Deuxième partiel d'algèbre – Cycle préparatoire à distance 2009-2010

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2.
P et Q étant deux polynômes de E, on définit l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(P, Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

(où P', Q' et P'', Q'' représentent les dérivées premières et secondes des polynômes P et Q)

1. Vérifier que φ est bilinéaire symétrique.
2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que φ est un produit scalaire.
4. $\{1, X, X^2\}$ est-elle une base orthogonale pour φ ?
5. Trouver une base $\{P_0, P_1, P_2\}$ de E qui soit orthonormale pour φ avec $\deg P_i = i$

Exercice 2

Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice, dans la base canonique de E :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

En le justifiant, précisez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. f est injectif
2. $\mathrm{rang}(f) = 2$
3. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux et supplémentaires
4. f est diagonalisable
5. les sous-espaces propres de f sont orthogonaux
6. $\mathbf{A}$ est la matrice d'un produit scalaire dans E

Exercice 3

On mesure la longueur l d'un barreau métallique chauffé à la température θ sous la pression P. Les mesures conduisent à postuler que l'allongement est régi par une loi de la forme

$$l = (\alpha + \beta\sqrt{\theta})e^{-\gamma(P-P_0)}$$

où α, β etγ sont trois paramètres du modèle à estimer (pression de référence P_0 connue). On effectue m mesures $(\theta_k, P_k, l_k)_{k=1,m}$ de la longueur dans différentes conditions de température et de pression.

1. On suppose connue la valeur du paramètre γ. Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de α et β.
2. Caractériser alors la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.
3. Afin d'améliorer l'estimation, on ne suppose plus connue la valeur de γ. Supposons par contre qu'on dispose de diverses séries de mesures pour une température donnée et deux valeurs différentes pour la pression. Indiquer alors comment on pourrait réaliser une estimation du paramètre γ par une méthode de moindres-carrés linéaires ?

Exercice 4

Soit $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$. On considère le problème différentiel suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lrcll} \text{trouver} & u \in \mathrm{L}^2(a,b) & & & t.q. \\ & u'' + k_0^2\, u & = & f & \text{dans } \mathrm{L}^2(a,b) \\ & u(a) & = & u(b) = 0 & \end{array} \right.$$

On va chercher à approcher la solution de $(\mathcal{P})$ en la décomposant dans un sous-espace vectoriel particulier de $\mathrm{L}^2(a,b)$ ($\mathrm{L}^2(a,b)$ étant muni du produit scalaire usuel : $(f,g)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$).

1. Le but de cette première question est de caractériser les solutions particulières (fonctions propres et valeurs propres) $(\Phi, \lambda) \in \mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$ du problème

$$(\mathcal{P}(\lambda)) \left\{ \begin{array}{lrcll} \text{trouver} & \Phi \in \mathcal{C}^2(a,b) & & & t.q. \\ & -\Phi'' & = & \lambda\Phi & \\ & \Phi(a) & = & \Phi(b) = 0 & \end{array} \right. .$$

   – Vérifier que si $(\Phi, \lambda) \in \mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$ est solution du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$, alors

$$\|\Phi'\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; \lambda \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} \,.$$

   – En déduire que λ est nécessairement strictement positif, et que, dans ces conditions, les solutions particulières recherchées sont

$$\Phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-a)) \;, \quad \text{avec } \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \;, \quad k \in \mathbb{N}^* \,.$$

2. Montrer que pour deux fonctions u et v de $\mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$, vérifiant les conditions aux limites du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$, on a

$$(-u'', v)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; (u, -v'')_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;,$$

   et en déduire que les fonctions propres déterminées à la question précédente sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2(a,b)$.

3. Montrer que les fonctions Φ_k déterminées précédemment sont aussi solutions particulières du problème

$$(\mathcal{P}(\lambda)) \left\{ \begin{array}{lrcll} \text{trouver} & \Phi \in \mathcal{C}^2(a,b) & & & t.q. \\ & \Phi'' + k_0^2\, \Phi & = & \mu\Phi & \\ & \Phi(a) & = & \Phi(b) = 0 & \end{array} \right. ,$$

   et donner les valeurs propres μ_k associées.

4. Dans $\mathrm{L}^2(a,b)$, exprimer la projection orthogonale $\tilde{f}$ de f sur le sous-espace engendré par les N premières fonctions propres déterminées précédemment.

5. En écrivant formellement $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(a,b)$ comme combinaison linéaire de ces N premières solutions particulières

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Phi_k$$

   déterminer les relations que doivent vérifier les coefficients α_k, $k = 1, \ldots, N$, de telle sorte que

$$\tilde{u}'' + k_0^2\, \tilde{u} \;=\; \tilde{f} \,. \qquad (1)$$

6. Montrer que si $k_0^2 \neq \lambda_m$ pour tout $m \geq 1$, où $\{\lambda_m \;;\; m \geq 1\}$ désigne l'ensemble des valeurs propres déterminées à la question 1, alors la solution $\tilde{u}$ de l'équation (1) précédente est déterminée de manière unique.

7. Montrer que $\tilde{u}$ ainsi déterminée vérifie bien les conditions aux limites du problème $(\mathcal{P})$. Quelle approximation réalise $\tilde{u}$ par rapport à la solution du problème général $(\mathcal{P})$?

8. Montrer, par contre, que si $k_0^2 = \lambda_m$ pour un indice $m \geq 1$ donné, alors l'équation (1) admet une solution si et seulement si la donnée $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$ vérifie

$$(f, \Phi_m)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; 0$$

   où Φ_m désigne la fonction propre associée à la valeur propre λ_m.
   Vérifier enfin, dans ces conditions, que l'ensemble des solutions est une variété affine de dimension finie.