

Examen final : Systèmes Différentiels Linéaires

6 décembre 2003 – durée : 45 minutes – tout document “APAD” autorisé

Remarque générale : la plupart des questions sont très courtes et indépendantes les unes des autres.

La position d'un mobile dans le plan est repérée par ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ dans un système d'axes donné Oxy . Les composantes $x'(t)$ et $y'(t)$ de son vecteur vitesse sont supposées connues et ont pour expression :

$$x'(t) = \omega y, \quad (1)$$

$$y'(t) = -\omega x. \quad (2)$$

Le paramètre ω (unité : s^{-1}) est réel, constant et strictement positif. On suppose de plus que l'on connaît la position du mobile à $t = 0$ (conditions initiales) :

$$t = 0 : \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (3)$$

On souhaite déterminer à partir de ces données la position du mobile à tout instant. Pour cela, on propose de résoudre le système différentiel (1) et (2) avec les conditions initiales (3) par deux méthodes.

Méthode 1

Q1. Montrer en dérivant par rapport au temps les deux équations (1) et (2), que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire du 2ème ordre :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (4)$$

Q2. Montrer qu'à $t = 0$, $x(t)$ vérifie les conditions initiales :

$$t = 0 : \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \quad (5)$$

Q3. Calculer la solution de l'équation différentielle (4) avec les conditions initiales (5).

Q4. A partir de l'équation (1), trouver l'expression de y en fonction du temps.

Méthode 2

On écrit le système différentiel sous la forme matricielle :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{X}(t), \quad (6)$$

où $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et \mathbf{M} est une matrice 2×2 .

Q5. Quelle est l'expression de la matrice \mathbf{M} ?

Q6. Vérifier que les deux valeurs propres de \mathbf{M} sont $i\omega$ et $-i\omega$, et que les deux vecteurs $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres.

Q7. Montrer que la solution peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = a_1 i e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

$$y(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 i e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

où a_1 et a_2 sont deux constantes complexes.

Q8. Déterminer les constantes a_1 et a_2 pour les conditions initiales (3).

FIN DE LA PARTIE SYST. DIFF.