

Examen final : Module Systèmes Différentiels et Analyse Vectorielle

3 décembre 2011 – tous documents PAD autorisés (calculatrice autorisée)

Exercice A

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = u(t) - v(t) \end{cases}$$

et la condition initiale :

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0.$$

1. Déterminer la solution générale de ce système d'équations.
2. Dans le cas $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, tracer dans le plan Ouv , la trajectoire $(u(t), v(t))$ (indiquer la pente à l'origine et l'asymptote pour $t \rightarrow \infty$ - on pourra prendre $\sqrt{2} = 1.4$).
3. Même question pour $u_0 = 1$ et $v_0 = \sqrt{2} - 1$.

Exercice B

Soit le champ vectoriel (vortex de Batchelor) en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/a^2}) \\ W e^{-r^2/a^2} \end{pmatrix},$$

où Γ , a et W sont des constantes strictement positives.

1. Calculer la circulation de \vec{V} le long du cercle de centre O , de rayon R et contenu dans le plan $z = 0$.
2. Calculer le rotationnel de \vec{V} .
3. En utilisant le théorème de Stokes, retrouver le résultat de la question 1.

Le rotationnel en coordonnées cylindriques a pour expression :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}.$$