

Corrigés des examens PAD module Systèmes Différentiels et Analyse Vectorielle

1 Examen 6 décembre 2003 (0304.pdf)

1. Dériver (1) par rapport à t : $x''(t) = \omega y'(t)$; remplacer $y'(t)$ grâce à (2).
2. (1) donne à $t = 0$: $x'(0) = \omega y(0)$, d'où la 2ème condition initiale de (5).
3. La solution générale de (4) est : $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$. En appliquant les conditions initiales, on trouve $x(t) = \cos \omega t$.
4. $y = \frac{1}{\omega} x'(t) = -\sin \omega t$
5. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$.
6. Faire le calcul.
7. On projette \mathbf{X} sur la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{X} = A_1(t)\mathbf{V}_1 + A_2(t)\mathbf{V}_2 .$$

Puis on injecte dans (6) (\mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 sont vecteurs propres de \mathbf{M}) :

$$A_1'(t)\mathbf{V}_1 + A_2'(t)\mathbf{V}_2 = i\omega A_1(t)\mathbf{V}_1 - i\omega A_2(t)\mathbf{V}_2$$

soit

$$A_1' = i\omega A_1 \quad \text{et} \quad A_2' = -i\omega A_2 .$$

En intégrant ces deux équations on trouve la solution de la forme (7-8).

8. On trouve $a_1 = -i/2$ et $a_2 = 1/2$.

2 Examen de rattrapage du 20 mars 2004 (0304R1.pdf)

1. Les valeurs propres sont $-\omega$ et -3ω , associées aux vecteurs propres $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On remplace x et y dans (1-2) par $(X + Y)/2$ et $(X - Y)/2$, et on trouve (5-6) avec $\omega_1 = \omega$ et $\omega_2 = -3\omega$. X et Y sont les composantes du vecteur \mathbf{x} dans la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
3. $X(t) = a_1 \cos \sqrt{\omega}t + b_1 \sin \sqrt{\omega}t$ et $Y(t) = a_2 \cos \sqrt{3\omega}t + b_2 \sin \sqrt{3\omega}t$.
4. – CI-1 : $X(0) = 2, Y(0) = 0, \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$; $X(t) = 2 \cos \sqrt{\omega}t$ et $Y(t) = 0$.
 $x(t) = y(t) = \cos \sqrt{\omega}t$.
 – CI-2 : $X(0) = 0, Y(0) = 2, \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$; $X(t) = 0$ et $Y(t) = 2 \cos \sqrt{3\omega}t$.
 $x(t) = -y(t) = \cos \sqrt{3\omega}t$.

Les deux solutions correspondent à des évolutions sur 2 modes propres : mode propre 1, x et y sont en phase, mode 2, x et y sont en opposition de phase. Pour une condition initiale quelconque, il y aurait superposition des 2 modes.

3 Examen de rattrapage du 7 juillet 2004 (0304R2.pdf)

1. $z(u) = ae^u + be^{-u}$.
2. $z'(u) = xy'(x)$ et $z''(u) = xy'(x) + x^2y''(x)$. On remplace dans (2) pour trouver (3).
3. On écrit (1) sous la forme $a(x^2y'' + xy') + (b - a)xy' + cy = 0$ et en remplaçant par z on trouve : $az''(u) + (b - a)z'(u) + cz(u) = 0$. C'est une EDO du 2ème ordre. On applique la méthode de l'équation caractéristique pour trouver $z(u)$, puis $y(x)$ en posant $u = \ln x$. Dans l'EDO (3) cela donne $y(x) = ax + \frac{b}{x}$.
4. n vérifie $n(n - 1) + n - 1 = 0$. Les solutions sont $n = -1$ et $n = 1$. Deux solutions indépendantes de (3) sont $y = 1/x$ et $y = x$. On retrouve la solution générale $y = ax + \frac{b}{x}$.
5. La solution générale est $f(r) = ar + \frac{b}{r^2}$.

4 Examen du 15 janvier 2005 (0405.pdf)

1. $y(t) = 2e^{-t}$.
2. Par la méthode du facteur intégrant (e^{2t}), on trouve : $x = -e^{-2t} + 2e^{-t}$.
3. On dérive (1) et on remplace $y'(t)$ grâce à (2).

4. Les deux racines caractéristiques sont -2 et -1 , donc la solution est $x = ae^{-2t} + be^{-t}$.
5. La seconde condition initiale est obtenue directement à partir de (1) à $t = 0$.
6. On retrouve la solution de la question 2.
7. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
8. Les valeurs propres de \mathbf{M} sont -1 et -2 . Les vecteurs propres associés sont $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
9. $\mathbf{X}(t) = e^{t\mathbf{M}}\mathbf{X}_0$. Les valeurs propres de $t\mathbf{M}$ sont $-t$ et $-2t$, et $t\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}(t)\mathbf{P}^{-1}$, où $\mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage. On trouve

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{P}\mathbf{D}(t)\mathbf{P}^{-1}}\mathbf{X}_0 = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}(t)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}_0 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}_0.$$

10. En remplaçant \mathbf{X}_0 par le vecteur initial $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on retrouve la solution pour x et y .

5 Examen du 14 janvier 2006 (0506.pdf)

1. Méthode du facteur intégrant (e^{3t}) : $x(t) = \frac{4}{9}e^{-3t} + \frac{5}{3}(t - \frac{1}{3})$.
- 2.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0 + y_0}{2}e^{-3t} + \frac{x_0 - y_0}{2}e^t \\ y(t) &= \frac{x_0 + y_0}{2}e^{-3t} - \frac{x_0 - y_0}{2}e^t \end{aligned}$$

3. – Divergence nulle : $a + d = 0$
 – Rotationnel nul : $c - b = 0$

On pose $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx - ay \end{pmatrix}$. On a alors $\mathbf{v} = \text{grad}\{\frac{a}{2}(x^2 - y^2) + bxy\}$ et $\mathbf{v} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) \end{pmatrix}$.

4. – Méthode 1 : la paramétrisation du cercle est $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$. On trouve alors

$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (2 \cos t - \sin t)(\cos t)] dt = \pi .$$

- Méthode 2 : on utilise la formule de Stokes-Ampère :

$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{N} dudv .$$

Le rotationnel de \vec{V} vaut $\text{rot} \vec{V} = \mathbf{k}$. La surface d'intégration est le disque de rayon 1 centré en O et dans le plan xy . Le cercle est orienté selon le sens trigonométrique. La normale au disque est donc \mathbf{k} . L'intégrale vaut π .

6 Examen du 30 janvier 2007 (0607.pdf)

Exercice 1

1. $x(t) = \cosh t$.
2. On pose $y = x'$. On trouve alors le système :

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= y \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

3. Les valeurs propres de la matrice sont $+1$ et -1 , et les deux vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

La solution du système différentiel est

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{P}t\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}} \mathbf{X}_0 = \mathbf{P} e^{t\mathbf{D}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}_0 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}_0 .$$

En remplaçant $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on retrouve la solution de la question 1.

Exercice 2

1.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\Omega}{dr} = \frac{x}{r} \frac{d\Omega}{dr}$$

de même pour la seconde dérivée.

$$2. \operatorname{div} \vec{V} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} y + \frac{\partial \Omega}{\partial y} x = 0.$$

3.

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) \mathbf{k}.$$

\vec{V} est irrotationnel si $\Omega' + \frac{2}{r}\Omega = 0$. C'est une EDO su 1er ordre dont le facteur intégrant est r^2 . La solution de cette équation est donc $\Omega = \frac{\text{cste}}{r^2}$.

$$4. (\tan^{-1})'(u) = \frac{1}{1+u^2}, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mu \left(-\frac{y}{x^2} \right) \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \right) = -\mu \frac{y}{r^2} = -\Omega y.$$

De la même façon, on peut calculer $\frac{\partial \phi}{\partial y}$.

$$5. - r < 1 : \operatorname{rot} \vec{V} = 2\Omega_0 \mathbf{k}.$$

$$- r > 1 : \operatorname{rot} \vec{V} = 0.$$

Dans les deux cas $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

6. On choisit le sens trigonométrique. D'après le théorème de Stokes-Ampère, la circlation est égale au flux du rotationnel à travers le disque de rayon 1, soit $2\pi\Omega_0$.

7. En fermant le cylindre en haut et en bas, on a une surface fermée, donc le flux à travers cette surface est donnée par le théorème de Green-Ostrogradski, c'est-à-dire l'intégrale de la divergence, soit 0. Comme le vecteur \vec{V} n'a pas de composante le long de z , les flux sur la base et le dessus du cylindre sont nuls ; donc le flux sur les faces latérales est nul.

7 Examen du 16 février 2008 (0708.pdf)**Exercice 1**

1.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left(x(0) - \frac{y(0)}{k_1 - k_2} \right) e^{-k_1 t} + \frac{y(0)}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t} \\
 y(t) &= y(0) e^{-k_2 t} .
 \end{aligned}$$

2. $x'' + (k_1 + k_2)x' - k_1 k_2 = 0$, avec les conditions initiales $x(0)$ et $x'(0) = -k_1 x(0) + k_2 y(0)$.

Exercice 2

1. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x/r^2 \\ y/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. Une iso- ϕ est une surface $r = \text{cste}$, donc les cylindres d'axe Oz . On remarque qu'en un point M , $\mathbf{v} = \frac{1}{r^2} O\vec{M}$ est un vecteur normal à l'iso- ϕ en M . Le cercle γ étant iso- ϕ , le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}'$ est nul le long de γ : l'intégrale est nulle.
3. Le vecteur \mathbf{v} n'ayant pas de composante sur z , les flux sur la base et le sommet du cylindre sont nuls. Il faut donc calculer le flux sur la face latérale. La paramétrisation du cylindre est :

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$z = u$$

avec $t \in [0, 2\pi]$ et $u \in [-b, b]$. Le vecteur surface est égal à

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ce vecteur est orienté vers l'extérieur du cylindre, c'est un donc un flux sortant que nous calculons :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, dt du = \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{a} \\ \frac{\sin t}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt du = 4b\pi .$$

4. $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. Le potentiel vecteur peut être choisi indépendant de z . Il vérifie donc les équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_z}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} &= \frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

La dernière équation montre que l'on peut choisir $A_x = A_y = 0$ et donc le potentiel vecteur est de la forme $A_z \mathbf{k}$. L'intégration de la première équation donne

$$A_z = \int \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \int \frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2} = \tan^{-1} \frac{y}{x} + f(x) .$$

Pour trouver $f(x)$, on dérive A_z par rapport à x et on compare à $\frac{y}{r^2}$. On trouve que $f(x) = \text{cste}$. Donc le potentiel vecteur est $\tan^{-1} \frac{y}{x} \mathbf{k}$.

5. $\text{rot} \phi \mathbf{k} = \begin{pmatrix} y/r^2 \\ -x/r^2 \\ 0 \end{pmatrix} .$

6. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. On en déduit que \mathbf{w} est tangent à la face latérale du cylindre et donc que le flux est nul sur cette face. Comme \mathbf{w} est aussi orthogonal à \mathbf{k} , son flux sur la base et le sommet du cylindre est nul. Le flux de \mathbf{w} à travers Σ est nul.

7. La paramétrisation du cercle γ est $(x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, 0)$. Le vecteur tangent

$\gamma'(t)$ est égal à $\begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. La circulation vaut donc :

$$\oint_{\gamma} \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{a} \\ -\frac{\sin t}{a} \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi .$$