ALGÈBRE LINÉAIRE
Module 2
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

December 11, 2008

Table des Matières

1 Espaces euclidiens **1**
1-1 Exercices corrigés . . . 3
1-1.1 Exercice 1a - Produit scalaire . . . 3
1-1.2 Exercice 2a. Orthogonalisation. . . . 4
1-1.3 Exercice 3a - Matrices orthogonales . . . 6
1-2 Exercices avec indications seulement . . . 8
1-2.1 Exercice 1b - Produit scalaire . . . 8
1-2.2 Exercice 2b - Orthogonalité . . . 8
1-2.3 Exercice 3b - Produit scalaire . . . 9
1-3 Devoir à rendre . . . 11
1-3.1 Exercice 1c - Produit scalaire . . . 11
1-3.2 Exercice 2c - Orthogonalité . . . 11
1-3.3 Exercice 3c - Produit scalaire . . . 12

2 Formes bilinéaires et quadratiques **13**
2-1 Exercices corrigés . . . 15
2-1.1 Exercice 4a – Formes bilinéaires et quadratiques . . . 15
2-1.2 Exercice 5a – Réduction en somme de carrés . . . 19
2-1.3 Exercice 6a – Forme quadratique . . . 20
2-2 Exercices avec indications seulement . . . 23
2-2.1 Exercice 4b – Forme quadratique . . . 23
2-2.2 Exercice 5b – Forme quadratique . . . 23
2-2.3 Exercice 6b – Diagonalisation des endomorphismes symétriques . 24
2-3 Devoir à rendre . . . 25
2-3.1 Exercice 4c – Forme bilinéaire . . . 25
2-3.2 Exercice 5c – Forme quadratique . . . 25
2-3.3 Exercice 6c – Diagonalisation des endomorphismes symétriques . . . 26

3 Projecteurs, symétries – Optimisation **27**
3-1 Exercices corrigés . . . 29
3-1.1 Exercice 7a – Projection orthogonale . . . 29
3-1.2 Exercice 8a . . . 29
3-1.3 Exercice 9a . . . 29

3-2 Exercices avec indications seulement 31
- 3-2.1 Exercice 7b 31
- 3-2.2 Exercice 8b 31
- 3-2.3 Exercice 9b 31

3-3 Devoir à rendre 33
- 3-3.1 Exercice 7c 33
- 3-3.2 Exercice 5c 33
- 3-3.3 Exercice 6c 33

Chapitre 1

Espaces euclidiens

1-1 Exercices corrigés

1-1.1 Exercice 1a - Produit scalaire

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit φ l'application définie de E^2 dans de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire E.
2. Déterminer un sous espace vectoriel G de E tel que

$$\forall P \in G,\ \varphi(P, X^2 + X) = 0$$

3. Déterminer une base de ce sous espace et vérifier l'unicité de ce sous espace.

Corrigé

1. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates :
quels que soient les polynômes P, Q, R et le réel a.

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) = Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + Q(2)P(2)$$

donc

$$\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$$

De plus

$$\varphi(P + aR, Q) = (P + aR)(0)Q(0) + (P + aR)(1)Q(1) + (P + aR)(2)Q(2)$$
$$= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + a(R(0)Q(0) + R(1)Q(1) + R(2)Q(2))$$
$$= \varphi(P,Q) + a\varphi(R,Q)$$

φ est aussi définie positive, en effet :

$$\varphi(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$$

De plus si

$$\varphi(P,P) = 0$$

alors

$$P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$$

P est donc un polynôme de degré au plus égal à 2 ayant trois racines distinctes 1, 2, et 3 c'est donc le polynôme nul.
φ est donc un produit scalaire.

2. G est le sous espace vectoriel orthogonal à $X+X^2$
   Soit P un polynôme de E : $P = aX^2 + bX + c$,
   $\varphi(P, X^2+X) = 0$ équivaut à $2(a+b+c) + 6(4a+2b+c) = 0$
   soit $26a + 14b + 8c = 0$
   d'où : $c = \dfrac{-13a-7b}{4}$
   Les polynômes de G sont de la forme :
$$P = aX^2 + bX + \frac{-13a-7b}{4}$$

3. En décomposant selon a et b, tout polynôme de G s'écrit :
$$P = a\left(X^2 - \frac{13}{4}\right) + b\left(X - \frac{7}{4}\right)$$
   Une base de G est donc :
$$\left\{X^2 - \frac{13}{4}, X - \frac{7}{4}\right\}$$

1-1.2 Exercice 2a. Orthogonalisation.

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

Soit F une partie de $\mathbb{R}^3$. On note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F .

1. Montrer que $F^\perp$ est un espace vectoriel. Remarquer que ce résultat est vrai même si F n'est pas un espace vectoriel .

2. Soit $F = \mathit{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

   Montrer que $F^\perp \oplus F = \mathbb{R}^3$

3. Montrer que toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre .

Démontrez le pour une famille de deux vecteurs, de 3 vecteurs puis généraliser.

Corrigé

1. Soit F une partie de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0\}$

- $F^\perp$ est non vide car $\mathbf{0} \in F^\perp$, en effet $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0$

- Montrons que $F^\perp$ est stable par combinaisons linéaires .

$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{u}') \in \left(F^{\perp}\right)^2 : (\lambda\mathbf{u} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} = 0$
Donc $(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{u}') \perp \mathbf{v}$ et $\lambda\mathbf{u} + \mathbf{u}' \in F^{\perp}$.
On en déduit que $F^{\perp}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2. Application : Soit $F = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. et $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\mathbf{u} \in F^{\perp} \Leftrightarrow x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - 2y$$

Donc

$$F^{\perp} = \left\{\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

La famille $\left\{\mathbf{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$génère $F^{\perp}$, elle est libre
C'est donc une base de $F^{\perp}$.
Appliquons le procédé d'orthogonalisation .
On pose : $\mathbf{u}_1$= $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + a\mathbf{v}$, Cherchons a pour que $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_1$ soient orthogonaux.

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1^2 + a\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \boxed{1/a =} \frac{-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Une base orthogonale de $F^{\perp}$ est : $\left\{\mathbf{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
En la normant on obtient : $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
$\forall\mathbf{u} \in F^{\perp}\cap F$, $\mathbf{u}\perp\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ donc $F^{\perp}\cap F = \{\mathbf{0}\}$.
De plus comme $\dim F = 1$ et $\dim F^{\perp} = 2$ on obtient : $F^{\perp}\oplus F = \mathbb{R}^3$.

3. Soit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ une famille de vecteurs non nuls orthogonaux .

Supposons qu'il existe n réels $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n = 0$.
En multipliant scalairement par $\mathbf{u}_k$ on obtient $a_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 0$ d' où $a_k = 0$.
Ainsi la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ est libre .

1-1.3 Exercice 3a - Matrices orthogonales

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Appelons $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ les vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{A}$.

1. On veut déterminer une famille orthogonale de trois vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ dont les coordonnées seront les colonnes de la matrice $\mathbf{B}$.
   Déterminer les réels a, b, c tels que :
   $$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$
   $$\mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2$$
   $$\mathbf{v}_3 = b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$$
   En déduire une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ vérifie : $\mathbf{AT} = \mathbf{B}$
2. Déterminer une matrice diagonale $\mathbf{D}$ vérifiant : $\mathbf{BD}$ est une matrice orthogonale.
3. Déterminer l'inverse des matrices $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, et en déduire l'inverse de la matrice $\mathbf{A}$.

Corrigé

1. La matrice cherchée est de la forme : $\mathbf{B} = \mathbf{AT}_1\mathbf{T}_2$ avec $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$
   $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Les colonnes de la matrice $\mathbf{AT}_1$ sont les coordonnées des vecteurs :
   $$\{\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$
   Les colonnes de la matrice $\mathbf{AT}_1\mathbf{T}_2$ sont les coordonnées des vecteurs :
   $$\{\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2, b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3\}$$
   $$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b+ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Calcul de a :
     $$\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow a(\mathbf{v}_1)^2 + \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{u_1 \bullet \mathbf{u}_2}{(\mathbf{v}_1)^2} = \frac{-3}{2}$$
     d'où
     $$\mathbf{v}_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

- Calcul de b :

$$\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow b(\mathbf{v}_1)^2 + \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_3 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_3}{(\mathbf{v}_1)^2} = \frac{-1}{2}$$

- Calcul de c :

$$\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow b(\mathbf{v}_2)^2 + \mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_3 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_3}{(\mathbf{v}_2)^2} = \frac{-5}{3}$$

d'où

$$\mathbf{v}_3 \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Finalement : $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Il reste à diviser chaque vecteur $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ par sa norme ce qui revient à multiplier la matrice $\mathbf{B}$ par une matrice diagonale $\mathbf{D}$ dont les termes diagonaux sont les inverses des normes des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1\|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|v_2\|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|v_3\|} \end{pmatrix}$
   On obtient finalement :

$$\mathbf{ATD} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3. La matrice $\mathbf{C} = \mathbf{ATD}$ est orthogonale, son inverse est sa transposée : $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^\top$.
   Donc : $\mathbf{I} = \mathbf{ATDC}^T$
   et donc

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{TDC}^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$$

   Finalement

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-2 Exercices avec indications seulement

1-2.1 Exercice 1b - Produit scalaire

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On appelle φ l'application définie de E^2 dans de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire. E.

   On rappelle le résultat suivant : Si est une application continue positive sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f = 0$.

2. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel G de E défini par :

$$G = \{P \in E, P = aX^2 + 2aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. Déterminer une base de ce sous espace et vérifer que $G \oplus G^\perp = E$.

Indications :

1. Il suffit de vérifier les propriétés du produit scalaire : symétrie, bilinéarité et définie positivité.
2. Définir tout d'abord une base de G.
   Q étant un polynôme de $G^\perp$, il doit vérifier : $\varphi(Q, X^2 + 2X) = 0$ et $\varphi(Q, 1) = 0$
3. Une base de $G^\perp$ est : $\left\{-\frac{45}{46}X^2 + X - \frac{8}{46}\right\}$

1-2.2 Exercice 2b - Orthogonalité

Soit H l'ensemble des matrices orthogonales de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on souhaite voir quelques propriétés de cet ensemble.

1. Les matrices suivantes appartiennent-elles à H ?

   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Les matrices $2\mathbf{A}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{B}$; $\mathbf{A} + \mathbf{C}$; $\mathbf{AC}$ sont-elles orthogonales ?
   $(H, +, .)$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

3. Montrer que le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.

4. A quelles conditions les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont-elles orthogonales ? En déduire qu'elles sont de la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Indications :

1. Il suffit de vérifier les vecteurs colonnes sont orthogonaux et normés.

2. H est-il stable par combinaison linéaire ?

3. Utiliser le fait qu'une matrice $\mathbf{A}$ orthogonale vérifie : $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

4. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si : $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$.

1-2.3 Exercice 3b - Produit scalaire

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des carrées matrices réelles d'ordre 2. Tout élément de cet espace vectoriel est de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Rappel : La trace de $\mathbf{A}$ est la somme des termes diagonaux : $\mathit{trace}(\mathbf{A}) = a_{1,1} + a_{2,2}$

1. On définit l'application *trace* de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mathit{trace} : \mathbf{M} \mapsto \mathit{trace}(\mathbf{M})$$

   Montrer que cette application est linéaire. Déterminer son noyau.

2. Quelles que soient deux matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ de E, calculer $\mathbf{MN}$ et $\mathbf{NM}$ et montrer que

$$\mathit{trace}(\mathbf{NM}) = \mathit{trace}(\mathbf{MN})$$

   En déduire que, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux matrices semblables on a : $\mathit{trace}(\mathbf{A}') = \mathit{trace}(\mathbf{A})$

3. Soit l'application φ définie de E^2 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathit{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$$

   Vérifier que

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}$$

4. Montrer que φ est un produit scalaire sur E

5. Soit F le sous espace vectoriel de E ayant pour base :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Trouver l'orthogonal de F pour ce produit scalaire.

Indications : Les questions 1., 2. et 3. sont une démonstration dans le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 des propriétés vues dans le module 1 concernant la trace des matrices carrées (page 57).
Pour les questions suivantes, utiliser les propriétés de la transposition des matrices et notamment le fait que la transposition est une application linéaire de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1-3 Devoir à rendre

1-3.1 Exercice 1c - Produit scalaire

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit φ_a l'application définie de E^2 dans de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_a((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + ayy' + zz'$$

ou a est un réel fixé.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ_a soit un produit scalaire sur E.

2. On supposera pour la suite que $a > 0$. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel G de E défini par : $G = Vect\{(1, 2, -1)\}$. Déterminer une base de sous espace et vérifer que $G \oplus G^{\perp} = E$.

3. Décomposer tout vecteur de $E = \mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de G et de $G^{\perp}$.

4. Déterminer les vecteurs de E orthogonaux au vecteur $(-2, 3, 2)$ pour φ_1 et φ_2.

1-3.2 Exercice 2c - Orthogonalité

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$f(e_2) = 2e_1 - e_2 + e_3$$

$$f(e_3) = e_2 + 3e_3$$

1. On appelle $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$.
   Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\}$
   Montrer que $\{(1, -1, 0), (1, 1, -1)\}$ est une base de orthogonale de $F^{\perp}$. On rappelle que la réunion d'une base orthonormée de $F^{\perp}$ et d'une base orthonormée de F est une base orthonormée de E. En déduire une base $\mathcal{B}''$ orthonormée de E.

3. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{B}''$.

1-3.3 Exercice 3c - Produit scalaire

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit φ_1 l'application définie de E^2 dans de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \mathit{trace}((\mathbf{M} + \mathbf{N})(\mathbf{M} + \mathbf{N})^T)$$

   Pour toute matrice $\mathbf{M}$, comparer $\varphi_1(2\mathbf{M}, \mathbf{M})$ et $2\varphi_1(\mathbf{M}, \mathbf{M})$. L'application φ_1 définit-elle un produit scalaire sur E ?

2. Soit φ_2 l'application définie de E^2 dans de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_2(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \mathit{trace}(\mathbf{M}\mathbf{N}^T + 3\mathbf{N}\mathbf{M}^T)$$

   Montrer que $\varphi_2(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 4\mathit{trace}(\mathbf{M}\mathbf{N}^T)$, et que φ_2 est un produit scalaire sur E.

3. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel G des matrices de trace nulle. (utiliser le produit scalaire précédent).
   Déterminer une base de ce sous espace et vérifer que $G \oplus G^\perp = E$.