

Examen rattrapage : Systèmes Différentiels Linéaires

20 mars 2004 – durée : 45 minutes – tout document “APAD” autorisé

Deux oscillateurs couplés vérifient le système d'équations différentielles du second ordre :

$$\ddot{x} = \omega(-2x + y) , \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \omega(x - 2y) , \quad (2)$$

où ω est un nombre réel strictement positif.

Q1. Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} , \quad (3)$$

avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\omega & \omega \\ \omega & -2\omega \end{pmatrix} . \quad (4)$$

Calculez les deux valeurs propres de \mathbf{A} et les vecteurs propres associés.

Q2. On pose $X = x + y$ et $Y = x - y$. Montrez que X et Y satisfont 2 équations différentielles du type :

$$\ddot{X} = -\omega_1 X , \quad (5)$$

$$\ddot{Y} = -\omega_2 Y , \quad (6)$$

Précisez les expressions de ω_1 et ω_2 . Comparez ces expressions avec celles des valeurs propres. Pouvez-vous commentez en quoi a consisté le changement de variable $(x, y) \rightarrow (X, Y)$?

Q3. Donner les solutions générales des équations (5) et (6).

Q4. On considère deux couples de conditions initiales distinctes :

1. CI-1 : $x(0) = y(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$
2. CI-2 : $x(0) = -y(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

Tout d'abord pour les conditions initiales CI-1, puis pour les conditions initiales CI-2, donnez les valeurs correspondantes de X , Y , \dot{X} et \dot{Y} .

A partir des solutions générales trouvées dans la question **Q3**, déterminez pour les conditions initiales CI-1, puis CI-2, les expressions de $X(t)$ et de $Y(t)$.

Quelles sont alors les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ correspondantes ?

Interprétez ces résultats. Que se passerait-il pour des conditions initiales quelconques ?

FIN DE LA PARTIE SYST. DIFF.