

Examen final : Module Systèmes Différentiels et Analyse Vectoriel
16 février 2008 – tout document “PAD” autorisé

Exercice 1

1. Donner l’expression générale de la solution du système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -k_1x + k_2y \\ \frac{dy}{dt} &= -k_2y\end{aligned}$$

Déterminer la solution dans le cas où $x(0) = 1.5$, $y(0) = 10.9$, $k_1 = 0.41$ et $k_2 = 0.2$.

Tracer sur un même graphe les évolutions $x(t)$ et $y(t)$.

2. Quelle équation différentielle du second ordre vérifie x ?

Exercice 2 Soit $\phi(x, y, z) = \ln r$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On ne considérera dans toute la suite que les points tels que $r > 0$. On note O l’origine des axes.

1. Calculer le champ vectoriel $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$.
2. Montrer que \mathbf{v} est orthogonal aux iso- ϕ . En déduire la valeur de l’intégrale

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}' dt ,$$

où γ est le cercle dans le plan Oxy de centre O et de rayon a .

3. Soit le cylindre $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = a^2, -b \leq z \leq b\}$. Calculer le flux de \mathbf{v} à travers ce cylindre.
4. Que vaut $\text{rot}\mathbf{v}$? Calculer le potentiel vecteur dont dérive \mathbf{v} (on rappelle la formule $\int_0^z \frac{du}{1+u^2} = \arctan z$.)
5. On considère maintenant le champ \mathbf{w} défini par $\mathbf{w} = \text{rot}(\phi\mathbf{k})$, où \mathbf{k} est le vecteur unitaire selon l’axe z .
Donner l’expression de \mathbf{w} .
7. Montrer que \mathbf{w} est orthogonal à \mathbf{v} . En déduire la valeur du flux de \mathbf{w} à travers Σ .
8. Calculer la valeur de la circulation de \mathbf{w} le long de γ .