SYSTEMES DIFFERENTIELS

ANALYSE VECTORIELLE

CORRECTION DU DEVOIR SEMAINE 3

Rachid Ababou
Laurent Bletzacker
Louis Randriamihamison
Wladimir Bergez

1er décembre 2003

Chapitre 1

Première série

1.1 Exercice libre

On considère le champ vectoriel $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ z\,f(x) \\ y\,g(x) \end{pmatrix}$$

où f et g sont des fonctions numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les fonctions f et g telles que $\vec{V}$ soit un champ de gradient et telles que $f(0) = g(0) = 0$.
2. Déterminer les fonctions ϕ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.
3. Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long de l'arc paramétré $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, avec $t \in [0, \pi]$.
4. Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long d'un arc quelconque joignant le point $M(x, y, z)$ au point $N(x', y', z')$.

Correction

1. Pour que $\vec{V}$ soit un champ de gradient, il faut que son rotationnel soit nul :
   La première relation nous donne :
   $$\frac{\partial y\,g(x)}{\partial y} - \frac{\partial z\,f(x)}{\partial z} = 0$$

on obtient :

$$g(x) = f(x)$$

La deuxième relation nous donne :

$$\frac{\partial y\, z}{\partial z} - \frac{\partial y\, g(x)}{\partial x} = 0$$

on obtient :

$$y = yg'(x) \text{ donc } g'(x) = 1 \text{ donc } g(x) = x + C$$

La troisième relation nous donne :

$$\frac{\partial z\, f(x)}{\partial x} - \frac{\partial y\, z}{\partial y} = 0$$

on obtient :

$$z\, f'(x) = z \text{ donc } f'(x) = 1 \text{ donc } f(x) = x + C'$$

Les conditions $f(0) = g(0) = 0$ donnent :

$$f(x) = g(x) = x$$

En conclusion :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} yz \\ z\,x \\ y\,x \end{pmatrix}$$

2. On cherche une fonction ϕ telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = xz \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = yx$$

Il est immédiat que $\phi(x, y, z) = xyz + C$.

3. Ici, nous ferons un calcul direct :

$$\gamma(t) = \Big(\cos t, \sin t, t\Big)$$

$$\gamma'(t) = \Big(-\sin t, \cos t, 1\Big)$$

$$\begin{aligned} C &= \int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \int_0^\pi (-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \cos t \sin t)\, dt \\ &= \int_0^\pi (t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

4. Ici, ne connaissant pas le chemin parcouru, nous ne pouvons pas faire un calcul direct, mais comme $\vec{V}$ dérive d'un potentiel ϕ, la circulation de $\vec{V}$ ne dépend que des extrémités du chemin. On a :

$$C = \int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \phi(x', y', z') - \phi(x, y, z) = x'y'z' - xyz$$

   On peut vérifier que la relation est valable pour la question 3).

Chapitre 2

Deuxième série

2.1 Exercice libre

1. On considère l'arche de cycloïde Γ paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & a(t-\sin t) \\ y(t) & = & a(1-\cos t) \\ t & \in & [0,2\pi] \end{array}$$

   Représenter graphiquement la courbe Γ en précisant les tangentes horizontales et verticales.
2. Calculer l'aire du domaine D intérieur à la courbe Γ.
3. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D (y-x)\,dx\,dy$$

   en la transformant en intégrale curviligne

Correction

1. Voir la figure 3.1
2. Pour calculer l'aire, on utilise la formule de Riemann-Green

$$A = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} x(t)\,y'(t)\,dt$$

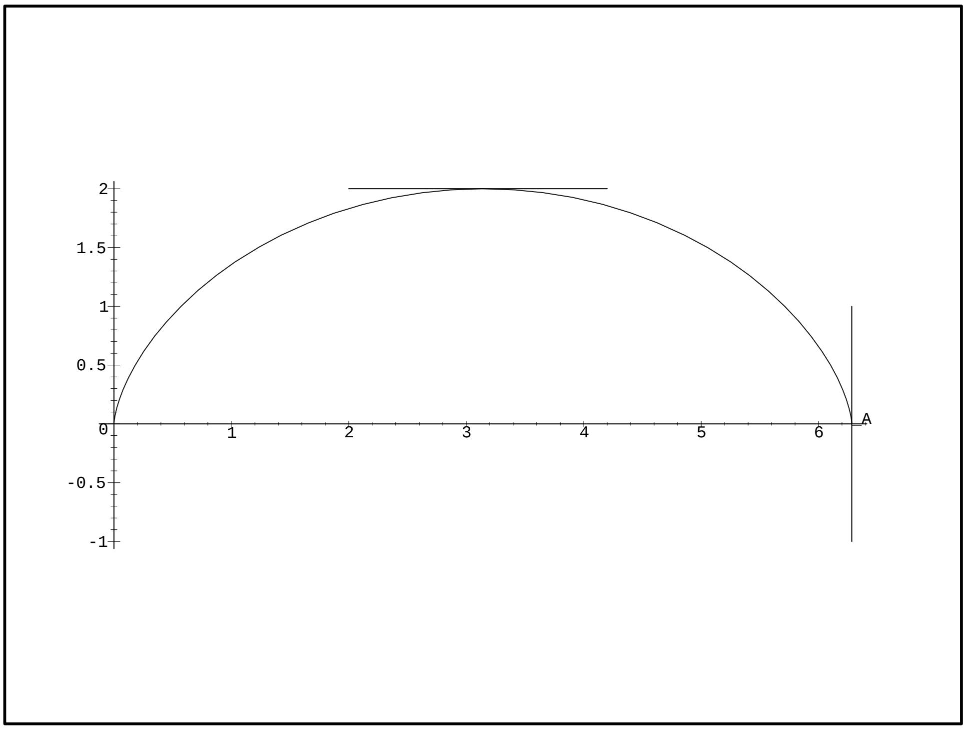

FIG. 2.1: Arche de cycloïde

où le bord ∂D du domaine D est formé de la réunion de l'arche de cycloïde et du segment $[0, 2\pi a]$ sur l'axe des abscisses et doit être parcouru dans le sens trigonométrique.
On peut remarquer que sur l'axe des abscisses, la composante $y(t)$ est nulle, donc aussi $y'(t)$ et l'intégrale le long de l'axe des abscisses ne donne aucune contribution.
Il reste seulement la contribution de l'intégrale le long de la cycloïde.

$$\begin{aligned} A &= -\int_\gamma x(t)\,y'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)a\sin t\ dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi} (\sin^2 t - t\sin t)\ dt = 3\,\pi\,a^2 \end{aligned}$$

Le signe $-$ devant l'intégrale a été mis pour tenir compte du fait que la paramétrisation donnée dans l'énoncé parcourt la cycloïde dans le sens inverse du sens trigonométrique.

3. Pour appliquer la formule de Riemann-Green, nous devons d'abord trouver un vecteur $\vec{V} = (P, Q)$ tel que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

On peut prendre

$$P(x, y) = Q(x, y) = xy$$

On écrit la formule de R-G :

$$\iint_D (y-x)\ dxdy = \int_{\partial D} \vec{V}\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$$

Il faut calculer deux intégrales, la première le long du segment $[0, 2\pi a]$ sur l'axe des abscisses, la seconde le long de la cycloïde, dans le sens trigonométrique.
Pour la première intégrale, on utilise la paramétrisation $\gamma(t) = (t, 0)$, pour $t \in [0, 2\pi a]$.

$$I_1 = \int_0^{2\pi a} 0\ dt = 0$$

car le vecteur $\vec{V}$ est nul sur l'axe des abscisses.
Pour la seconde intégrale (le signe $-$ est mis pour tenir compte du sens de parcourt) :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^{2\pi} a^2(t-\sin t)(1-\cos t)\Big(a(1-\cos t)+a\sin t\Big)\ dt \\ &= -a^3\int_0^{2\pi}[t(1-\cos t)^2+t\sin t(1-\cos t)-\sin^2 t]\ dt \end{aligned}$$

On n'a conservé dans l'intégrale que les termes qui ne donne pas 0 aprés intégration.

$$I_2 = -(3\pi-\frac{5}{2})\,a^3\,\pi$$

$$\iint_D (y-x)\ dxdy = (\frac{5}{2}-3\pi)\,a^3\,\pi$$

Chapitre 3

Troisième série

3.1 Exercice libre

On donne le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x\,g(y,z) \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

où g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la fonction g afin qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ tel que
$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$$
2. Déterminer alors un vecteur $\vec{U}$ de composantes $\Big(0, Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.
3. En utilisant la formule de Stockes-Ampère, calculer le flux sortant de $\vec{V}$ à travers la demi-sphère d'équation :
$$z \geq 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

Correction

1. On doit avoir nécessairement :
$$\begin{aligned} \mathrm{Div}\,\vec{V} = \frac{\partial x g(y,z)}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} &= 0 \\ g(y,z) + 2y + 2z &= 0 \\ g(x,y) &= -2(y+z) \end{aligned}$$

2. Avec cette condition, il existe donc un potentiel vecteur $\vec{U}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$. Déterminons $\vec{U} = (P, Q, R)$: on doit avoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= xg(y,z) \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= z^2 \end{aligned}$$

$\vec{U}$ étant défini à un gradient près, on peut imposer $P = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= xg(y,z) \\ -\frac{\partial R}{\partial x} &= y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= z^2 \end{aligned}$$

Soit $P = 0$, $Q = xz^2$ et $R = -xy^2$.

$$\vec{U} = (0, xz^2, -xy^2)$$

3. Par la formule de Stokes-Ampère, le flux de $\vec{V}$ sortant à travers la demi-sphère est égal à la circulation de $\vec{U}$ le long du cercle

$$z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1$$

parcouru dans le sens trigonométrique, c'est-à-dire inverse des aiguilles d'une montre.
On paramétrise le cercle par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 1 \end{cases}$$

On calcule alors l'intégrale curviligne :

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} 0 \times (-\sin t) + \cos t \times 1^2 \times \cos t + 0 \; dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \; dt \\ &= \pi \end{aligned}$$

Remarque : Ce calcul est beaucoup plus rapide que le calcul direct du flux.