

Examen de rattrapage : Systèmes Différentiels Linéaires

7 juillet 2004 – durée : 45 minutes – tout document “APAD” autorisé

On rencontre parfois dans la résolution de problèmes de mécanique des milieux continus, des équations différentielles linéaires du type :

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 , \quad (1)$$

où a , b et c sont des constantes réelles, et $y(x)$ une fonction inconnue de x . L’objet des questions ci-dessous est de présenter deux méthodes pour résoudre ce type d’équations : la première méthode consiste à se ramener, par un changement de variables adéquat, à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants ; la seconde méthode consiste à chercher les solutions sous une forme particulière posée a priori.

Q1.

Soit l’équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$z''(u) - z(u) = 0 . \quad (2)$$

Donner la solution générale de cette équation.

Q2.

On pose $x = e^u$ et $y(x) = y(e^u) = z(u)$. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, exprimer $z'(u)$ en fonction de $y'(x)$ et x , puis $z''(u)$ en fonction de $y'(x)$, $y''(x)$ et x .

En déduire que, si $z(u)$ est solution de (2), alors $y(x)$ est solution de l’équation différentielle :

$$x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 . \quad (3)$$

Donner la forme générale de la solution de cette équation.

Q3.

Réciproquement, montrer de manière générale qu’avec le changement de variable $x = e^u$, l’équation (1) est transformée en une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. En déduire une première méthode pour résoudre des équations du type (1).

Q4.

Une seconde méthode plus directe consiste à chercher les solutions de (1) de la forme $y(x) = x^n$ où n est un exposant à déterminer. On applique cette méthode à l’équation particulière (3).

En substituant x^n à y dans (3), trouver l’équation que doit vérifier n . En déduire deux solutions indépendantes et retrouver la solution générale de (3).

Q5.

Application : déterminer la solution générale de l’équation différentielle

$$r^2 f''(r) + 2r f'(r) - 2f(r) = 0 . \quad (4)$$

(Une seule méthode est demandée.)

FIN DE LA PARTIE SYST. DIFF.