Chapitre 3

Projecteurs et symétries – Optimisation

CORRIGÉS DES EXERCICES

3-1

3-2 Correction des exercices de la série 3-2

3-2.1 Exercice 7b

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Soit φ le produit scalaire défini par :

$$\varphi(P;Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

1. Déterminer un polynôme $P_1 = aX^2 + bX + c$ orthogonal à la famille :$\{1;X\}$.
   Il faut donc que : $\varphi(P_1;1) = 0$ et que $\varphi(P_1;X) = 0$,
   soit $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0$ et $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 0$.
   Ce qui correspond à $P_1 = a(6X^2 - 6X + 1)$ dans le quel on peut choisir $a = 1$

2. Ecrire A la matrice de f dans la base $\{1;X;P_1\}$.
   La matrice de f dans la base $\{1;X;P_1\}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. En déduire B la matrice de f dans la base canonique de E.
   $B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Déterminer alors le projeté orthogonal du polynôme $2X^2 + 3X + 4$.
   Il suffit de calculer le produit matriciel : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   C'est donc le polynôme $\frac{11}{3} + 5X$.

3-2.2 Exercice 8b – Moindres carrés pondérés

1. Pour cette première question, en posant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

le problème revient en fait à trouver un vecteur $\mathbf{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ tel que la norme au carré $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = E(x, y)$ soit minimale (où la norme est la norme euclidienne classique). L'existence de la solution est donnée par le théorème de projection orthogonale, cette solution étant caractérisée (dans le cas du produit scalaire canonique) par:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b},$$

ce qui revient à résoudre le système 2×2 symétrique suivant

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La solution est unique, car la matrice $\mathbf{A}$ est de rang 2 (les 2 colonnes sont linéairement indépendantes), et on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la représentation graphique, il s'agit de tracer dans le plan ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$) les 3 droites correspondant aux équations $(x + y = 0)$, $(x + 2y = 1)$, et $(2x + 3y = 2)$, ainsi que le point solution qui minimise donc la somme des distances au carré à chacune de ces 3 droites.

2. En posant cette fois-ci

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

on aboutit avec la même méthode que précédemment au système symétrique

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

qui a pour solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Sur le dessin, les 3 droites ne changent pas, car multiplier une équation affine par un scalaire ne change pas les solutions, mais par contre le nouveau point $\mathbf{x}$ est différent, et on peut remarquer qu'il s'est en fait rapproché de la première droite. En effet, on minimise cette fois

$$\widetilde{E}(x,y) = (2x+2y-0)^2+(x+2y-1)^2+(2x+3y-2)^2 = 4(x+y-0)^2+(x+2y-1)^2+(2x+3y-2)^2 \,,$$

ce qui revient à mettre un poids de 4 sur la première des 3 distances au carré considérées initialement, c'est à dire à imposer qu'elle soit plus petite que les autres dans la minimisation.

3. On cherche à minimiser maintenant

$$E_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\mathbf{W}}^2 \,,$$

où $\mathbf{W} = \mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ et, pour tout vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^m$,

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{W}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i y_i^2 \,.$$

Cette norme est en fait une norme euclidienne dans $\mathbb{R}^m$, associée au produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i y_i \,,$$

et on peut alors raisonner géométriquement comme dans le cas des autres exercices. Le produit scalaire a changé, mais les propriétés intrinsèques restent les mêmes, à savoir que le problème revient à trouver un vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ appartenant donc à $Im(\mathbf{A})$ qui soit le plus proche du vecteur $\mathbf{b}$ en norme $\|\cdot\|_{\mathbf{W}}$. Il s'agit donc d'une projection $\mathbf{W}$-*orthogonale* sur $Im(\mathbf{A})$, et le théorème de projection orthogonale assure l'existence et l'unicité du projeté $\mathbf{y}$ de $\mathbf{b}$ sur $Im(\mathbf{A})$.

La propriété géométrique qui caractérise cette projection orthogonale est que $(\mathbf{y}-\mathbf{b})$ soit orthogonal au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$ à l'espace $Im(\mathbf{A})$, c'est à dire que:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \,, \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{b} \rangle_{\mathbf{W}} = 0 \,.$$

Ceci peut se re-écrire algébriquement sous la forme

$$\mathbf{z}^T\mathbf{A}^T\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 \,,$$

puisque $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, et comme cette égalité doit être vérifiée quelque soit le vecteur $\mathbf{z}$, on en conclut que $\mathbf{x}$ doit vérifier l'égalité suivante

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{b} \,.$$

Là encore, la solution de ce système sera unique si et seulement si $\mathbf{A}$ est de rang maximal égal à n, car la matrice $(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})$ est alors symétrique définie positive.

La symétrie de $(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})$ est triviale, sa positivité résulte du fait que $\mathbf{z}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})\mathbf{z} = \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}}^2 \geq 0$, ceci quelque soit le vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, et pour finir $\mathbf{z}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})\mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{z} = \vec{0}$, ce qui équivaut à $\mathbf{z} = \vec{0}$ sous réserve que $\mathbf{A}$ soit de rang n, c'est à dire que ses n colonnes soient linéairement indépendantes.

3-2.3 Exercice 9b – Décomposition spectrale

1. Comme ϕ est solution du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$, on a:

$$\lambda \|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_a^b \lambda \phi^2(x)\,dx = \int_a^b -\phi''(x)\phi(x)\,dx\,,$$

puis une petite intégration par parties nous donne l'égalité

$$\lambda \|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \left[-\phi'(x)\phi(x)\right]_a^b + \int_a^b (\phi'(x))^2\,dx\,,$$

dans laquelle la partie principale est nulle puisque $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = 0$, d'où l'égalité demandée:

$$\lambda \|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)}\,.$$

Le fait que $\lambda \geq 0$ découle trivialement de cette égalité. λ ne peut pas être nul car sinon, on aurait $\|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$, ce qui équivaut à $\phi'(x) = 0$ sur $[a,b]$, et donc $\phi(x) = Cste$ sur $[a,b]$ et cette constante est nécéssairement nulle à cause des conditions aux limites. Par conséquent il n'y a pas de fonction propre (une fonction propre est nécéssairement un vecteur non nul de $\mathrm{L}^2(a,b)$) associée à la valeur propre nulle.

Enfin, la résolution de l'équation différentielle ordinaire qui en découle, avec $\lambda > 0$ et en tenant compte des conditions aux limites, nous donne naturellement les solutions particulières énoncées dans l'exercice, à savoir:

$$\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-a))\,, \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}\,, \quad k \in \mathbb{N}^*\,.$$

2. Deux intégrations par parties successives nous permettent d'écrire:

$$\begin{aligned}
(-u'', v)_{\mathrm{L}^2(a,b)} &= \int_a^b -u''(x)\,v(x)\,dx \\
&= u'(a)v(a) - u'(b)v(b) + \int_a^b u'(x)\,v'(x)\,dx \\
&= u(b)v'(b) - u(a)v'(a) - \int_a^b u(x)\,v''(x)\,dx \\
&= (u, -v'')_{\mathrm{L}^2(a,b)}\,,
\end{aligned}$$

avec les parties principales qui sont nulles puisque $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$. Les fonctions propres ϕ_k vérifiant $-\phi_k'' = \lambda_k\phi_k$, l'égalité précédente appliquée à deux fonctions propres associées à deux valeurs propres différentes nous donne:

$$\begin{aligned}
\lambda_k(\phi_k, \phi_j)_{\mathrm{L}^2(a,b)} &= (-\phi_k'', \phi_j)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \\
&= (\phi_k, -\phi_j'')_{\mathrm{L}^2(a,b)} \\
&= \lambda_j(\phi_k, \phi_j)_{\mathrm{L}^2(a,b)}\,,
\end{aligned}$$

et donc, comme $\lambda_k \neq \lambda_j$ pour deux fonctions propres différentes déterminées précédemment, on a nécéssairement $(\phi_k, \phi_j)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$.

3. Le fait de disposer d'une famille orthogonale permet d'exprimer très facilement la projection orthogonale de f sur le sous-espace $\mathit{Vect}\,\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$, car la matrice du système de Gram associé est diagonale. En fait, on fait pareil que dans l'exercice 9a, à savoir que on introduit $V_N \subset \mathrm{L}^2(a,b)$ le sous-espace vectoriel engendré par les N premières fonctions propres, $V_N = \mathit{Vect}\,\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ (de dimension N), et soit $E = V_N + \mathit{Vect}\{f\}$ le sous espace de $\mathrm{L}^2(a,b)$ constitué l'espace V_N complété par la droite vectorielle engendrée par le vecteur f. E est de manière évidente un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(a,b)$ de dimension finie ($\dim E \leq N+1$), et E muni du produit scalaire de $\mathrm{L}^2(a,b)$ est un espace euclidien. Le théorème de projection orthogonale dans l'espace euclidien E de f sur V_N assure l'existence d'un vecteur $\tilde{f} \in V_N$ qui minimise la distance de f à tout élément de V_N, c'est à dire que $\tilde{f}$ est la meilleure approximation de f sur V_N.

   De plus, la famille $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ est une famille orthogonale donc libre dans V_N, et elle constitue donc d'une famille libre et génératrice dans V_N de dimension N. Par conséquent la famille $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ est une base orthogonale de V_N. En exprimant formellement $\tilde{f} \in V_N$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base:

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \phi_k \,,$$

   le corollaire 3-1.1 page 39 (section 3-1 – projecteurs et symétries) nous indique que les coefficients β_k sont les composantes de la solution du système de Gram:

$$\mathbf{G}\beta = \mathbf{b} \,,$$

   avec

$$\begin{array}{l} \mathbf{G} = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad g_{ij} = (\phi_j, \phi_i)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \\ \mathbf{b} = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad b_i = (f, \phi_i)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \,, \end{array}$$

   et où la matrice $\mathbf{G}$, constituée des produits scalaires des vecteurs de base 2 à 2, est diagonale puisque la base considérée est orthogonale. On en déduit donc l'expression des coefficients du développement de $\tilde{f}$ dans la base orthogonale $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ de V_N:

$$\beta_k = \frac{(f, \phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)}}{(\phi_k, \phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)}} \,, \quad 1 \leq k \leq N \,,$$

   et la meilleure approximation de f dans V_N est donc donnée par la combinaison linéaire:

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(f, \phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)}}{\|\phi_k\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)}} \phi_k \,,$$

   ou encore (vu que $\|\phi_k\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \frac{(b-a)}{2}$ quel que soit k)

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{2}{(b-a)} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{(b-a)} \right) dx \right] \times \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{(b-a)} \right) .$$

4. Le gros intérêt d'une famille de fonctions propres c'est que l'espace $\mathsf{Vect}\,\{\phi_1,\ldots,\phi_N\}$ est invariant par application de l'opérateur différentiel considéré. Développons $-\tilde{u}''$ en fonction des ϕ_k et des λ_k:

$$-\tilde{u}'' \;=\; -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\,\phi_k'' \;=\; \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \lambda_k\,\phi_k\,,$$

et comme le développement dans la base $\{\phi_1,\ldots,\phi_N\}$ de V_N est unique, l'égalité $(-\tilde{u}'' = \tilde{f})$ impose nécéssairement que $(\alpha_k \lambda_k \;=\; \beta_k)$, $1 \leq k \leq N$, c'est à dire que

$$\alpha_k \;=\; \frac{(f,\phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)}}{\lambda_k\,\|\phi_k\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)}} \;=\; \frac{2(b-a)}{k^2\pi^2}(f,\phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)}\;,\quad 1 \leq k \leq N\,.$$

5. Si on suppose que la solution u du problème général $(\mathcal{P})$ existe bien, on peut alors vérifier que

$$(u-\tilde{u},\phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; 0\;,\quad 1 \leq k \leq N\,.$$

En effet, $(u-\tilde{u})$ vérifie les conditions aux limites et on a donc

$$\begin{aligned}
\lambda_k\,(\phi_k, u-\tilde{u})_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;&=\; (-\phi_k'', u-\tilde{u})_{\mathrm{L}^2(a,b)}\\
&=\; (\phi_k, -(u''-\tilde{u}''))_{\mathrm{L}^2(a,b)}\\
&=\; (\phi_k, f-\tilde{f})_{\mathrm{L}^2(a,b)}\;,
\end{aligned}$$

puisque $(-u'' + \tilde{u}'' = f - \tilde{f})$, et comme

$$(\phi_k, f-\tilde{f})_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; 0\;,\quad 1 \leq k \leq N\,.$$

vu que $\tilde{f}$ est la projection orthogonale de f sur $V_N = \mathsf{Vect}\,\{\phi_1,\ldots,\phi_N\}$, on en conclut que

$$(\phi_k, u-\tilde{u})_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; 0\;,\quad 1 \leq k \leq N\,.$$

Ceci caractérise le fait que $\tilde{u}$ est la meilleure aproximation (i.e. projection orthogonale) de la solution sur l'espace $\mathsf{Vect}\,\{\phi_1,\ldots,\phi_N\}$.

Conclusions : Ainsi, sans connaître explicitement la solution de notre problème différentiel $(\mathcal{P})$, on a été capable de déterminer la meilleure approximation de cette solution (au sens de la norme sur l'espace $\mathrm{L}^2(a,b)$) par simple décomposition du terme source f dans une famille orthogonale de fonctions propres associées au problème $(\mathcal{P})$. C'est tout l'intérêt de cette technique, appelée *décomposition spectrale*, qui en plus ne demande que des calculs terme à terme par produit scalaire avec les fonctions propres considérées (puisqu'elles forment de manière naturelle une base orthogonale).

Evidemment, la clé de la méthode c'est de déterminer analytiquement ces fameuses fonctions propres, et le fait de pouvoir le faire ou pas dépendra de la complexité des équations et des conditions aux limites dans le problème $(\mathcal{P})$ considéré.