

Examen final : Module Systèmes Différentiels et Analyse Vectorielle

4 décembre 2010 – documents autorisés (calculatrice non nécessaire)

Exercice A

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + z(t) \\ y'(t) = -y(t) \\ z'(t) = z(t) - y(t) \end{cases}$$

et la condition initiale :

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

1. Calculer $y(t)$ à partir de la 2ème équation.
2. En déduire $z(t)$.
3. Calculer la solution $x(t)$.
4. Retrouver ces résultats directement par la méthode de diagonalisation des systèmes différentiels linéaires.

Exercice B

Soient le champ vectoriel

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

et $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, la sphère de rayon a centrée à l'origine.

1. Rappeler l'expression du vecteur sortant normal à la sphère Σ .
2. Calculer le flux sortant de \vec{V} à travers la sphère Σ .
3. Calculer la divergence de \vec{V} .
4. Calculer l'intégrale de la divergence sur le volume intérieur à la sphère Σ . Commentaire ?
5. Calculer le rotationnel de \vec{V} .
6. On considère l'hémisphère (surface ouverte) Σ' correspondant à la partie de Σ contenue dans le demi-espace $y \geq 0$. Calculer le flux du rotationnel de \vec{V} à travers Σ' en prenant la même orientation que pour la question 2.
7. Calculer la circulation de \vec{V} le long du cercle $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 = a^2, y = 0\}$ dans le sens direct. Commentaire ?