Deuxième partiel d'algèbre – Cycle préparatoire à distance 2008-2009

Exercice 1

Soit la forme bilinéaire f définie sur :$E = \mathbb{R}^3$ par

$$f(X;Y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

1. Ecrire $f(X;Y)$ sous la forme $(X^T\mathbf{A}Y)$ dans lequel on explicitera la mtrice $\mathbf{A}$. A quoi est dû la symétrie de la matrice $\mathbf{A}$?
2. Ecrire la forme quadratique q associée à f. Décomposer $q(X)$ en somme algébrique de carrés en utilisant la méthode de Gauss.
3. Calculer $q(e_3) = f(e_3, e_3)$, où $e_3 = (0,0,1)^T$ est le troisième vecteur canonique de $\mathbb{R}^3$. Est-ce que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le produit scalaire canonique, et le sous espace vectoriel :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{pmatrix} x+y+t=0 \\ x-y+z=0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormée de E.
2. Quelle est la dimension de $E^{\perp}$, justifier avec soin .
3. Déterminer une base orthonormée de $E^{\perp}$.
4. Dans la base

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

   quelle est la matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la symétrie orthogonale d'axe E, et la matrice $\widetilde{\mathbf{B}}$ de la projection orthogonale sur E ?
5. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe E, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
6. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on considère le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Qu'elle est l'image $s(u)$ de ce vecteur par cette symétrie. Donner ses coordonnées dans la base canonique.

7. Donner les coordonnées de $p(u)$, projeté orthogonal de u sur E, dans la base canonique.

Exercice 3

On mesure la tension aux bornes d'un générateur de courant alternatif. Une série de mesures conduit à postuler que la tension U est régie par une loi de la forme

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

où U_0, ω et φ sont les trois paramètres à estimer du modèle. On effectue m mesures de la tension à divers instants : $(U_k, t_k)_{k=1,\ldots,m}$.

1. On suppose connu le paramètre U_0 (évalué de manière approchée directement à partir de l'amplitude maximale des observations, par exemple). Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de ω et φ.
2. Caractériser alors la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.
3. Quelle hypothèse particulière faudra-t'il imposer aux mesures $(U_k, t_k)_{k=1,\ldots,m}$ pour que la méthode d'estimation proposée puisse fonctionner.

Exercice 4

Les questions de cet exercice sont indépendantes.
Soit $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ \text{ t.q. } \int_0^1 \frac{f^2(t)}{t}\, dt \ < \ +\infty \right\}.$$

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$. On pourra se servir du fait que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$.
2. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ s'annulant en 0 et dérivable en 0 appartient à E. La réciproque est-elle vraie ?
3. On note :
$$\forall (f,g) \in E \times E, \ \ < f, g >= \int_0^1 \frac{f(t)\, g(t)}{t}\, dt\ .$$
Monter que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
Pour la stricte positivité, il suffira d'établir que nécéssairement f est nulle sur l'ouvert $]0,1[$, sachant qu'une intégrale ne dépend pas de la valeur aux bornes de l'intervalle (mais seulement du comportement de la fonction à l'intérieur de l'intervalle d'intégration).
4. Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ la famille orthonormée pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille de vecteurs de E formée des monômes $(x^n)_{n\geq 1}$. Expliciter, en particulier, P_1 et P_2.
Quelle est la meilleure approximation dans E de la fonction : $f(x) = x^3 + x^2$ par un élément du sous espace vectoriel engendré par P_1 et P_2 ?