Deuxième partiel d'algèbre - CPAD 2010-2011
Sans calculatrice - Les quatre exercices sont indépendants.

7 janvier 2011

1. Exercice 1. Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par :
$$f(X,Y) = xx' + ayy' + 3zz' + z'x + zx' + 2xy' + 2x'y$$
où a est un paramètre réel.
   (a) Ecrire une matrice symétrique M vérifiant :
   $$f(X,Y) = X^T MY\,.$$
   M est-elle diagonalisable ? (Justifiez votre réponse avec soin).
   (b) Si $a = 4$, f définit-elle un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Si $a = 6$, f définit-elle un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
   (d) On suppose a différent de 4 et de 6. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Si $a = 8$ vérifier que f définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base f-orthonormée du f-orthogonal de
   $$Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

2. Exercice 2. Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Dans la la base canonique, la matrice de f est :
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}$$
En justifiant, dites pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse :
   (a) $A^2 = A$.
   (b) A est une matrice orthogonale.
   (c) A est la matrice d'une projection orthogonale.
   (d) A est la matrice d'une symétrie orthogonale.
   (e) 1 et -1 sont valeurs propres de A.
   (f) L'espace vectoriel invariant par f est de dimension 2.
   (g) f n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée.
   (h) Imf et $Kerf$ sont orthogonaux.

3. Exercice 3. On mesure la flêche h d'un cable haute tension, entre deux pylônes distants d'une centaine de mètres, sous une température extérieure θ et véhiculant un courant d'une intensité I. Les mesures conduisent à postuler que la flêche (différence de hauteur entre la partie la plus basse du cable et les attaches sur les pylônes) est régie par une loi de la forme

$$h = (a\theta + b\theta^3)e^{cI}$$

où a, b etc sont trois paramètres du modèle à estimer. On effectue m mesures $(\theta_k, I_k, h_k)_{k=1,m}$ de hauteur dans différentes conditions de température et d'intensité.

   (a) On suppose dans un premier temps connue la valeur du paramètre c. Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de a et b.

   (b) Caractériser alors la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.

   (c) Afin d'améliorer l'estimation, on ne suppose plus connue la valeur de c. Supposons par contre qu'on dispose de diverses séries de mesures avec deux valeurs différentes de l'intensité et une valeur de la température commune. Indiquer alors comment on pourrait réaliser une estimation du paramètre c par une méthode de moindres-carrés linéaires ?

4. Exercice 4. On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^N(X)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à N muni du produit scalaire

$$< P, Q >_\omega = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\omega(x)\, dx$$

où $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   (a) Montrer que $T_n(x)$ défini sur $[-1, 1]$ par

$$T_n(x) \;=\; \cos(n \arccos(x))$$

   est un polynôme pour la variable x.
   Indications : écrire que $\cos(n\alpha) = \mathcal{R}e(e^{in\alpha})$ et exploiter la formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\,.$$

   (b) En faisant le changement de variable $x = \cos(\theta)$ dans l'intégrale, vérifier que

$$< T_n, T_m >_\omega = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}.$$

   Qu'en déduisez vous pour la famille des polynômes $\{T_k(x),\, k = 0, 1, \ldots, N\}$ dans E ?

   (c) Expliciter $T_5(x)$.

   (d) Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ de telle sorte que la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (x^5 - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

   soit minimale.