Exercice 5a

Exercice 5a complément de correction

Exercice 3

Soit la forme quadratique q définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par

$$q(x; y; z) = -x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + z^2$$

1. Décomposer q en somme algébrique de carrés en utilisant la méthode de Gauss.
Cette décomposition n'est pas unique, voici une possibilité.

$$\begin{aligned} q(x; y; z) &= -x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + z^2 = (z + 2x)^2 - 5\left(x^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{y^2}{5}\right) \\ &= (z + 2x)^2 - 5\left(\left(x - \frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{4}{25}y^2\right) = (z + 2x)^2 - 5\left(x - \frac{1}{5}y\right)^2 - \frac{4}{5}y^2 \end{aligned}$$

2. Dédurre de la question précédente, une base dans laquelle l'expression de q est de la forme :

$$q(X; Y; Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

L'expression est :

$$q(X; Y; Z) = X^2 - 5Y^2 - \frac{4}{5}Z^2$$

avec

$$\begin{aligned} X &= z + 2x \\ Y &= x - \frac{1}{5}y \\ Z &= y \end{aligned}$$

ce qui équivaut à avec

$$\begin{aligned} x &= Y + \frac{1}{5}Z \\ y &= Z \\ z &= X - 2Y - \frac{2}{5}Z \end{aligned}$$

3. Quelle est la particularité de cette base ?

est-elle orthogonale ou orthonormale ?

Si nous posons :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La base est dans ce choix :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Cette base n'est pas orthogonale. Ainsi

$$q(x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que nous pouvons écrire :

$$q(x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nous remplaçons, il vient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \left(P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right)^\top \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right)^\top (P)^\top \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$q(X; Y; Z) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^\top A' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Avec

$$A' = P^\top \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$