

**Examen final : Module Systèmes Différentiels et Analyse Vectorielle**

6 décembre 2008 – tout document “PAD” autorisé

*Note : dans les exercices 2 et 3, les symboles en caractère gras sont des vecteurs,  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  est un repère orthonormé, et  $(x, y, z)$  sont les coordonnées des points de l'espace dans ce repère.*

**Exercice 1** On note  $\theta$  la différence de température d'un bâtiment avec la température extérieure. Cette différence de températures suit l'évolution temporelle donnée par l'EDO :

$$C \frac{d\theta}{dt} = -H\theta + P ,$$

où  $C$ ,  $H$  et  $P$  sont des grandeurs constantes (respectivement la capacité thermique, le coefficient de pertes thermiques et la puissance de la chaudière).

**1.a** En résolvant l'EDO, donner l'expression de la température en fonction du temps, lorsqu'à  $t = 0$ ,  $\theta = 0$ .

**1.b** On donne  $C/H = 15$  heures et  $P/C = 5^\circ\text{C}/\text{heure}$ . Au bout de combien de temps la température du bâtiment est montée de  $10^\circ\text{C}$  ( $\theta = 10^\circ\text{C}$ ) ?

**Exercice 2** Soit le champ vectoriel  $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

**2.a** Calculer le flux de  $\mathbf{v}$  à travers la sphère de rayon  $a$  et centrée en  $O$ .

**2.b** Calculer la divergence de  $\mathbf{v}$ .

**2.c** Utiliser la formule de Green-Ostrogradski pour retrouver le résultat de **2.a** à partir de la divergence de  $\mathbf{v}$ .

**Exercice 3** Soit le champ vectoriel  $\mathbf{u}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ .

**3.a** Calculer la circulation de  $\mathbf{u}$  le long du cercle de rayon  $R$ , centré en  $O$  et contenu dans le plan  $z = 0$ .

**3.b** Calculer le rotationnel de  $\mathbf{u}$ .

**3.c** Utiliser la formule de Stokes-Ampère pour retrouver le résultat de **3.a** à partir du rotationnel de  $\mathbf{u}$  (on pourra choisir comme surface d'intégration le disque  $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq R, z = 0\}$ ).