

**Examen final : Module 3 / Systèmes Différentiels et Analyse Vectoriel**  
20 janvier 2007 – tout document “PAD” autorisé

**Exercice 1**

1. Calculer la solution de l'équation différentielle avec conditions initiales

$$x''(t) - x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

2. On pose  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$ . Montrer que  $\mathbf{X}(t)$  est solution du système différentiel avec conditions initiales

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Résoudre ce système différentiel par la méthode de l'exponentielle de matrice.

**Exercice 2** Soit le champ de vecteur  $\vec{V} = (u, v, w)$  tel que

$$u = -\Omega y, \quad v = \Omega x, \quad w = 0,$$

où  $\Omega$  est une fonction de la distance à l'axe  $Oz$ , que l'on spécifiera dans la suite :

$$\Omega = \Omega(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\Omega}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{d\Omega}{dr}.$$

2. Montrer que le champ  $\vec{V}$  est à divergence nulle.

3. Montrer que le champ  $\vec{V}$  est irrotationnel si

$$2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} = 0.$$

En déduire que  $\vec{V}$  est irrotationnel si

$$\Omega = \frac{\mu}{r^2}, \quad \mu = \text{cste.}$$

4. Montrer que le potentiel dont dérive  $\vec{V}$  vaut  $\phi = \mu \tan^{-1} \frac{y}{x}$  à une constante près.

Dans la suite, on prend comme expression de  $\Omega$  :

$$\Omega(r) = \Omega_0 = \text{cste}, \quad r < 1$$

$$\Omega(r) = \frac{\Omega_0}{r^2}, \quad r \geq 1$$

5. Tracer  $\Omega(r)$ . Calculer  $\text{rot} \vec{V}$  pour  $r < 1$ . Que vaut-il pour  $r \geq 1$ ? Que vaut  $\text{div} \vec{V}$ ?

6. Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long du cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  en utilisant le théorème de Stokes-Ampère (préciser le sens de parcours choisi).

7. Que vaut le flux de  $\vec{V}$  à travers la face latérale du cylindre  $\{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ?