

Examen final : Systèmes Différentiels Linéaires

15 janvier 2004 – durée : 45 minutes – tout document “PAD” autorisé

On considère le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y , \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y . \quad (2)$$

A $t = 0$, x et y ont pour valeurs (conditions initiales) :

$$x(0) = 1 , \quad y(0) = 2 . \quad (3)$$

On propose de résoudre le système différentiel (1) et (2) avec les conditions initiales (3) par trois méthodes.

Méthode 1

Q1. Donner la solution $y(t)$ en intégrant (2) et en utilisant la condition initiale pour y .

Q2. En insérant la solution $y(t)$ dans (1), déterminer la solution $x(t)$ satisfaisant les conditions initiales (3).

Méthode 2

Q3. Montrer que le système (1)-(2) implique

$$x'' + 3x' + 2x = 0 . \quad (4)$$

Q4. Donner la solution générale de l'équation (4).

Q5. Montrer qu'à $t = 0$, $x(t)$ vérifie les conditions initiales :

$$t = 0 : \quad x(0) = 1 , \quad x'(0) = 0 . \quad (5)$$

Q6. Donner la solution de l'équation différentielle (4) avec les conditions initiales (5).

[Remarque : $y(t)$ est obtenu de la même façon que dans la 1ère méthode.]

Méthode 3

On écrit le système différentiel sous la forme matricielle :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{X}(t) , \quad (6)$$

où $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et \mathbf{M} est la matrice 2×2 du système.

Q7. Quelle est l'expression de la matrice \mathbf{M} ?

Q8. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathbf{M} .

Q9. Donner l'expression de la solution de (6) sous forme d'une exponentielle de matrice, puis calculer cette exponentielle de matrice par diagonalisation de \mathbf{M} .

Q10. En utilisant les conditions initiales (3), donner les solutions $x(t)$ et $y(t)$.

FIN DE LA PARTIE SYST. DIFF.