Exercice 1

Exercice 1

Soit la forme bilinéaire f définie sur :$E = \mathbb{R}^3$ par

$$f(X;Y) = xx' + 2yy' - yz' - zy' + 2xy' + 2yx'$$

1. Ecrire $f(X;Y)$ sous forme de produit matriciel en utilisant une matrice symétrique.
2. Ecrire la forme quadratique q associée à f .Décomposer $q(X)$ en somme algébrique de carrés en utilisant la méthode de Gauss.
3. f définit-elle un produit scalaire ?

Solution Exercice 1

$$f(X;Y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$q(X) = x^2 + 2y^2 - 2yz + 4xy = (x + 2y)^2 - 4(y + \frac{z}{4})^2 + z^2$$

q n'est pas définie positive , en effet :

$$q(-2;1;0) = -2$$

Donc f n'est pas un produit scalaire.

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le produit scalaire canonique , et le sous espace vectoriel :

$$E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \begin{pmatrix} x + y + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{pmatrix} \}$$

(a) Déterminer une base orthonormée de E.

(b) Quelle est la dimension de $E^{\perp}$, justifier avec soin .

(c) Déterminer une base orthonormée de $E^{\perp}$.

(d) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe E, dans la base canonique de $(\mathbb{R})^4$.

(e) Dans la base canonique,on considère le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Qu'elle est l'image de ce vecteur par cette symétrie. Donner ses coordonnées dans la base canonique .

(f) En déduire les coordonnées de $p(u)$ projeté orthogonal de u sur E dans base canonique .

Solution Exercice 2

Une base de E est :$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ En appliquant le procédé d'orthogonalisation de SCHMIDT, on trouve la base orthogonale suivante .$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Tout vecteur de $E^{\perp}$ est caractérisé par le fait qu'il soit orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de E.

Ainsi :

$$E^{\perp} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{pmatrix} x + y - 2t = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z = 0 \end{pmatrix}\}$$

Une base de $E^{\perp}$ est :$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ En appliquant le procédé d'orthogonalisation de SCHMIDT, on trouve la base orthogonale suivante .$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

En réunissant une base orthonormée de E et de $E^{\perp}$, on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.Soit :

$$B' = \{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Dans cette base, la matrice de s est :$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Si nous appelons P la matrice de passage de la base canonique à la base B', cette matrice s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est orthogonale (son inverse est donc sa transposée). La formule de changement de base permet d'écrire :$A = PDP^{-1}$, en appelant A la matrice de s dans la base canonique. On obtient le résultat suivant :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $A^2 = I$. Enfin, l'image du vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est :

$$s(u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Pour terminer il faut exprimer $p(u)$ en fonction de u et de $s(u)$.

$$p(u) = \frac{u + s(u)}{2}$$

d'où :$p(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$