Chapitre 1

Espaces euclidiens

CORRIGÉS DES EXERCICES

1-2 Correction des exercices de la série 1-2

1-2.1 Exercice 1b - Produit scalaire

1. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates : quels que soient les polynômes P, Q, R de E et le réel a, on a :
$$\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(x)Q(x)dx=\int_0^1 Q(x)P(x)dx=\varphi(Q,P)$$
De plus
$$\varphi(P+aR,Q)=\int_0^1 (P(x)+aR(x))Q(x)dx=\int_0^1 P(x)Q(x)dx+a\int_0^1 R(x)Q(x)dx$$
Donc
$$\varphi(P+aR,Q)=\varphi(P,Q)+a\varphi(R,Q)$$
φ est aussi définie positive, en effet :
$$\varphi(P,P)=\int_0^1 (P(x))^2dx \ \text{ donc } \ \varphi(P,P)\geq 0$$
De plus : $\int_0^1 P(x)P(x)dx=0$ implique d'après le rappel : $P=0$.
Donc $\varphi(P,P)=0$ implique : $P=0$.
φ est donc un produit scalaire.

2. Soit G le sous espace vectoriel de E défini par :
$$G=\{P\in E, P=aX^2+2aX+b,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$$
Une base de G est $\{X^2+2X,1\}$
$G^\perp$ est donc l'ensemble des polynômes orthogonaux à X^2+2X et à 1.
Soit $P=\alpha X^2+\beta X+\gamma$ un élément de G.
P doit vérifier $\varphi(P,X^2+2X)=0$ et $\varphi(P,1)=0$ soit :
$\int_0^1(\alpha X^2+\beta X+\gamma)(X^2+2X)dx=0$ et $\int_0^1(\alpha X^2+\beta X+\gamma)\times 1dx=0$
ce qui conduit aux conditions :
$$\frac{7}{10}\alpha+\frac{11}{12}\beta+\frac{4}{3}\gamma=0$$
et
$$\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\gamma=0$$
Ce qui équivaut à :
$$\gamma=\frac{-8\beta}{46} \ \text{ et } \ \alpha=\frac{-45\beta}{46}$$
Finalement
$$G^\perp=\left\{P\in E, P=-\frac{45\beta}{46}X^2+\beta X-\frac{8\beta}{46},\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

3. Une base de $G^{\perp}$ est $\left\{-\frac{45}{46}X^2+X-\frac{8}{46}\right\}$ On vérifie que la réunion d'une base de G et de $G^{\perp}$ est une base de E ce qui traduit : $G \oplus G^{\perp} = E$. La famille obtenue est :
$$\left\{-\frac{45}{46}X^2+X-\frac{8}{46}\ ,\ X^2+2X\ ,\ 1\right\}$$
qui est bien une base de E

1-2.2 Exercice 2b - Orthogonalisation

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$ sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.(On peut vérifier aussi que $\mathbf{AA}^T = I$)

   Soit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
Les vecteurs colonnes de $\mathbf{B}$ sont orthogonaux et de norme $\sqrt{5}$. Cette matrice n'est donc pas orthogonale. (On peut vérifier aussi que $\mathbf{BB}^T \neq I$)

   Soit $\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Les vecteurs colonnes de $\mathbf{C}$ sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

2. Les vecteurs colonnes de $2\mathbf{A}$ sont orthogonaux et de norme $2\sqrt{5}$. Cette matrice n'est donc pas orthogonale.
Les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ ne sont pas orthogonaux. Cette matrice n'est donc pas orthogonale.

   On peut conclure, dès à présent, que $(H,+,.)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par combinaisons linéaires.

   Les vecteurs colonnes de $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{B}$ sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

   Un calcul simple donne : $\mathbf{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Les vecteurs colonnes de cette matrice sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

3. Montrer que le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.
Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices orthogonales, alors :
$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{BB}^T = \mathbf{I}$$

or

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

d'où :

$$\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AIA}^T = \mathbf{I}$$

Donc la matrice **AB** est bien orthogonale.

4. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si :

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

et

$$ac + bd = 0$$

Or $a^2 + b^2 = 1$ équivaut à : Il existe un réel α tel que $b = \sin\alpha$ et $a = \cos\alpha$
et $c^2 + d^2 = 1$ équivaut à : Il existe un réel α' tel que $d = \sin\alpha'$ et $c = \cos\alpha'$
Comme $ac + bd = 0$ il s'ensuit que :

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\sin\alpha = 0$$

soit

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 0$$

Deux cas possibles :

(a) $\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne la matrice : $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(b) $\alpha' - \alpha = -\frac{\pi}{2}$ ce qui donne la matrice : $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

1-2.3 Exercice 3b - Produit scalaire

1. Montrons que quelles que soient les matrices **A** et **B** et quel que soit le réel λ :

$$\mathit{trace}(A + B) = \mathit{trace}(A) + \mathit{trace}(B)$$

et

$$\mathit{trace}(\lambda A) = \lambda\mathit{trace}(A)$$

On a :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathit{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a_{1,1}+b_{1,1}+a_{2,2}+b_{2,2} = a_{1,1}+a_{2,2}+b_{1,1}+b_{2,2} = \mathit{trace}(\mathbf{A})+\mathit{trace}(\mathbf{B})$$

De même

$$\mathit{trace}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda a_{1,1} + \lambda a_{2,2} = \lambda(a_{1,1} + a_{2,2}) = \lambda \mathit{trace}(\mathbf{A})$$

On en déduit que l'application *trace* de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mathit{trace} : \mathbf{M} \mapsto \mathit{trace}(\mathbf{M})$$

est une application linéaire. Son noyau est l'ensemble des matrices $\mathbf{A}$ qui vérifient : $\mathit{trace}(\mathbf{A}) = 0$ soit :

$$a_{1,1} + a_{2,2} = 0$$

C'est donc l'ensemble des matrices de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & -a_{1,1} \end{pmatrix}$$

2. Soient deux matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ de E, En utilisant le produit de matrices, on peut écrire:

$$\mathit{trace}(\mathbf{NM}) = n_{1,1}m_{1,1} + n_{1,2}m_{2,1} + n_{2,1}m_{1,2} + n_{2,2}m_{2,2}$$
$$\mathit{trace}(\mathbf{MN}) = m_{1,1}n_{1,1} + m_{1,2}n_{2,1} + m_{2,1}n_{1,2} + m_{2,2}n_{2,2}$$

Donc

$$\mathit{trace}(\mathbf{NM}) = \mathit{trace}(\mathbf{MN})$$

Supposons que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ soient deux matrices semblables. Il existe une matrice de passage $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{A}'$$

D'après ce qui précède :

$$\mathit{trace}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \mathit{trace}((\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{P}) = \mathit{trace}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})) = \mathit{trace}(\mathbf{IA}) = \mathit{trace}\mathbf{A}$$

Donc : $\mathit{trace}(\mathbf{A}') = \mathit{trace}(\mathbf{A})$

3. On a :

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathit{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} a_{i,j}b_{i,j} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}$$

4. φ est un produit scalaire sur E. Cela résulte des propriétés de linéarité de la transposition des matrices et des propriétés précédemment démontrées :

$$\varphi(\mathbf{A}+\mathbf{A}',\mathbf{B}) = \mathit{trace}((\mathbf{A}+\mathbf{A}')^T\mathbf{B}) = \mathit{trace}((\mathbf{A}^T + \mathbf{A}'^T)\mathbf{B})$$
$$= \mathit{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{B} + \mathbf{A}'^T\mathbf{B}) = \mathit{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) + \mathit{trace}(\mathbf{A}'^T\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{A},\mathbf{B}) + \varphi(\mathbf{A}',\mathbf{B})$$

Comme :

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathsf{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathsf{trace}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \mathsf{trace}((\mathbf{B}\mathbf{A}^T))^T = \mathsf{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \varphi(\mathbf{B},\mathbf{A})$$

Il ne reste plus qu'à voir que φ est définie positive :

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2$$

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{A}) = 0$$

équivaut à

$$\sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} a_{i,j}^2 = 0$$

cette somme de termes positifs est nulle donc chaque terme est nul donc :

$$\forall i,\ \forall j,\ a_{i,j} = 0$$

et donc $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

5. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $F^\perp$. On doit avoir :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a+c+d = 0 \\ a+d = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a+d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $F^\perp$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$