Devoir 2009 - 2010.

Exo 1 :

$\mathbb{R}_2[X] = \{ P(x) = a1 + bX + cX^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$

= e.v. de dim 3

engendré par $\{1, X, X^2\}$

$\varphi(P,Q) = P(1).Q(1) + P'(1).Q'(1) + P''(1).Q''(1)$

$\begin{cases} \varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q) \\ \varphi(P,Q) = \varphi(Q,P) \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ est bilin. sym.

(2) matrice de φ dans $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

$P(x) = a1 + bX + cX^2$

$= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$

$Q(x) = \tilde{a}1 + \tilde{b}X + \tilde{c}X^2 = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\varphi(P,Q) = \begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \\ \left[a, b, c\right] \end{array} \left[\quad A_{\varphi} \quad \right]_{\mathcal{B}} \left[\begin{matrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{matrix}\right] \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

$\varphi(1,1) = a_{11} = 1$

$\varphi(1,X) = a_{12} = 1$

$\varphi(1,X^2) = a_{13} = 1$

$\varphi(X,X) = a_{22} = 1 + 1 = 2$

$\varphi(X, X^2)$ ... 2

$$\varphi(X,X) = a_{22} = 1+1 = 2$$
$$\varphi(X,X^2) = a_{23} = 1+2 = 3$$
$$\varphi(X^2,X^2) = a_{33} = 1+4+4 = 9$$
$$(A_\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(X,Y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_1y_1 + \dots$$
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

3) φ produit scalaire = reste à montrer la def. pos. de φ.

$\Leftrightarrow$ def pos. de A_φ.

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ valeurs ppes de A_φ

$\rightsquigarrow$ soit facto en somme de carrés de φ

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & 3 \\ 1 & 3 & (9-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(9-\lambda) + 6 - (2-\lambda) - 9(1-\lambda) - (9-\lambda)$$

$$\left((2-\lambda)(9-\lambda) = 18 - 11\lambda + \lambda^2 \right)$$

$$= \cancel{18} - 11\lambda + \lambda^2 - 18\lambda + 11\lambda^2 - \lambda^3 + 6 - 2 + \lambda \cancel{-9} + 9\lambda \cancel{-9} + \lambda$$

$$= 4 - 18\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = D(\lambda) \quad \text{?? racines ??}$$

N.P.

$\forall \lambda \leq 0$, $D(\lambda) = 4 > 0$
$-18\lambda \geq 0$
$+12\lambda^2 \geq 0$
$-\lambda^3 \geq 0$
$\geq 4 > 0$

$-\lambda^3 \geqslant 0$!

$\boxed{\text{Donc les v.p. sont nécᵗ toutes } > 0}$

$P(X) = a + bX + cX^2$.

- $\varphi(P,P) = \underset{\geqslant 0}{(a+b+c)^2} + \underset{\geqslant 0}{(b+2c)^2} + \underset{\geqslant 0}{4c^2}$

$\geqslant 0$. et c'est nul ssi

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{matrix}$$

càd $P = 0$.

donc φ est déf. positive.

4) $\{1, X, X^2\}$ base orthogonale pour le produit scalaire φ ?

rep NON ! car A_φ non diagonale

5) Gram Schmidt sur $\{1, X, X^2\}$ avec le prod scal φ.

$\varphi(1,1) = 1$. donc 1 est déjà normé pour φ. $\longrightarrow P_0 = 1$

$\varphi(1, X) = 1 \longrightarrow Q_1 = X - \varphi(1,X).1$
$= X - 1$

$\|Q_1\|_\varphi^2 = \varphi(Q_1, Q_1) = 1$
$\longrightarrow P_1 = X - 1$

$\varphi(1, X^2) = 1$

$\varphi(X-1, X^2) = 2$

$Q_2 = X^2 - 1.1 - 2.(X-1)$

$= X^2 - 1 - 2X + 2$

$$= X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

$$\varphi(Q_2, Q_2) = \| Q_2 \|_\varphi^2 = 4 .$$

$$P_2 = \frac{(X-1)^2}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \qquad \underline{\det(A) = 0}$$

$\times 3$

$\ker(A) \neq \{0\}$.

(1) $\underline{f \text{ non injective}}$ car col. 3 = 3 × col 1.
⇒ il y a un noyau ⇔ $\det(A) = 0$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$. donc rang $A \geqslant 2$. et $= 2$ car $\dim(\ker A) \geq 1$.

(3) Tjs vrai ds le cas des matrices symmetrices.

(4) f diagonalisable car la matrice A est sym et diag. dans une base orthonormée de v.p.

(5) oui

(6) NON car il y a un noyau :
$\exists u \,/\, Au = 0$. $\quad u^T A u = u^T 0$
$= 0$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Exo 3}}$:
$$\ell = \left(\alpha + \beta \sqrt{\theta}\right) e^{-\gamma (P - P_0)}$$

exo –

$$\ell = (\underset{(?)}{\alpha} + \underset{(?)}{\beta}\sqrt{\theta})\, e^{\underset{\text{connu}}{\gamma}(P-P_0)}$$

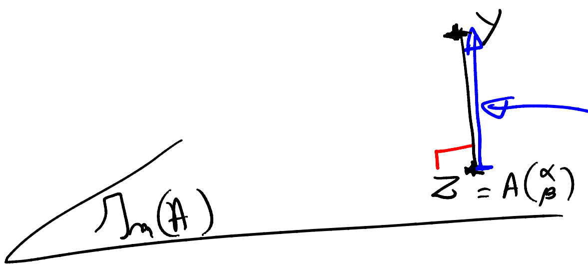
observés $(\theta_i, P_i, \ell_i)_{i=1..m}$, modèle $= \mathcal{L}(\theta, P, \alpha, \beta, \gamma)$ est lin. en α, β.

PB on souhaite minimiser : $\displaystyle\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{m} \left(\ell_k - \mathcal{L}(\theta_k, P_k, \alpha, \beta, \gamma)\right)^2$

càd. $$\min_{(\alpha,\beta)} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\gamma(P_1-P_0)} & \sqrt{\theta_1}\,e^{-\gamma(P_1-P_0)} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\gamma(P_m-P_0)} & \sqrt{\theta_m}\,e^{-\gamma(P_m-P_0)} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\min_{(\alpha,\beta)} \left\| Y - \underbrace{A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{Z} \right\|_2^2$$

② .



caractérisation de la solution.

$(Y-Z) \perp \mathrm{Im}(A)$

càd que $(Y-Z) \in \mathrm{Ker}(A^T)$.

càd $A^T\left(Y - A\binom{\alpha}{\beta}\right) = 0$.

$$\boxed{A^T Y = A^T A \binom{\alpha}{\beta}.}$$

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta} = (A^T A)^{-1} A^T Y.}$$

sous réserve que $\mathrm{rang}(A) = 2$

$\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$

$$\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T).$$

$\circledast$ $(Y-Z) \perp \mathrm{Im}(A)$ càd que $\forall v \in \mathrm{Im}(A)$

$$(v, Y-Z)_2 = v^T (Y-Z) = 0.$$

mais $v \in \mathrm{Im}(A)$ revient à dire que $v = Au$

et donc on veut que : $\forall u \in \mathbb{R}^2$

$$(Au)^T (Y-Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall u \in \mathbb{R}^2 \quad u^T A^T (Y-Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall u \in \mathbb{R}^2 \; (u, A^T(Y-Z)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A^T(Y-Z) = 0}.$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad (Y-Z) \in \mathrm{Ker}(A^T). \right)$$

③ . le modèle est non linéaire en γ ⚠

$$\theta_1, P_{11} \quad l_{11} \simeq (\alpha + \beta\sqrt{\theta_1}) e^{-\gamma(P_{11}-P_0)}$$

$$\theta_1, P_{12} \quad l_{12} = (\alpha + \beta\sqrt{\theta_1}) e^{-\gamma(P_{12}-P_0)}$$

$$\theta_2, P_{21} \quad l_{21} \qquad \frac{l_{11}}{l_{12}} = e^{-\gamma(P_{11}-P_{12})}$$

$$\theta_2, P_{22} \quad l_{22}$$

$$\ln\left(\frac{l_{11}}{l_{12}}\right) = \underbrace{-\gamma(P_{11}-P_{12})}_{\text{lin. en } \gamma.}$$

}

(et on repart pour)

(et on repart pour un Nombre carré km.)

4) - a)

$$\begin{cases} \phi_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(x-a)\right) \\ \lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \end{cases}$$

vérifient : $\begin{cases} -\phi_k'' = \lambda_k \phi_k \\ \phi_k(a) = \phi_k(b) = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} -u'' + k_0^2 u = f. \\ (\underbrace{A} + k_0^2 I)u = f. \end{cases}$$

$Au = \lambda u$

$(A+\alpha I)u = \lambda u + \alpha u$
$= (\underbrace{\lambda+\alpha})u$

b) $\displaystyle\int_a^b -u''(x)\, v(x)\, dx = \int_a^b u(x)\,(-v''(x))\, dx$

2 I.P.P et les P.P. qui sautent

car $u(a) = u(b) = 0$
et $v(a) = v(b) = 0$

$$\begin{aligned}(\lambda_k\phi_k, \phi_j)_{L^2(a,b)} &= (-\phi_k'', \phi_j)_{L^2(a,b)} \\ &= (\phi_k, -\phi_j'')_{L^2(a,b)} \\ &= (\phi_k, \lambda_j\phi_j)_{L^2(a,b)}\end{aligned}$$

donc $\lambda_k (\phi_k, \phi_j)_{L^2} = \lambda_j (\phi_k, \phi_j)_{L^2}$

si $\lambda_k \neq \lambda_j$ alors nect $\left| (\phi_k, \phi_j)_{L^2} = 0 \right.$

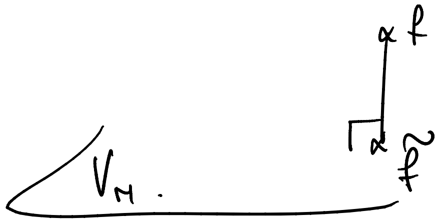
si $\lambda_k \neq \lambda_j$ alors nec^t $\boxed{(\phi_k, \phi_j)_{L^2} = 0}$

③ (déjà vu :)

ϕ_k vérifie : $-\phi_k'' = \lambda_k \phi_k$

donc $\underbrace{\phi_k'' + k_0^2 \phi_k} = -\lambda_k \phi_k + k_0^2 \phi_k = (\underbrace{k_0^2 - \lambda_k}_{\mu_k}) \phi_k.$

④ $\tilde{f}$ = proj $\perp$ de f sur vect $\{\phi_1, \ldots, \phi_M\}. = V_M$



$(f - \tilde{f}) \perp V_N.$

c-à-d que :

$$\begin{cases} \underline{1 \leq k \leq M} : \left(\phi_k, f - \tilde{f}\right)_{L^2} = 0. \\ \text{avec } \tilde{f} = \underbrace{\sum_{k=1}^{M} \beta_k}_{(?)} \phi_k \quad \text{car } \tilde{f} \in V_M \end{cases}$$

le système correspondant est donc :

$$\begin{cases} G\beta = F \\ G = \left[(\phi_k | \phi_j)_{L^2} \right]_{k}^{j} \\ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M. \qquad F = \left((\phi_k, f)_{L^2(a,b)} \right)_{k=1 \ldots M} \end{cases}$$

mais la base étant $\perp$ dans $L^2(a,b)$

G est diagonale :

$$G = \mathrm{diag}\left(\|\phi_k\|^2_{L^2(a,b)} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left[\beta_k = \frac{(\phi_k, f)_{L^2(a,b)}}{(\phi_k, \phi_k)_{L^2(a,b)}} \right] k = 1 \dots N.$$

(5) - $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$ tq.

$$\tilde{u}'' + k_0^2 \tilde{u} = \tilde{f}.$$

cad que : $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k'' + k_0^2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k = \tilde{f}$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (k_0^2 - \lambda_k) \phi_k = \tilde{f} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \phi_k$$

(6) donc $\forall k : \frac{\beta_k}{k_0^2 - \lambda_k} = \alpha_k$

(7)

$$\begin{array}{ccc} u\,? & \xleftrightarrow{\text{Sol}} & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{\perp}_{V_N} u = \tilde{u} & \xleftrightarrow{\text{Sol}} & \tilde{f} = P^{\perp}_{V_N} f. \end{array}$$

ssi $k_0^2 - \lambda_k \neq 0$

Verifions donc que $(u-\tilde{u}) \perp V_M$

c.à.d que $(\phi_k \mid u-\tilde{u})_{L^2} = 0, \forall k$

en effet $\lambda_k (\phi_k \mid u-\tilde{u})_{L^2} = (\lambda_k \phi_k, u-\tilde{u})_{L^2}$

$$= \underline{(-\phi_k'', u-\tilde{u})_{L^2}}$$

Comme $u(a) = u(b) = 0$ et $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$

$$\left(\tilde{u}(a) = \Sigma \alpha_k \underbrace{\phi_k(a)}_{0} \right)$$

$$, = \underline{(\phi_k, -u'' + \tilde{u}'')_{L^2}}$$

$$u'' + k_0^2 u = f$$
$$\tilde{u}'' + k_0^2 \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\forall k . \quad (\phi_k, f - \tilde{f})_{L^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\phi_k, \underbrace{u'' - \tilde{u}''} + k_0^2 (u - \tilde{u}))_{L^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\phi_k'', u - \tilde{u})_{L^2} + k_0^2 (\phi_k, u - \tilde{u})_{L^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (k_0^2 - \lambda_k)(\phi_k, u - \tilde{u})_{L^2} = 0.$$

— si $\lambda_k \neq k_0^2$ — nec^t $\phi_k \perp u - \tilde{u}$

donc $\tilde{u} = \text{Proj}^{\perp}$ de u sur $V_N = \text{Vect}\{\phi_1 \dots \phi_N\}$.

8. $k_0^2 = \lambda_m$ pour un indice donné.

nec^t on doit avoir $\beta_m = 0$ sinon pas de solut° possible

| solu° possible

si jamais $\beta_m = 0$. on a une infinité de solu°s, à une composante près selon ϕ_m

$$\alpha_m \cdot (\underbrace{k_0^2 - \lambda_m}_{0}) = \underset{0}{\beta_0}$$

$\downarrow$

libre. non fixé

$$L : \begin{array}{ccc} L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ u & \longmapsto & u'' + k_0^2 u = L.u \end{array}$$

linéaire.

$((L) = L^* \Leftrightarrow (Lu, v)_{L^2} = (u, Lv)_{L^2}))$

$$\boxed{L.\phi_k = \mu_k \phi_k}$$

. ϕ_k est v.p. de "L" associé à la val ppe μ_k $(k_0^2 - \lambda_k)$

$$\phi_k = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-a))$$

avec $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}$

$$\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(x-a)\right) = 0$$

en $x=a$ et $x=b$

$u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}(x-a))$

$-u'' = \lambda u$