

Examen final : Module Systèmes Différentiels et Analyse Vectorielle
5 décembre 2009 – tout document “PAD” autorisé

Exercice A

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + 4y \end{cases}.$$

et la condition initiale :

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

1. Calculer la solution $(x(t), y(t))$ par diagonalisation du système.

2. On calcule maintenant la solution par une deuxième méthode.

A partir du système différentiel, montrer que $x(t)$ vérifie l'équation du second ordre

$$x'' - 5x' + 6x = 0.$$

3. Que vaut $x'(0)$? Retrouver la solution $x(t)$ à partir de l'équation différentielle de la question précédente et des conditions initiales.

4. Quelle est l'équation différentielle du deuxième ordre que vérifie $y(t)$? Retrouver la solution $y(t)$ à partir de cette équation et des conditions initiales.

Exercice B

Soient le champ vectoriel $\vec{V} = (0, x^3, 0)$ et la surface $\Sigma = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$.

1. On paramètre Σ par :

$$\sigma(s, t) : \begin{cases} x = s \cos t \\ y = s \sin t \\ z = s^2 \end{cases} \quad s \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Une courbe avec $s = \text{cste}$ est une iso- s ; de même une courbe avec $t = \text{cste}$, une iso- t . Caractériser ces deux familles de courbes et faire un schéma représentant Σ et quelques iso- s et iso- t .

Calculer le vecteur normal \vec{N} à Σ . Préciser son orientation par rapport à Σ sur le schéma précédent.

2. Calculer le rotationnel de \vec{V} .

3. Calculer le flux du rotationnel de \vec{V} à travers Σ .

4. Soit $\partial\Sigma$ le bord orienté de Σ ; on paramètre $\partial\Sigma$ par

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Préciser sur le schéma le sens de parcours de $\partial\Sigma$ paramétré par $\gamma(t)$ lorsque t varie de 0 à 2π .

Quelle égalité doit vérifier $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt$?

Calculer cette intégrale curviligne pour retrouver le résultat escompté.