

Chapitre 1

Espaces euclidiens

CORRIGÉS DES EXERCICES

1-2 Correction des exercices de la série 1-2

1-2.1 Exercice 1b - Produit scalaire

1. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates : quels que soient les polynômes P , Q , R de E et le réel a , on a :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx = \int_0^1 Q(x)P(x)dx = \varphi(Q, P)$$

De plus

$$\varphi(P + aR, Q) = \int_0^1 (P(x) + aR(x))Q(x)dx = \int_0^1 P(x)Q(x)dx + a \int_0^1 R(x)Q(x)dx$$

Donc

$$\varphi(P + aR, Q) = \varphi(P, Q) + a\varphi(R, Q)$$

φ est aussi définie positive, en effet :

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 (P(x))^2 dx \text{ donc } \varphi(P, P) \geq 0$$

De plus : $\int_0^1 P(x)P(x)dx = 0$ implique d'après le rappel : $P = 0$.

Donc $\varphi(P, P) = 0$ implique : $P = 0$.

φ est donc un produit scalaire.

2. Soit G le sous espace vectoriel de E défini par :

$$G = \{P \in E, P = aX^2 + 2aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Une base de G est $\{X^2 + 2X, 1\}$

G^\perp est donc l'ensemble des polynômes orthogonaux à $X^2 + 2X$ et à 1.

Soit $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ un élément de G . orthogonal

P doit vérifier $\varphi(P, X^2 + 2X) = 0$ et $\varphi(P, 1) = 0$ soit :

$$\int_0^1 (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)(X^2 + 2X)dx = 0 \text{ et } \int_0^1 (\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \times 1dx = 0$$

ce qui conduit aux conditions :

$$\frac{7}{10}\alpha + \frac{11}{12}\beta + \frac{4}{3}\gamma = 0$$

et

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$\gamma = \frac{-8\beta}{46} \text{ et } \alpha = \frac{-45\beta}{46}$$

Finalement

$$G^\perp = \left\{ P \in E, P = -\frac{45\beta}{46}X^2 + \beta X - \frac{8\beta}{46}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Une base de G^\perp est $\left\{-\frac{45}{46}X^2 + X - \frac{8}{46}\right\}$. On vérifie que la réunion d'une base de G et de G^\perp est une base de E ce qui traduit : $G \oplus G^\perp = E$. La famille obtenue est :

$$\left\{-\frac{45}{46}X^2 + X - \frac{8}{46}, X^2 + 2X, 1\right\}$$

qui est bien une base de E

1-2.2 Exercice 2b - Orthogonalisation

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes de \mathbf{A} sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale. (On peut vérifier aussi que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$)

Soit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes de \mathbf{B} sont orthogonaux et de norme $\sqrt{5}$. Cette matrice n'est donc pas orthogonale. (On peut vérifier aussi que $\mathbf{B}\mathbf{B}^T \neq \mathbf{I}$)

Soit $\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes de \mathbf{C} sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

2. Les vecteurs colonnes de $2\mathbf{A}$ sont orthogonaux et de norme $2\sqrt{5}$. Cette matrice n'est donc pas orthogonale.
Les vecteurs colonnes de $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ ne sont pas orthogonaux. Cette matrice n'est donc pas orthogonale.

On peut conclure, dès à présent, que $(H, +, \cdot)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Les vecteurs colonnes de $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{B}$ sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

Un calcul simple donne : $\mathbf{A}\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes de cette matrice sont orthogonaux et de norme 1. Cette matrice est donc orthogonale.

3. Montrer que le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.
Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices orthogonales, alors :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$$

or

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

d'où :

$$\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{AIA}^T = \mathbf{I}$$

Donc la matrice \mathbf{AB} est bien orthogonale.

4. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si :

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

et

$$ac + bd = 0$$

Or $a^2 + b^2 = 1$ équivaut à : Il existe un réel α tel que $b = \sin \alpha$ et $a = \cos \alpha$
 et $c^2 + d^2 = 1$ équivaut à : Il existe un réel α' tel que $d = \sin \alpha'$ et $c = \cos \alpha'$
 Comme $ac + bd = 0$ il s'ensuit que :

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \sin \alpha = 0$$

soit

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 0$$

Deux cas possibles :

(a) $\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne la matrice : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

(b) $\alpha' - \alpha = -\frac{\pi}{2}$ ce qui donne la matrice : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$

1-2.3 Exercice 3b - Produit scalaire

1. Montrons que quelles que soient les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} et quel que soit le réel λ :

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$$

et

$$\text{trace}(\lambda A) = \lambda \text{trace}(A)$$

On a :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\text{trace}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a_{1,1} + b_{1,1} + a_{2,2} + b_{2,2} = a_{1,1} + a_{2,2} + b_{1,1} + b_{2,2} = \text{trace}(\mathbf{A}) + \text{trace}(\mathbf{B})$$

De même

$$\text{trace}(\lambda \mathbf{A}) = \lambda a_{1,1} + \lambda a_{2,2} = \lambda(a_{1,1} + a_{2,2}) = \lambda \text{trace}(\mathbf{A})$$

On en déduit que l'application trace de E dans \mathbb{R} par :

$$\text{trace} : \mathbf{M} \mapsto \text{trace}(\mathbf{M})$$

est une application linéaire. Son noyau est l'ensemble des matrices \mathbf{A} qui vérifient : $\text{trace}(\mathbf{A}) = 0$ soit :

$$a_{1,1} + a_{2,2} = 0$$

C'est donc l'ensemble des matrices de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & -a_{1,1} \end{pmatrix}$$

2. Soient deux matrices \mathbf{M} et \mathbf{N} de E , En utilisant le produit de matrices, on peut écrire:

$$\text{trace}(\mathbf{NM}) = n_{1,1}m_{1,1} + n_{1,2}m_{2,1} + n_{2,1}m_{1,2} + n_{2,2}m_{2,2}$$

$$\text{trace}(\mathbf{MN}) = m_{1,1}n_{1,1} + m_{1,2}n_{2,1} + m_{2,1}n_{1,2} + m_{2,2}n_{2,2}$$

Donc

$$\text{trace}(\mathbf{NM}) = \text{trace}(\mathbf{MN})$$

Supposons que \mathbf{A} et \mathbf{A}' soient deux matrices semblables. Il existe une matrice de passage \mathbf{P} telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}'$$

D'après ce qui précède :

$$\text{trace}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{trace}((\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{P}) = \text{trace}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})) = \text{trace}(\mathbf{IA}) = \text{trace}\mathbf{A}$$

Donc : $\text{trace}(\mathbf{A}') = \text{trace}(\mathbf{A})$

3. On a :

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} a_{i,j} b_{i,j} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}$$

4. φ est un produit scalaire sur E . Cela résulte des propriétés de linéarité de la transposition des matrices et des propriétés précédemment démontrées :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A} + \mathbf{A}', \mathbf{B}) &= \text{trace}((\mathbf{A} + \mathbf{A}')^T \mathbf{B}) = \text{trace}((\mathbf{A}^T + \mathbf{A}'^T) \mathbf{B}) \\ &= \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}'^T \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) + \text{trace}(\mathbf{A}'^T \mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \varphi(\mathbf{A}', \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T) = \text{trace}((\mathbf{B} \mathbf{A}^T)^T) = \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{A})$$

Il ne reste plus qu'à voir que φ est définie positive :

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2$$

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0$$

équivalent à

$$\sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} a_{i,j}^2 = 0$$

cette somme de termes positifs est nulle donc chaque terme est nul donc :

$$\forall i, \forall j, a_{i,j} = 0$$

et donc $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

5. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de F^\perp . On doit avoir :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc F^\perp est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$