées curvilignes . . . . .	23
4.1.2	Jacobien du changement de coordonnées . . . . .	24
4.1.3	Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	25
4.1.4	Exemples . . . . .	25
4.2	Champs scalaire et vectoriel - Opérateurs . . . . .	27

4.2.1	Champs scalaire et vectoriel . . . . .	27
4.2.2	Le gradient d'un champ scalaire . . . . .	28
4.2.3	Le rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	29
4.2.4	La divergence d'un champ vectoriel . . . . .	33
4.2.5	Formules d'Analyse Vectorielle . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Courbes et Surfaces</b>	<b>39</b>
5.1	Courbes différentiables dans l'espace . . . . .	39
5.1.1	Définition . . . . .	39
5.1.2	Longueur de la courbe entre deux points . . . . .	39
5.1.3	Notion d'abscisse curviligne . . . . .	41
5.2	Surfaces . . . . .	41
5.2.1	Définition . . . . .	41
5.2.2	Lignes de coordonnée . . . . .	42
5.2.3	Plan tangent et vecteur normal en un point régulier . . . . .	42
5.2.4	Aire d'une surface paramétrée régulière . . . . .	43
5.2.5	Orientation d'une surface paramétrée régulière . . . . .	43
5.2.6	Bord d'une surface paramétrée régulière . . . . .	44
5.3	Paramétrisations de quelques surfaces . . . . .	47
5.3.1	La sphère . . . . .	47
5.3.2	L'ellipsoïde . . . . .	47
5.3.3	Le cylindre . . . . .	47
5.3.4	Le cône . . . . .	47
5.3.5	Le parabolöide . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Formules intégrales</b>	<b>49</b>
6.1	Intégrales curvilignes . . . . .	49
6.1.1	Définition . . . . .	49
6.1.2	Théorème : Travail d'un champ de gradient . . . . .	50
6.1.3	Théorème : Formule de Green-Riemann . . . . .	50
6.2	Intégrales de surfaces . . . . .	51
6.2.1	Définition : Intégrale de surface . . . . .	51
6.2.2	Définition : Flux d'un champ de vecteurs . . . . .	52
6.3	Théorème : Formule de Stokes-Ampère . . . . .	53
6.4	Théorème : Formule de Green-Ostrogradsky . . . . .	54

# Chapitre 1

## Différentiabilité

### 1.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

#### 1.1.1 Préliminaires

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  sera muni d'une des trois normes suivantes :

- La norme euclidienne :  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- La norme "1" :  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- La norme "infini" :  $\|x\|_\infty = \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension fini étant équivalentes, il est loisible d'écrire les définitions suivantes avec n'importe laquelle.

On rappelle la définition de la limite d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition :**

Soit  $a \in \overline{U}$ ,  $f$  admet une limite en  $a$  s'il existe un réel  $\ell$  tel que :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in U \quad 0 < \|x - a\| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

**Définition :**

Soit  $a \in U$ ,  $f$  est continue en  $a$  si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  et si  $f(a) = \ell$ .

#### 1.1.2 Dérivées partielles

**Définition :**

Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle d'indice  $i$  en  $a$  si la  $i^{\text{eme}}$  application partielle

$$f_i^a : x_i \longrightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$$

est dérivable en  $a_i$ . On note alors le nombre dérivé :  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

**Définition :**

Si pour tout point  $a$  de  $U$ , le nombre dérivé  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  est défini, alors on note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ou  $\partial_i f$  l'application dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

ou

$$\partial_i f : x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

**Exemple :**

Existence des dérivées partielles en  $(0, 0)$  de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Commençons par la première dérivée partielle en  $(0, 0)$ .

$$\text{pour } x \neq 0 \text{ on a } f_1^0(x) = f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

et pour le taux d'accroissement :

$$\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{h} \rightarrow \pm\infty \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Donc l'application  $f$  n'admet pas de dérivée partielle d'indice 1 en  $(0, 0)$  : le nombre  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  n'est pas défini.

Pour la seconde dérivée partielle en  $(0, 0)$ .

$$\text{pour } y \neq 0 \text{ on a } f_2^0(y) = f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$$

et pour le taux d'accroissement :

$$\frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Donc l'application  $f$  admet une dérivée partielle d'indice 2 en  $(0, 0)$  égale à 0, on écrit :  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

### 1.1.3 Différentiabilité

**Définition :**

Soit  $a \in U$ . L'application  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et une application  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \phi(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(h)|}{\|h\|} = 0$ .

Si elle existe, l'application linéaire  $L$  est unique, et est appelée différentielle de  $f$  en  $a$ , notée  $df(a)$ . On note alors :  $df(a).h = L(h)$ .

## 1.2 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

### 1.2.1 Différentiabilité

Soit une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition :**

Soit  $a \in U$ . L'application  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et une application  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  telles que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \phi(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\phi(h)\|}{\|h\|} = 0$ .

Si elle existe, l'application linéaire  $L$  est unique, et est appelée différentielle de  $f$  en  $a$ , notée  $df(a)$ . On note alors :  $df(a).h = L(h)$ .

**Définition :**

Si  $f$  admet une différentielle en tout point  $a$  de  $U$ , alors elle est différentiable sur  $U$  et l'application

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est nommée application différentielle de  $f$ .

**Définition : Dérivée dans une direction**

Soit  $u$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  de norme 1. On appelle dérivée de  $f$  au point  $a \in U$  dans la direction  $u$  la limite si elle existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

Cette dérivée est souvent notée  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ .

**Proposition :**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle admet des dérivées en  $a$  dans toutes les directions (la réciproque est fausse). On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a).u$$

**preuve :**

On a :

$$\frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = \frac{df(a).tu + \phi(tu)}{t} = df(a).u + \frac{\phi(tu)}{t\|u\|} \text{ avec } \|u\| = 1$$

d'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = df(a).u$$

■

**Corollaire :**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle admet des dérivées partielles premières en  $a$ .

**Définition : fonction de classe  $C^1$** 

On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si elle admet des dérivées partielles premières sur  $U$  et si toutes ces dérivées sont continues sur  $U$ .

**Théorème :**

Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  alors  $f$  est différentiable sur  $U$ . (réciproque fausse!)

**1.2.2 Matrice jacobienne**

L'application  $df(a)$  étant une application linéaire  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , elle admet une représentation matricielle (en choisissant les bases canoniques des deux espaces) par une matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes. cette matrice s'appelle la matrice jacobienne de  $f$  au point  $a$  et est notée  $J_f(a)$ .

**Théorème :**

Si on pose

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_j(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

Alors les coefficients de la matrice jacobienne sont donnés par :

$$c_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, n$$

En particulier, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $p = 1$ ), alors

$$J_f(a) = \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \right)$$

**preuve :**

Il suffit de faire la démonstration dans le cas particulier où la matrice jacobienne comporte une seule ligne, elle a donc la forme suivante

$$J_f(a) = ((c_1, \dots, c_n))$$

L'expression de la différentielle serait donc :

$$df(a).h = c_1 h_1 + \dots + c_n h_n$$

Pour calculer le coefficient  $c_i$ , il suffit de calculer la limite :

$$\begin{aligned} c_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(a).(0, \dots, t, \dots, 0)}{t} \\ c_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)}{t} \\ c_i &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

■

**Exemple :**

Existence des dérivées partielles en  $(0, 0)$  et étude de la différentiabilité en  $(0, 0)$  de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

On montre facilement que  $f$  admet des dérivées partielles premières en  $(0, 0)$  et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Etudions la différentiabilité :

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - 0.h - 0.k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Expression qui n'a pas de limite lorsque  $\sqrt{h^2 + k^2}$  tend vers 0. Donc  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

**Définition :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , différentiable en  $a \in \mathbb{R}^n$ . On appelle jacobien de  $f$  en  $a$  et on note  $j_f(a)$ , le déterminant de la matrice jacobienne de  $f$  en  $a$ .

$$j_f(a) = \det J_f(a)$$

Ce nombre joue un rôle important dans l'intégration des fonctions de plusieurs variables.

**1.2.3 Opérations sur les différentielles****Proposition : linéarité**

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  différentiables en  $a$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'application  $\lambda f + g$  est différentiable en  $a$  et on a :

$$\begin{aligned} d(\lambda f + g)(a) &= \lambda df(a) + dg(a) \\ J_{(\lambda f + g)}(a) &= \lambda J_f(a) + J_g(a) \end{aligned}$$

**Proposition : produit**

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables en  $a$ . L'application  $fg$  est différentiable en  $a$  et on a :

$$\begin{aligned} d(fg)(a) &= f(a)dg(a) + g(a)df(a) \\ J_{(fg)}(a) &= f(a)J_g(a) + g(a)J_f(a) \end{aligned}$$

**Remarque :** c'est l'équivalent de la formule  $(uv)' = u'v + uv'$ .

**Proposition : quotient**

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables en  $a$  et  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ . L'application  $\frac{f}{g}$  est différentiable en  $a$  et on a :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2} \\ J_{\left(\frac{f}{g}\right)}(a) &= \frac{1}{g(a)^2} \left( g(a)J_f(a) - f(a)J_g(a) \right) \end{aligned}$$

**Théorème : Composition**

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  différentiable en  $a$ , et  $g$  une application de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  différentiable en  $f(a)$ . L'application  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et on a :

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(a) &= dg(f(a)) \circ df(a) \\ J_{(g \circ f)}(a) &= J_g(f(a)) \times J_f(a) \end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Formules de Taylor et extréma

On considère ici des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$

### 2.1 Formule des Accroissements Finis

**Théorème :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a$  et  $a+h$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, a+h]$  est tout entier contenu dans  $U$ . Alors il existe un réel  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$f(a+h) = f(a) + df(a+\theta h).h$$

**Corollaire : L'inégalité des accroissements finis**

Si  $U$  est un ouvert convexe, et si  $df$  est bornée sur  $U$ , c'est-à-dire si

$$\exists M > 0 \quad \forall a \in U \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \leq M$$

Alors

$$\exists K > 0 \quad \forall (a, b) \in U^2 \quad |f(b) - f(a)| \leq K \|b - a\|$$

### 2.2 Dérivées successives

Rappelons que l'application  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Si elle admet des dérivées partielles, alors on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$$

les dérivées partielles secondes de  $f$ .

On peut ainsi définir les dérivées successives de  $f$ .

**Théorème (Schwarz) :**

Si  $f$  admet des dérivées partielles secondes continues dans un voisinage de  $a$ , alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

On dit que l'on peut intervertir l'ordre de dérivation.

**Définition : fonction de classe  $C^k$**

On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$  si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  sont continues sur  $U$ .

## 2.3 Formule de Taylor à l'ordre 2

**Théorème :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a$  et  $a + h$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, a + h]$  est tout entier contenu dans  $U$ . Alors il existe un réel  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + \theta h) h_i^2 \right]^{(2)}$$

La notation  $[\dots]^{(2)}$  désigne une puissance symbolique qui se développe formellement comme dans la formule de Newton :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 \right]^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) h_2^2$$

**Théorème local (Taylor-Young) :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a$  et  $a + h$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, a + h]$  est tout entier contenu dans  $U$ . Alors :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 \right]^{(2)} + o(\|h\|^2)$$

## 2.4 Formule de Taylor à l'ordre n

**Théorème :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a$  et  $a + h$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, a + h]$  est tout entier contenu dans  $U$ . Alors il existe un réel  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p!} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \right]^{(p)} + \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) h_i \right]^{(k)}$$

**Théorème local (Taylor-Young) :**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a$  et  $a + h$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, a + h]$  est tout entier contenu dans  $U$ . Alors :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{p=1}^k \frac{1}{p!} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \right]^{(p)} + o(\|h\|^k)$$

**Exemple :**

Donner le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de  $(e^{-1}, 0)$  de la fonction :

$$f(x, y) = x \ln x + xy^2$$

Il est immédiat que  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage du point considéré. Le calcul des dérivées partielles se fait facilement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 + \ln x + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2x \end{aligned}$$

Pour le développement de Taylor-Young, on obtient :

$$f(e^{-1} + h, k) = -e^{-1} + \frac{1}{2} \left[ eh^2 + \frac{2}{e} k^2 \right] + o(\|h\|^2)$$

## 2.5 Extréma

On considère dans ce paragraphe une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $a$  un point de  $U$ .

**Définitions :**

$f$  admet un **minimum local** en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V \quad f(x) \geq f(a)$$

$f$  admet un **maximum local** en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V \quad f(x) \leq f(a)$$

$f$  admet un **minimum global** en  $a$  si

$$\forall x \in U \quad f(x) \geq f(a)$$

$f$  admet un **maximum global** en  $a$  si

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq f(a)$$

### 2.5.1 Condition nécessaire ou suffisante pour un extremum local

**Théorème 1 (CN) :**

Si  $f$  est différentiable en  $a$  et si elle admet un extremum local en  $a$ , alors sa différentielle en  $a$  est nulle

$$df(a) = 0$$

**Théorème 2 (CS) :**

On suppose que  $f$  est de classe  $C^3$  sur un voisinage de  $a$ , que  $df(a) = 0$  et que la différentielle seconde de  $f$  en  $a$  est non nulle.

On pose (notations usuelles)

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

et

$$\Delta = s^2 - rt$$

Si  $\Delta < 0$  et  $r > 0$ ,  $f$  admet un minimum local en  $a$ .

Si  $\Delta < 0$  et  $r < 0$ ,  $f$  admet un maximum local en  $a$ .

Si  $\Delta > 0$ ,  $f$  admet un point col en  $a$ .

Si  $\Delta = 0$ , on ne peut conclure directement.

**preuve**

On considère la forme quadratique

$$q(h, k) = r h^2 + 2s h k + t k^2 = k^2 \left[ r \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 2s \left( \frac{h}{k} \right) + t \right]$$

On constate que les cas cités dans le théorème correspondent à l'étude du signe de  $q(h, k)$ .

Si  $\Delta < 0$  et  $r > 0$ ,  $q(h, k)$  reste positif.

Si  $\Delta < 0$  et  $r < 0$ ,  $q(h, k)$  reste négatif.

Si  $\Delta > 0$ ,  $q(h, k)$  change de signe (point col).

Pour conclure, il suffit alors d'écrire le développement de Taylor-Young au voisinage de  $a$  :

$$f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{1}{2}q(h, k) + o(\|(h, k)\|^2)$$

■

**Exemple :**

Déterminer la nature du point  $(e^{-1}, 0)$  pour la fonction :

$$f(x, y) = x \ln x + xy^2$$

On a vu plus haut que le développement de Taylor-Young au voisinage de ce point était donné par :

$$f(e^{-1} + h, k) = -e^{-1} + \frac{1}{2} \left[ eh^2 + \frac{2}{e} k^2 \right] + o(\|h\|^2)$$

On voit donc que  $f(e^{-1} + h, k) - f(e^{-1}, 0)$  reste positif au voisinage du point considéré. On a un **minimum local**.



## Chapitre 3

# Intégrales multiples

Ce chapitre est juste un formulaire de rappel pour le calcul des intégrales doubles ou triples.

### 3.1 Intégrales doubles

On ne cherche pas à rappeler la définition d'une intégrale double. On suppose connu la signification de la notation :

$$I = \iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy$$

où  $\Delta$  est une partie quarrable de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $\Delta$ .

Rappelons que si  $\varphi$  est positive sur  $\Delta$ , l'intégrale  $I$  calcule le volume (positif) de la portion d'espace délimité entre la surface représentative de  $\varphi$  située au dessus du domaine  $\Delta$  et ce domaine  $\Delta$ .

#### 3.1.1 Calcul en coordonnées cartésiennes (Fubini)

**Théorème (Fubini) :**

Soit  $\varphi$  continue sur  $\Delta$  et si le domaine est de la forme

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions numériques continues sur  $[a, b]$ , alors on aura :

$$\iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) \, dy \right) dx$$

mais si le domaine est de la forme

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

alors on aura :

$$\iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) \, dx \right) dy$$

### Exemple

1. Calculer l'intégrale double sur le domaine  $D = [a, b] \times [c, d]$  :

$$A = \iint_D dx dy$$

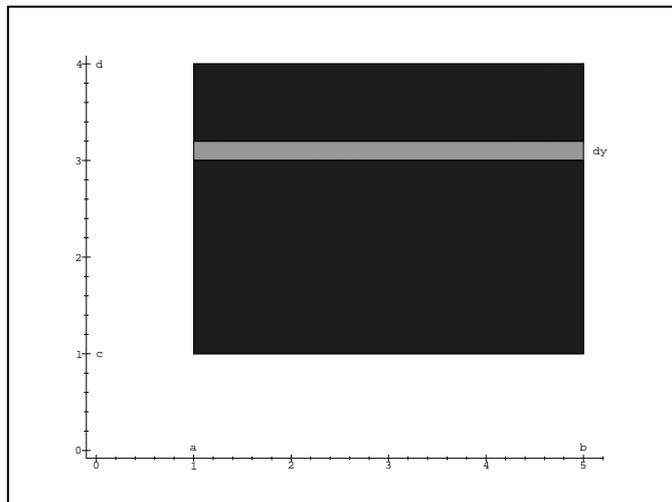
2. Calculer l'intégrale double sur le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ et } -x \leq y \leq 1\}$  :

$$B = \iint_D (x + y) \, dx dy$$

### Solution

1. Le domaine d'intégration est le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ . Nous intégrons indifféremment par rapport à  $x$  ou à  $y$  : par exemple

$$A = \int_c^d \left( \int_a^b dx \right) dy = \int_c^d (b - a) \, dy = (b - a)(d - c)$$



**Le Domaine  $D$  est un rectangle**

**Commentaire :**

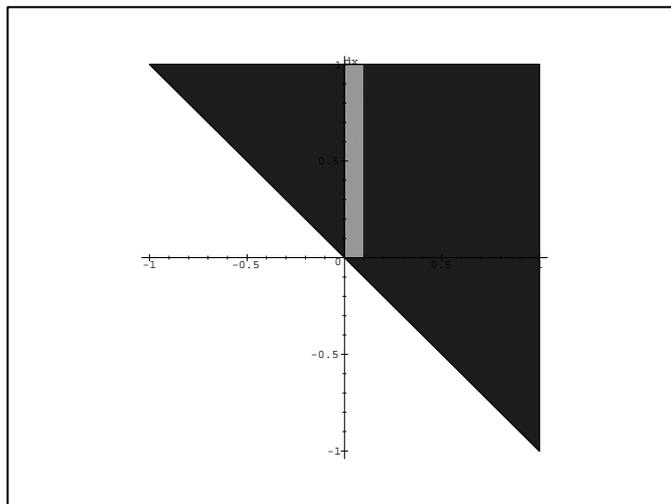
L'intégrale  $\int_a^b dx = b - a$  donne la mesure de la largeur du rectangle et l'expression  $(b-a) dy$  représente symboliquement l'aire infinitésimale d'un rectangle de cotés respectifs  $(b-a)$  et  $dy$ .

Le signe  $\int_c^d$  représente toujours symboliquement la somme de toutes ces aires infinitésimales de  $c$  à  $d$ .

On obtient bien l'aire totale du rectangle.

2. Pour cette intégrale, nous intégrons d'abord par rapport à  $y$  puis par rapport à  $x$ . Donc pour couvrir le domaine entier, on fera varier  $x$  sur  $[-1, 1]$  et  $y$  sur  $[-x, 1]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} B &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-x}^1 (x+y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



**Le Domaine  $D$  est un triangle**

### 3.1.2 Propriétés générales

#### CS d'existence de l'intégrale

si  $\Delta$  est quarrable et si  $\varphi$  est continue et bornée sur  $\Delta$  alors l'intégrale  $\iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy$  est définie.

#### Linéarité

Pour  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda$  réel :

$$\iint_{\Delta} (\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x, y) \, dx dy = \lambda \iint_{\Delta} \varphi_1(x, y) \, dx dy + \iint_{\Delta} \varphi_2(x, y) \, dx dy$$

#### Réunion de domaines

Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont quarrables, et si leur intersection est d'aire nulle, alors :

$$\iint_{\Delta \cup \Delta'} \varphi(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy + \iint_{\Delta'} \varphi(x, y) \, dx dy$$

#### Inégalités

Si  $\Delta \subset \Delta'$ , alors  $\iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta'} \varphi(x, y) \, dx dy$ .

Si  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  alors  $\iint_{\Delta} \varphi_1(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} \varphi_2(x, y) \, dx dy$ .

$$\left| \iint_{\Delta} \varphi(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\varphi(x, y)| \, dx dy.$$

### 3.1.3 Changement de variables

On peut être amené à simplifier l'intégrale double à calculer en effectuant au préalable un changement de variable du type  $x = \phi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  pour  $(u, v)$  variant dans un nouveau domaine  $\Delta'$ .

#### Théorème :

Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $h$  réalise une bijection de  $\Delta'$  sur  $\Delta$ ,  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $\Delta'$  et son jacobien  $j_h$  ne s'annule pas sur  $\Delta'$ .

Pour  $(u, v) \in \Delta'$ , posons  $h(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$

Alors :

$$\iint_{\Delta'} \varphi(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} (\varphi \circ h)(u, v) \times |j_h(u, v)| \, dudv$$

ou encore :

$$\iint_D \varphi(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} \varphi(\phi(u, v), \psi(u, v)) |j_h(u, v)| \, dudv$$

où  $j_h(u, v)$  est le jacobien du changement de variable :

$$j_h(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

### Exemple

Calculer l'aire du demi-disque situé au dessus de l'axe des abscisses, de centre  $(0, 0)$  de rayon 1 par passage en coordonnées polaires.

Cette aire est donnée par  $A = \iint_D dx dy$  ou  $D$  désigne le demi-disque.

On effectue le changement de coordonnées  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Le nouveau domaine est  $\Delta = [0, 1] \times [0, \pi]$ .

Le jacobien du changement de coordonnées est :

$$j(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

On obtient la nouvelle intégrale :

$$A = \int_0^1 \int_0^\pi \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^1 \rho \, d\rho \times \int_0^\pi d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

## 3.2 Intégrales triples

On ne cherche pas à rappeler la définition d'une intégrale triple. On suppose connu la signification de la notation :

$$I = \iiint_V \varphi(x, y, z) \, dx dy dz$$

où  $V$  est une partie quarrable de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $V$ .

Notons que les propriétés générales vues pour les intégrales doubles restent valables pour les intégrales triples.

### 3.2.1 Calcul en coordonnées cartésiennes (Fubini)

**Théorème :**

Soit  $\varphi$  continue sur  $V$  et si le domaine  $V$  est de la forme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Delta, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions numériques continues sur  $\Delta$ , alors on aura :

$$\iiint_V \varphi(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Delta} \left( \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} \varphi(x, y, z) \, dz \right) dx dy$$

### 3.2.2 Changement de variables

**Théorème :**

Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $h$  réalise une bijection de  $V'$  sur  $V$ ,  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $V'$  et son jacobien  $j_h$  ne s'annule pas sur  $V'$ .

Alors :

$$\iiint_{V'} \varphi(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Delta} (\varphi \circ h)(u, v, w) \times |j_h(u, v, w)| \, du dv dw$$

**Exemple**

Calculer l'intégrale  $I = \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$  où  $B$  est la demi-boule  $B = \{(x, y, z), \quad x \geq 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

On utilise le changement de variable

$$h : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

la demi-boule  $B$  sera décrite en prenant

$$\rho \in [0, 1] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

On calcule le jacobien du changement de variables  $j_h$  :

$$j_h(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

On effectue le changement de variable dans l'intégrale :

$$I = \iiint_V \rho^4 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi = \frac{2}{5}\pi$$

## Chapitre 4

# Analyse vectorielle

### 4.1 Introduction : Coordonnées de l'espace

Le cadre géométrique de ce chapitre est l'espace usuel orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . L'écriture  $M(x, y, z)$  signifie exactement que l'on considère le point  $M$  vérifiant :  $O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Plus simplement, on dit que le triplet  $(x, y, z)$  est un système de coordonnées cartésiennes de l'espace.

La notion d'orientation est précisée de la manière suivante : soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une autre base, nous dirons qu'elle est de sens direct si son déterminant  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  calculé dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est positif, et de sens indirect sinon.

Concrètement, nous pouvons visualiser l'orientation par la "règle des trois doigts" (pouce, index, majeur).

#### 4.1.1 Coordonnées curvilignes

Pour décrire certains objets géométriques de l'espace (courbes ou surfaces) ou certains domaines de l'espace, nous aurons besoin d'introduire des systèmes de coordonnées plus commodes pour certains calculs, tels que les coordonnées cylindriques ou sphériques. Ces systèmes de coordonnées sont appelés des systèmes de coordonnées curvilignes.

Soit  $(R)$  une région de l'espace (sans préciser davantage ce que l'on entend par le mot région). Un système de coordonnées curvilignes sur  $(R)$  est la donnée d'une partie ouverte  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  et d'une correspondance biunivoque entre les triplets  $(u, v, w)$  de  $U$  et les points  $M(x, y, z)$  de l'espace. Nous précisons ceci :

Un système de coordonnées curvilignes sur  $(R)$  est la donnée d'un couple  $(U, \phi)$  où  $U$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^3$  et  $\phi$  une application bijective de  $U$  sur  $(R)$  continûment différentiable, ainsi que sa réciproque  $\phi^{-1}$ . On dit que  $\phi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $(R)$  de classe  $C^1$ .

$$\phi : (u, v, w) \longmapsto (x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w))$$

On appelle **ligne de coordonnées** les trois lignes obtenues en traçant respectivement dans l'espace les courbes correspondants à :

$$\begin{aligned} u &\longmapsto \left( x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \right) && (v, w) \text{ constants} \\ v &\longmapsto \left( x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \right) && (u, w) \text{ constants} \\ w &\longmapsto \left( x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \right) && (u, v) \text{ constants} \end{aligned}$$

Les trois vecteurs  $e_u, e_v, e_w$  :

$$e_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad e_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad e_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs tangents à chacune des lignes de coordonnées.

### 4.1.2 Jacobien du changement de coordonnées

On appelle Jacobien du changement de coordonnées, le déterminant  $j_\phi$  des trois vecteurs  $(e_u, e_v, e_w)$ .

$$j_\phi(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

#### Remarque

Le Jacobien d'un changement de coordonnées ne s'annule pas.

$$\forall(u, v, w) \quad J_\phi(u, v, w) \neq 0$$

### 4.1.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Un système de coordonnées curvilignes est dit orthogonal si les trois vecteurs

$$e_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad e_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad e_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale en tout point  $(u, v, w)$ .

### 4.1.4 Exemples

#### a) Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  on a les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées sont :

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien des coordonnées cylindriques est  $J(\rho, \theta, z) = \rho$ .

C'est un système de coordonnées orthogonal car

$$\begin{aligned} e_\rho \cdot e_\theta &= -\rho \cos \theta \sin \theta + \rho \cos \theta \sin \theta = 0 \\ e_\rho \cdot e_z &= \cos \theta \times 0 + \sin \theta \times 0 + 0 \times 1 = 0 \\ e_\theta \cdot e_z &= -\rho \sin \theta \times 0 + \rho \cos \theta \times 0 + 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

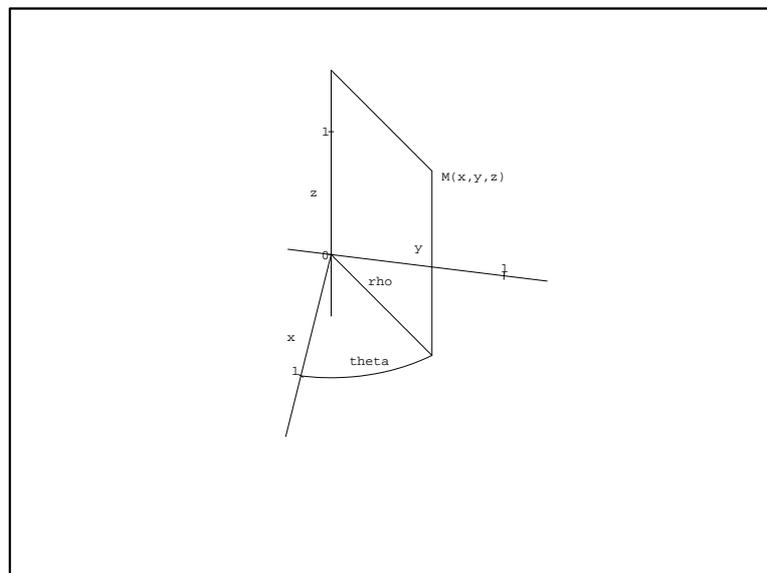


Fig : Coordonnées cylindriques

**b) Coordonnées sphériques**

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , on a les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées sont :

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Le Jacobien des coordonnées sphériques est  $J(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi$ .

On peut encore vérifier que c'est un système de coordonnées orthogonales.

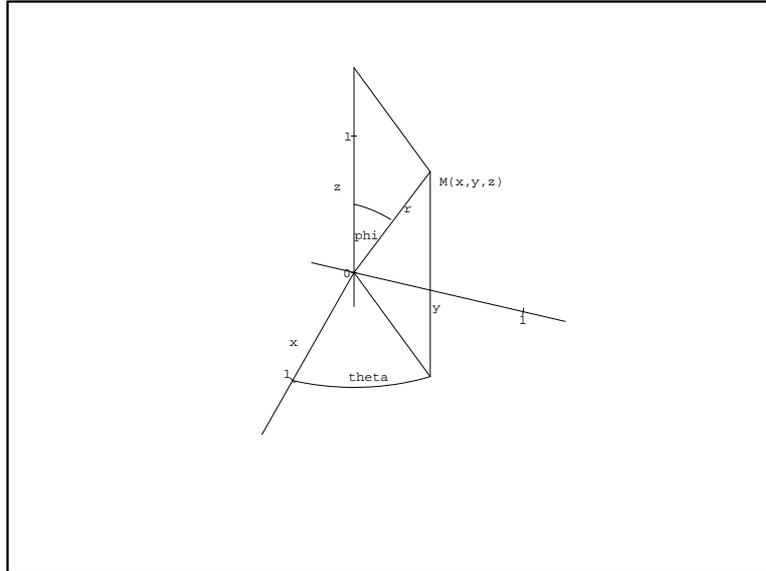


Fig : Coordonnées sphériques

## 4.2 Champs scalaire et vectoriel - Opérateurs

### 4.2.1 Champs scalaire et vectoriel

#### Champ scalaire

On appelle champ scalaire de l'espace  $\mathbb{R}^3$  une fonction  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs scalaires :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \phi(x, y, z) \end{aligned}$$

#### Champ vectoriel

On appelle champ vectoriel de l'espace  $\mathbb{R}^3$  une fonction  $\vec{V}$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} \vec{V} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 4.2.2 Le gradient d'un champ scalaire

#### Définition

Le gradient d'un champ scalaire  $\phi$  est un champ vectoriel noté  $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$  tel que :

$$D\phi(x, y, z)(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} \phi, \vec{v} \rangle$$

où  $D\phi$  désigne la différentielle de  $\phi$  et  $\langle, \rangle$  le produit scalaire usuel de l'espace.

#### Inerprétation physique

La valeur absolue du produit scalaire  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$  est maximum lorsque les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, donc le gradient est un vecteur dirigé dans la direction où l'accroissement (ou la pente) est le plus grand, puisque l'expression  $D\phi(x, y, z)(\vec{v})$  sert à calculer l'accroissement de  $\phi$  dans la direction  $\vec{v}$ .

#### Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\rho, \theta, z)}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \theta, z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi(\rho, \theta, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées sphériques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

### 4.2.3 Le rotationnel d'un champ vectoriel

#### Définition

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  est un champ vectoriel noté  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  tel que :

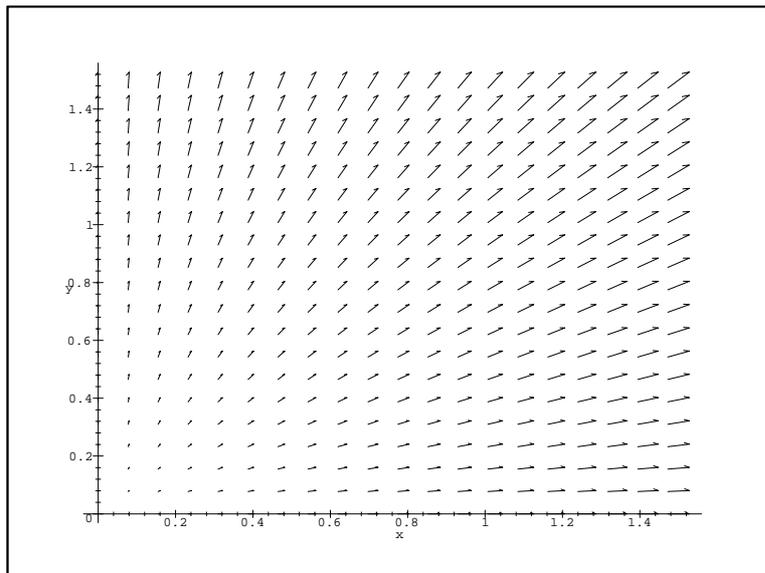
$$D\vec{V}(x, y, z)(\vec{v}) - {}^t D\vec{V}(x, y, z)(\vec{v}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{v}$$

où  $D\vec{V}$  désigne la différentielle de  $\vec{V}$  et  ${}^t D\vec{V}$  sa transposée.

#### Interprétation physique

La définition du rotationnel ne permet pas de comprendre très intuitivement ce que le rotationnel mesure. Il nous faut donner quelques exemples à partir de champs de vecteurs :

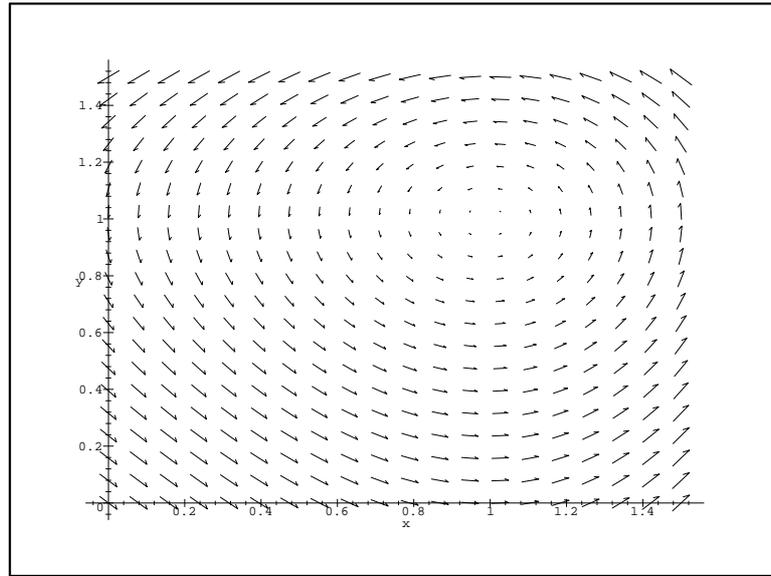
##### Exemple 1



$$\begin{aligned}\vec{V} &= (x, y, 0) \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

**Commentaire :** Dans cet exemple, le rotationnel est nul : une petite barre rigide soumise en chacun de ces points au champ de forces représenté ici ne subirait localement qu'un mouvement de translation rectiligne, mais pas de mouvement de rotation.

## Exemple 2

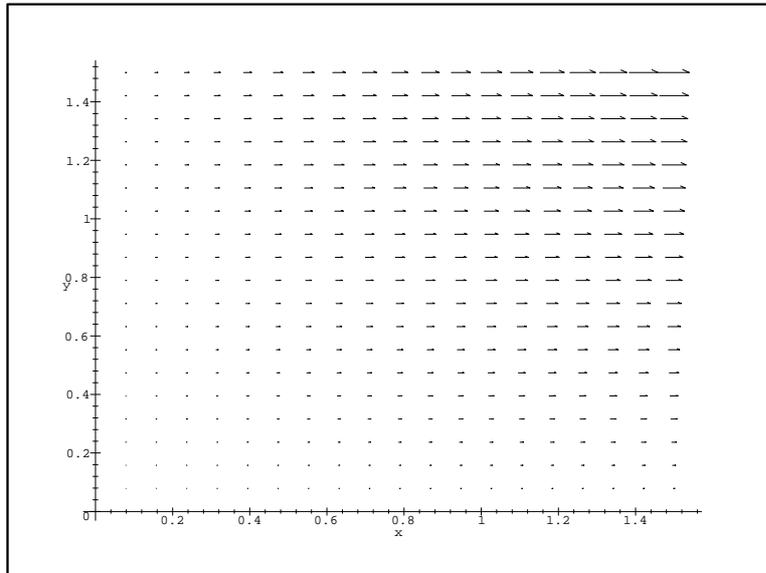


$$\vec{V} = (1 - y^2, x^2 - 1, 0)$$

$$\text{rot } \vec{V} = (0, 0, 2x + 2y)$$

**Commentaire :** Dans cet exemple, le rotationnel au point  $(1, 1, 0)$  est égal  $(0, 0, 4)$ . Une petite barre rigide placée en ce point et soumise au champ de forces subirait un mouvement de rotation que l'on imagine bien en voyant la représentation du champ de vecteurs. Ce mouvement de rotation est dû au directions différentes du champ de vecteurs au voisinage du point considéré. Le rotationnel est un vecteur orthogonal au plan de la rotation (ici le plan  $(Oxy)$ ), et dont le module mesure l'amplitude ou la vitesse de la rotation.

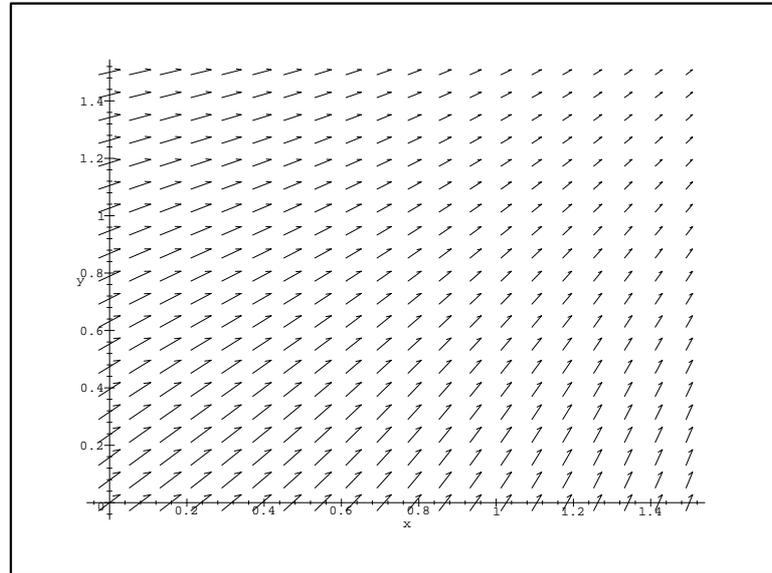
## Exemple 3



$$\vec{V} = (xy, 0, 0)$$
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (0, 0, -x)$$

**Commentaire :** Dans cet exemple, le rotationnel est encore non nul : Le mouvement de rotation serait dû ici, non pas à des directions différentes, (tous les vecteurs sont dans la même direction, mais aux normes différentes de deux vecteurs voisins. Si le champ de force soumet les deux extrémités de la barre à des forces d'intensité différentes, mais de même direction, la barre prendra quand même un mouvement de rotation.

## Exemple 4



$$\vec{V} = \left( \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (0, 0, 0)$$

**Commentaire :** Dans cet exemple, le rotationnel est à nouveau nul : ici, malgré des vecteurs de normes et de directions différentes, les effets combinés se compensent et il n'y a pas de mouvement local de rotation .

## Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées cylindriques, on a pour

$$\vec{V} = V_\rho e_\rho + V_\theta e_\theta + V_z e_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left[ V_\theta - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

– En coordonnées sphériques, on a pour

$$\vec{V} = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\varphi e_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \left[ V_\theta \cos \varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right] \\ \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ V_\varphi - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \end{pmatrix}$$

#### 4.2.4 La divergence d'un champ vectoriel

##### Définition

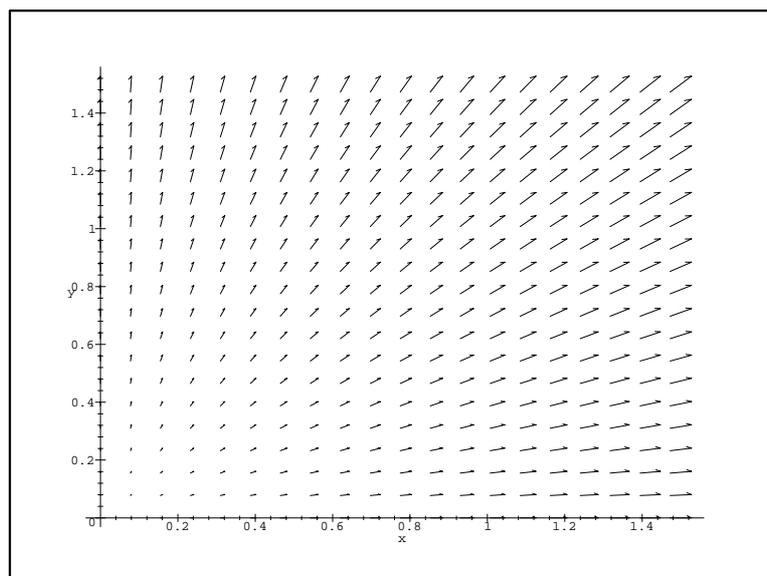
La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  est le champ scalaire noté  $\text{Div } \vec{V}$  défini par :

$$\text{Div } \vec{V} = \text{Tr}(D\vec{V})(x, y, z)$$

où  $\text{Tr}(D\vec{V})$  désigne la trace de la différentielle de  $\vec{V}$ .

##### Interprétation physique

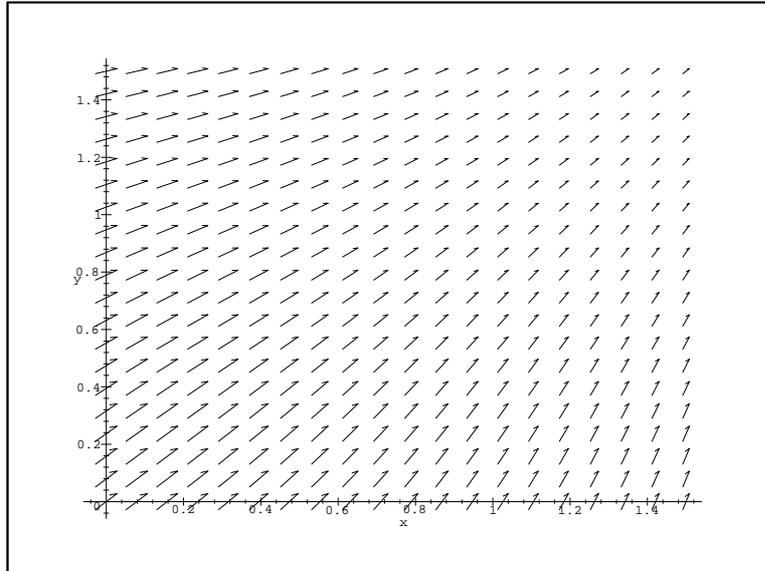
## Exemple 1



$$\vec{V} = (x, y, 0)$$
$$\text{Div } \vec{V} = 2$$

**Commentaire :** Interprétons le champ vectoriel ci-dessus comme par exemple le champ des vitesses d'un gaz, alors la divergence peut être interprétée comme une mesure de l'accroissement (positif ou négatif) de la densité de matière en un point donné. Dans l'exemple ci-dessus, la divergence est constante, égale à 2. La quantité de matière concentrée dans un petit volume en un point donné diminue. Les particules du gaz s'échappent dans toutes les directions, à une vitesse de plus en plus grande.

## Exemple 2

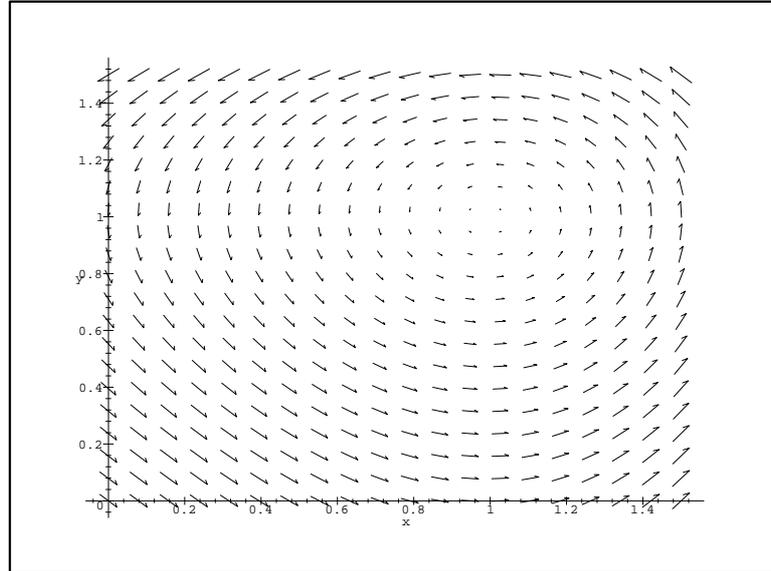


$$\vec{V} = \left( \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}, 0 \right)$$

$$\text{Div } \vec{V} = -\left( \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} \right)$$

**Commentaire :** Ici la divergence est négative dans le domaine considéré. les vitesses situées près de l'origine ont des modules plus grand que celles plus éloignées. Les particules du gaz vont rattrapper celles qui les précèdent : On aura accumulation des particules. On peut donner une autre image : penser à une autoroute sur laquelle les véhicules qui précèdent vont plus vite que les véhicules qui sont devant : il y aura accumulation.

## Exemple 3



$$\vec{V} = (1 - y^2, x^2 - 1, 0)$$

$$\text{Div } \vec{V} = 0$$

**Commentaire :** Dans cet exemple, malgré un champ de vitesses qui semble tourbillonner, la divergence est nulle : la quantité de matière pénétrant dans un petit volume donné est la même que celle qui en sort.

## Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

– En coordonnées cylindriques, on a pour

$$\vec{V} = V_\rho e_\rho + V_\theta e_\theta + V_z e_z$$

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

– En coordonnées sphériques, on a pour

$$\vec{V} = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\varphi e_\varphi$$

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{2}{r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \left[ V_\varphi \cos \varphi + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right]$$

#### 4.2.5 Formules d'Analyse Vectorielle

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (4.1)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge \vec{V} \quad (4.2)$$

$$\text{Div}(f \vec{V}) = f \text{Div } \vec{V} + \langle \vec{V}, \overrightarrow{\text{grad}} f \rangle \quad (4.3)$$

$$\text{Div}(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \langle \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}, \vec{W} \rangle - \langle \vec{V}, \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \rangle \quad (4.4)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \vec{0} \quad (4.5)$$

$$\text{Div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad (4.7)$$

$$\text{Div } \vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (4.8)$$



# Chapitre 5

## Courbes et Surfaces

### 5.1 Courbes différentiables dans l'espace

#### 5.1.1 Définition

On appelle courbe différentiable paramétrée de l'espace, une application continûment différentiable  $\gamma$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

On appelle support géométrique  $\Gamma$  de  $\gamma$  le lieu géométrique des points  $M(x(t), y(t), z(t))$  lorsque le paramètre  $t$  parcourt  $I$ .

Le vecteur  $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$  est un vecteur tangent à la courbe géométrique  $\Gamma$  au point  $M(t) = \gamma(t)$ .

#### Interprétation cinématique

On peut considérer le point  $M(t) = \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  comme un point mobile se déplaçant dans l'espace au cours du temps représenté par le paramètre  $t$ . Alors le vecteur  $\gamma'(t)$  est le vecteur *vitesse instantanée* à l'instant  $t$ . Le support  $\Gamma$  est la courbe géométrique sur laquelle se déplace le point  $M(t)$  sans tenir compte de la façon de se déplacer.

#### 5.1.2 Longueur de la courbe entre deux points

Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux réels ( $t_1 \leq t_2$ ) tels que  $[t_1, t_2] \subset I$ . Soient  $A = \gamma(t_1)$  et  $B = \gamma(t_2)$  les points de la courbe correspondants. **On suppose de plus que**

$\gamma$  est régulière sur  $[t_1, t_2]$ , c'est-à-dire que le vecteur vitesse  $\gamma'(t)$  ne s'annule pas sur  $[t_1, t_2]$ .

La longueur de la courbe géométrique  $\Gamma$  entre  $A$  et  $B$  est donnée par l'intégrale :

$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt$$

### Remarque

Si on ne fait pas l'hypothèse que le vecteur vitesse ne s'annule pas sur l'intervalle, alors l'intégrale  $\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$  donne la longueur totale du chemin parcouru (il peut y avoir des allers-retours) et non la longueur géométrique de l'arc  $(AB)$ .

### Effet d'un changement de paramétrage strictement croissant

Considérons une application bijective dérivable strictement croissante  $\phi$  d'un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  sur  $I$  et considérons la courbe paramétrée  $\delta$  obtenue par composition :

$$\delta : s \longmapsto \delta(s) = \gamma \circ \phi(s) = \gamma(\phi(s))$$

On note encore  $\Delta$  le support géométrique de  $\delta$ . Alors les supports de  $\gamma$  et  $\delta$  sont identiques ( $\Gamma = \Delta$ ) et si  $t_1 = \phi(s_1)$ ,  $t_2 = \phi(s_2)$ , la longueur de l'arc  $(AB)$  se calcule indifféremment par :

$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s_1}^{s_2} \|\delta'(u)\| du$$

**preuve :**

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \|\delta'(u)\| du &= \int_{s_1}^{s_2} \|\gamma'(\phi(u)) \cdot \phi'(u)\| du \\ &= \int_{\phi^{-1}(t_1)}^{\phi^{-1}(t_2)} \|\gamma'(\phi(u))\| \cdot \phi'(u) du \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable  $t = \phi(u)$  dans l'intégrale, on obtient :

$$\int_{s_1}^{s_2} \|\delta'(u)\| du = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$$

■

Les conditions imposées sur l'application  $\phi$  font que la courbe  $\Gamma$  est parcourue à des vitesses différentes, mais dans le même sens par les points  $\gamma(t)$  et  $\delta(s)$ .

### 5.1.3 Notion d'abscisse curviligne

Soit  $t \mapsto \gamma(t)$  une courbe différentiable régulière, i.e.  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Alors il est possible de trouver un changement de paramètre  $t = \phi(s)$  telle que le paramétrage  $\delta(s) = \gamma(\phi(s))$  parcourt la courbe à vitesse constante

$$\|\delta'(s)\| = 1$$

Le paramètre  $s$  est appelé **abscisse curviligne** et le paramétrage  $s \mapsto \delta(s)$ , une **paramétrisation normale**.

**preuve :**

Soit  $t_0$  un point quelconque de  $I$ , alors on prend pour paramètre  $s$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

Comme  $\gamma'$  ne s'annule pas sur  $I$ , la fonction  $t \mapsto s(t)$  est de classe  $C^1$  et strictement monotone sur  $I$ , sa bijection réciproque  $\phi : s \mapsto t(s)$  est aussi de classe  $C^1$ .

On pose alors

$$\delta(s) = \gamma(\phi(s))$$

Il reste à vérifier que  $\|\delta'(s)\| = 1$

D'après les formules de dérivation des fonctions composées et de la réciproque d'une fonction dérivable, on aura :

$$\delta'(s) = \gamma'(\phi(s)) \times \phi'(s) = \gamma'(\phi(s)) \times \frac{1}{\|\gamma'(\phi(s))\|}$$

d'où :  $\|\delta'(s)\| = 1$ . ■

#### Remarque

l'abscisse curviligne mesure la longueur sur la courbe de l'image du segment  $[t_0, t]$ . Dans ce paramétrage, on aura exactement

$$L(\Gamma) = \int_A^B ds$$

## 5.2 Surfaces

### 5.2.1 Définition

On appelle surface différentiable paramétrée de l'espace, une application continûment différentiable  $\sigma$  d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\sigma : (u, v) \mapsto \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

### Remarque

Si  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  alors l'équation  $F(x, y, z) = 0$  définit une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Si l'on peut exprimer à partir de cette équation par exemple  $z = f(x, y)$  alors on obtient une représentation paramétrée :

$$\sigma : (u, v) \mapsto (x = u, y = v, z = f(u, v))$$

### 5.2.2 Lignes de coordonnées

Les lignes de coordonnées sur la surface sont les lignes obtenues en traçant respectivement dans l'espace les courbes correspondants à :

$$\begin{aligned} u &\mapsto (x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)) && v \text{ constant} \\ v &\mapsto (x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)) && u \text{ constant} \end{aligned}$$

### 5.2.3 Plan tangent et vecteur normal en un point régulier

Les vecteurs

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs tangents à la surface au point  $\sigma(u, v)$ .

### Définition

Un point  $M = \sigma(u, v)$  de la surface est dit régulier ou non singulier si les vecteurs  $\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v}$  sont linéairement indépendants. Dans ce cas, ils forment une base du **plan tangent à la surface en  $M$** .

Une équation du plan tangent est alors obtenue en écrivant :

$$\det \left( \vec{OM}, \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} \right) = 0$$

la surface est dite **régulière** si chacun de ses points est un point régulier.

**Vecteur normal**

Un vecteur normal à la surface en  $M$  est donné par le produit vectoriel

$$\vec{N} = \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v}$$

l'équation du plan tangent est alors obtenue par le produit scalaire

$$O\vec{M} \cdot \vec{N} = 0$$

**Remarque**

Si la surface est donnée par une équation implicite  $F(x, y, z) = 0$  alors le vecteur normal est obtenu par le gradient :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} F$$

**5.2.4 Aire d'une surface paramétrée régulière****Rappel**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  représente l'aire du parallélogramme de cotés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Définition**

L'aire totale de la surface paramétrée régulière  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est donnée par l'intégrale double

$$A = \iint_U \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv = \iint_U \|\vec{N}\| dudv$$

L'expression  $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv$  est appelée **élément d'aire de la surface**. Cette expression a une signification géométrique : elle est indépendante du choix du paramétrage de la surface.

**5.2.5 Orientation d'une surface paramétrée régulière**

Une surface paramétrée régulière  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  admet deux orientations possibles. La donnée de la paramétrisation  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  induit une orientation

naturelle par la donnée du repère de l'espace :

$$R = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \vec{N} \right)$$

Nous dirons que deux paramétrisations  $\sigma$  et  $\sigma'$  de la surface définissent la même orientation si le produit scalaire des vecteurs normaux  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$  est positif.

$$\vec{N} \cdot \vec{N}' > 0$$

Les orientations seront dites opposées si  $\vec{N} \cdot \vec{N}' < 0$ .

### Remarque

En pratique, on précise l'orientation de la surface en regardant la direction vers laquelle pointe le vecteur normal (par exemple on parle de vecteur sortant ou rentrant).

### 5.2.6 Bord d'une surface paramétrée régulière

Une notion importante (et délicate à définir correctement) pour les formules d'analyse vectorielle (Stokes, etc...) est la notion de **bord d'une surface**. Pour définir celle-ci, il nous faut faire quelques préliminaires.

#### Bord d'un domaine plan

Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Le bord de  $U$  (noté  $\partial U$ ) est en général et de façon intuitive, une réunion de courbes planes différentiables par morceaux qui "délimite" le domaine. Selon le mode de définition de  $U$ , nous allons donner en pratique, ce que l'on entend par bord de  $U$  dans les cas courants.

1. Soit  $U$  défini par une inéquation du type  $\phi(x, y) \leq 0$ . Alors le bord de  $U$  est défini par l'équation  $\phi(x, y) = 0$ .

#### Exemple

Soit le disque  $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ ,  
alors  $\partial U = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

2. Soit  $U$  défini par une double inéquation du type  $a \leq x \leq b$  et  $f(x) \leq y \leq g(x)$ . Alors le bord de  $U$  est défini par la réunion des quatre courbes :

$$\begin{aligned} x = a, & \quad f(a) \leq y \leq g(a) \\ a \leq x \leq b, & \quad y = f(x) \\ x = b, & \quad f(b) \leq y \leq g(b) \\ a \leq x \leq b, & \quad y = g(x) \end{aligned}$$

**Exemple**

Soit le pavé rectangle  $U = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ,

alors

$$\begin{aligned} \partial U = & \{(x, y) : x = a, c \leq y \leq d\} \cup \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = c\} \\ & \cup \{(x, y) : x = b, c \leq y \leq d\} \cup \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = d\} \end{aligned}$$

**Opération de juxtaposition de deux courbes dans l'espace**

Etant données deux courbes régulières  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  telles que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  (l'extrémité de la première courbe est aussi l'origine de la seconde courbe) on définit la courbe juxtaposée  $\gamma_1 \vee \gamma_2$  d'origine  $\gamma_1(a)$  et d'extrémité  $\gamma_2(d)$  comme la réunion des deux courbes. Cette définition reste valable si les courbes ont un nombre fini de points en commun.

Dans le cas particulier où les courbes ont le même support géométrique mais sont parcourues en sens contraires, le résultat de la juxtaposition  $\gamma_1 \vee \gamma_2$  est un seul point, on note alors  $\gamma_1 \vee \gamma_2 = 0$ .

On admettra que l'opération de juxtaposition est associative et commutative.

**Bord d'une surface paramétrée régulière de l'espace**

Soit  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière et soit  $U$  un domaine plan (de  $\mathbb{R}^2$ ) dont le bord est formé par la réunion ou la juxtaposition de  $n$  courbes planes régulières  $\gamma_i$ , pour  $i$  variant de 1 à  $n$ . Alors le bord de la surface  $\sigma$  dans l'espace est formé par la réunion ou la juxtaposition des courbes images  $\sigma(\gamma_i)$ .

**Exemple**

Considérons la demi-sphère

$$\sigma : (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longmapsto (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

alors le bord du domaine  $U$  est le rectangle formé des quatres segments :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(\theta, \varphi) : \theta = 0, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\} \\ \gamma_2 &= \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \varphi = 0\} \\ \gamma_3 &= \{(\theta, \varphi) : \theta = 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\} \\ \gamma_4 &= \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \varphi = \frac{\pi}{2}\} \end{aligned}$$

Regardons ce que donne la juxtaposition des images  $\sigma(\gamma_i)$  :

$\sigma(\gamma_1)$  est le demi-grand cercle méridien joignant le pôle "Nord" au pôle "Sud" dans le plan  $(xOz)$ .

$\sigma(\gamma_3)$  est le demi-grand cercle méridien joignant le pôle "Sud" au pôle "Nord" dans le plan  $(xOz)$ .

On a  $\sigma(\gamma_1) \vee \sigma(\gamma_3) = 0$ .

On a aussi  $\sigma(\gamma_2) = 0$

Il reste  $\sigma(\gamma_4)$  qui est le cercle équatorial. Le bord de la demi-sphère paramétrée par les équations ci-dessus est le cercle "équatorial" d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

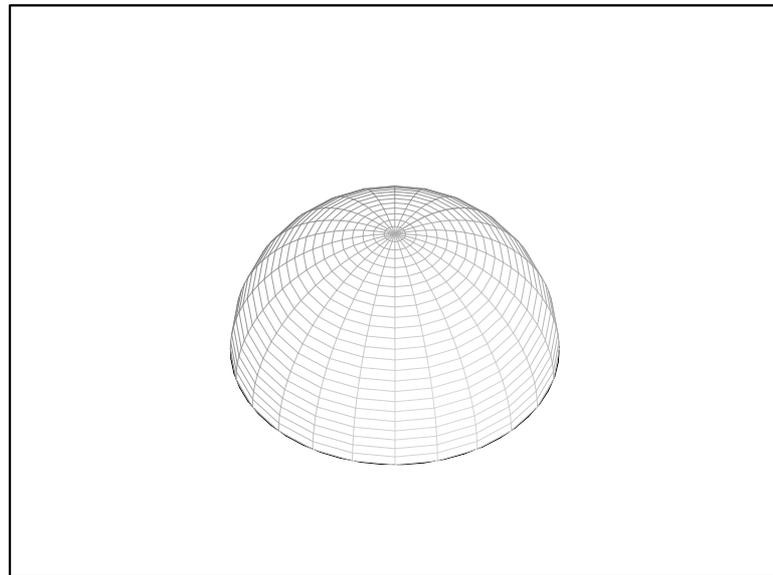
### Orientation du bord d'une surface paramétrée régulière de l'espace

L'orientation de la surface  $\Sigma$  par la donnée d'un champ de vecteurs normaux  $\vec{N}$  permet de définir un sens de parcourt orienté de son bord  $\partial\Sigma$ . Si  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  est une paramétrisation de  $\partial\Sigma$ , alors nous dirons que  $\gamma$  respecte l'orientation de la surface si le vecteur tangent à  $\Sigma$

$$\vec{v} = \vec{N} \wedge \vec{\gamma}'$$

est dirigé vers la surface  $\Sigma$ .

Dans l'exemple de la demi-sphère ci-dessus, si on choisit un vecteur normal sortant de la demi-sphère, alors il faut parcourir le cercle équatorial dans le sens trigonométrique.



Bord de la demi-sphère

## 5.3 Paramétrisations de quelques surfaces

### 5.3.1 La sphère

La sphère de centre  $\Omega(a, b, c)$ , de rayon  $R$  :

**Equation cartésienne** :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .

**Paramétrisation** :

$$\begin{cases} x = a + R \cos u \sin v \\ y = b + R \sin u \sin v \\ z = c + R \cos v \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in [0, \pi]. \end{cases}$$

### 5.3.2 L'ellipsoïde

L'ellipsoïde de centre  $O(0, 0, 0)$  :

**Equation cartésienne** :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Paramétrisation** :

$$\begin{cases} x = a \cos u \sin v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos v \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in [0, \pi]. \end{cases}$$

### 5.3.3 Le cylindre

Le cylindre d'axe parallèle à  $Oz$ , de centre  $\Omega(a, b, 0)$ , de rayon  $R$  :

**Equation cartésienne** :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ .

**Paramétrisation** :

$$\begin{cases} x = a + R \cos u \\ y = b + R \sin u \\ z = v \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### 5.3.4 Le cône

Le cône d'axe  $Oz$ , de centre  $O(0, 0, 0)$ , de droite directrice  $x = cz$ , ( $c > 0$ ).

**Equation cartésienne** :  $x^2 + y^2 = c^2 z^2$ .

**Paramétrisation** :

$$\begin{cases} x = cv \cos u \\ y = cv \sin u \\ z = v \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### 5.3.5 Le parabolöide

Le parabolöide d'axe  $Oz$ , de sommet  $O(0, 0, 0)$ , de parabole directrice  $z = x^2$ , ( $c > 0$ ).

**Equation cartésienne :**  $x^2 + y^2 = z$ .

**Paramétrisation :**

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v^2 \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

# Chapitre 6

## Formules intégrales

### 6.1 Intégrales curvilignes

Soit  $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  une courbe paramétrée régulière de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  un champ de vecteurs.

#### 6.1.1 Définition

On appelle intégrale curviligne de  $\vec{V}$  le long de  $\gamma$ , l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \int_a^b \left[ P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right] dt$$

#### Exemple

Calculer l'intégrale curviligne donnant la circulation du vecteur  $\vec{V} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$  le long du cercle  $C$  de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1.

Le cercle  $C$  sera paramétrisé par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Par définition, on pose

$$I = \int_C \vec{V} \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left( (\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t) \cos t \right) dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} (1 - 2 \sin t \cos t) dt = 2\pi$$

### 6.1.2 Théorème : Travail d'un champ de gradient

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  son champ de gradient. Soit  $\gamma$  une courbe différentiable de  $\mathbb{R}^3$ , contenue dans  $U$  et d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$ . Alors on a :

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = f(B) - f(A)$$

On dit que le travail d'un champ de gradient ne dépend que des extrémités de la courbe.

**preuve**

Il suffit de voir que la primitive de l'expression

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right]$$

est exactement la fonction :

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$$

■

### 6.1.3 Théorème : Formule de Green-Riemann

Si  $\gamma$  est une courbe plane fermée de classe  $C^1$  par morceaux délimitant un domaine compact simple  $D$  du plan, alors on a la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

où la courbe  $\gamma$  est parcourue en laissant le domaine constamment à sa gauche.

Cette formule est un cas particulier de la formule du paragraphe suivant.

**Exemple**

Calculer l'intégrale curviligne donnant la circulation du vecteur  $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^3 - y^3 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}$  le long du cercle  $C$  de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.

La formule de Green-Riemann donne l'intégrale double sur le disque  $D$  d'équation :  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy$$

On peut intégrer en passant en coordonnées polaires :

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} 3\rho^2 \rho d\rho d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

### Une application au calcul d'aire plane

Si  $\gamma$  est une courbe plane fermée de classe  $C^1$  par morceaux délimitant un domaine compact simple  $D$  du plan, alors l'aire de  $D$  peut se calculer par :

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dx dy = \int_{\gamma} x(t)y'(t)dt = \int_{\gamma} -y(t)x'(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \end{aligned}$$

### Exemple

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

On paramétrise l'ellipse par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Puis on applique la formule :

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \int_{\gamma} x(t) y'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a \cos t \ b \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t) dt \\ &= \pi a b \end{aligned}$$

## 6.2 Intégrales de surfaces

Soit  $\Sigma$  une surface régulière paramétrée de l'espace  $\mathbb{R}^3$  de paramétrisation :

$$\begin{aligned} \sigma : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

Soit  $\phi(x, y, z)$  un champ scalaire de l'espace.

### 6.2.1 Définition : Intégrale de surface

On appelle Intégrale de  $\phi$  sur la surface  $\Sigma$ , l'intégrale :

$$\iint_{\Sigma} \phi \, d\sigma = \iint_D \phi(\sigma(u, v)) \|\vec{N}\| \, dudv$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal associé à la paramétrisation.

**Remarque**

La quantité  $\|\vec{N}\|dudv$  est appelée "élément de surface" et notée  $d\sigma$ .

**Exemple**

Calculer l'aire du tronc de cône  $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \leq a \leq z \leq b$ .

On a juste à calculer l'intégrale  $\iint_{\Sigma} d\sigma$ , où le tronc de cône  $\Sigma$  sera paramétrisé par :

$$\sigma(t) : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = r \\ a \leq r \leq b ; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Le vecteur normal  $\vec{N}$  se calcule par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} d\sigma &= \iint_{\Sigma} \|\vec{N}\| dr dt = \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2} dr dt \\ &= \sqrt{2} \pi (b^2 - a^2) = \pi \sqrt{2} (b - a)(b + a) \end{aligned}$$

On pourra remarquer que le résultat correspond à la formule

$$A = \pi (R + r) \frac{h}{\cos \alpha}$$

où  $R$  et  $r$  sont les rayons des bases du tronc de cône,  $h$  sa hauteur et  $\alpha$  son demi-angle au sommet.

**6.2.2 Définition : Flux d'un champ de vecteurs**

Soit  $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  un champ de vecteurs.

On appelle Flux de  $\vec{V}$  à travers la surface  $\Sigma$  l'intégrale :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N} dudv$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal associé à la paramétrisation et  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ .

**Exemple**

Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z)$  sortant à travers la demi-sphère  $\Sigma$  d'équation  $z \geq 0$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

On paramétrise la demi sphère par

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \\ u \in [0, 2\pi] ; v \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Le vecteur normal sortant se calcule par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \sin^2 v \\ \sin u \sin^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

On obtient pour le flux :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \sin v \, dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \, dv = 2\pi$$

**6.3 Théorème : Formule de Stokes-Ampère**

Si on désigne par  $\partial\Sigma$  le bord orienté de la surface  $\Sigma$  de paramétrisation  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  alors on a la formule dite de Stokes-Ampère :

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' \, dt = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{N}) \, dudv$$

Cette formule dit que la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long du bord orienté d'une surface  $\Sigma$  est égale au flux du rotationnel de  $\vec{V}$  à travers cette surface  $\Sigma$ .

**Exemple**

Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, -y, 2)$  sortant à travers la demi-sphère  $\Sigma$  d'équation  $z \geq 0$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en utilisant une intégrale curviligne.

Posons  $\vec{U} = (-y, x, xy)$ . Alors on peut vérifier (exercice) que

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \vec{V}$$

On peut donc écrire

$$\iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{N} \, dudv = \int_C \vec{U} \cdot \gamma'(t) \, dt$$

où  $C$  est le cercle de rayon 1 délimitant la demi-sphère et paramétrisé par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors l'intégrale

$$\phi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Remarque : essayez de retrouver ce résultat en utilisant la définition du flux.

## 6.4 Théorème : Formule de Green-Ostrogradsky

Soit  $K$  un domaine fermé et borné de  $\mathbb{R}^3$  et limité par une surface orientée  $\Sigma$  qui est précisément le bord orienté de  $K$  :  $\partial K = \Sigma$ .

Soit  $\vec{V}$  un champ vectoriel de classe  $C^1$  sur  $K$ .

On a la formule dite d'Ostrogradsky :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_K \text{Div } \vec{V} dx dy dz$$

Cette formule dit que le flux de  $\vec{V}$  sortant à travers la surface fermée  $\Sigma$  est égal à la l'intégrale de la divergence de  $\vec{V}$  dans le volume délimité par la surface.

### Exemple

Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x^3, y^3, z^3)$  sortant à travers la sphère  $\Sigma$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en passant par le calcul d'une intégrale triple.

On calcule d'abord

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\phi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

sur la boule  $V$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . En passant en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \\ r \in [0, 1] ; \theta \in [0, 2\pi] ; \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\phi &= \iiint_V 3r^2 r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ \phi &= \int_0^1 3r^4 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{12}{5}\pi\end{aligned}$$