INP TOULOUSE ENSEIHT n7

# ALGÈBRE LINEAIRE Module 2
# Structure Euclidienne
# PAD - Notes de cours

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

December 5, 2008

# Table des Matières

# Chapitre 2

# Formes bilinéaires et quadratiques

Dans ce troisième chapitre vous découvrirez :

- L'étude des formes quadratiques et des formes bilinéaires (Il s'agit d'une extension des notions de produit scalaire)
- Vous étudierez une technique de calcul très utile : réduction des polynômes homogènes de degré 2.
- Une application des notions de diagonalisation aux matrices symétriques et aux endomorphismes symétriques.

# 2-1 Forme bilinéaire – Matrice d'une forme bilinéaire

## 2-1.1 Formes bilinéaires

**Définition 2-1.1** ***Formes bilinéaires***
*Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle forme bilinéaire sur $E$, toute application $f$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tous vecteurs $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$, et $\tilde{\mathbf{v}}$ de $E$ et tout scalaire $\lambda$ de $\mathbb{R}$ :*

$$f(\mathbf{u}+\tilde{\mathbf{u}}\,,\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) + f(\tilde{\mathbf{u}}\,,\,\mathbf{v}) \qquad f(\lambda\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})$$
$$f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}+\tilde{\mathbf{v}}) = f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}\,,\,\tilde{\mathbf{v}}) \qquad f(\mathbf{u}\,,\,\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})$$

*$f$ est en fait linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.*

**Définition 2-1.2** ***Forme bilinéaire symétrique***
*Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $f$ une forme bilinéaire sur $E$. On dit que $f$ est symétrique si, pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$, on a :*

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})\,.$$

## 2-1.2 Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ une base de $E$. Toute forme bilinéaire $f$ est entièrement déterminée par la connaissance des réels $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En effet, soient $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$ deux vecteurs de $E$. Par linéarité à gauche, et à droite, on peut écrire, après développement :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\,.$$

Introduisons alors $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés des composantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$, et $\mathbf{A}$ la matrice des coefficients $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \ldots & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \ldots & f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces notations, on peut alors écrire la valeur de $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en terme du produit matriciel suivant :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}\,.$$

**Propriété :** Si $f$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$, alors la matrice associée à $f$ dans une base quelconque de $E$ est symétrique.

### 2-1.3 Exemple dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2-2 Formes quadratiques

**Définition 2-2.1 *Formes quadratiques***
*On appelle forme quadratique associée à la forme bilinéaire $f$, l'application $q$ définie de $E$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})\,.$$

**Remarques :**

- On a aussi, en utilisant la matrice $\mathbf{A}$ de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$ :

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}\,,$$

  où $\mathbf{X}$ est le vecteur des coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, $\mathbf{A}$ représente aussi la matrice de la forme quadratique $q$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Par contre, la représentation matricielle d'une forme quadratique n'est pas unique. En effet, pour une forme quadratique donnée, il existe plusieures formes bilinéaires qui peuvent lui être associées.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1 y_1 - 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 4x_2 y_3 + 4x_3 y_2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La forme quadratique associée est

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 \quad \text{soit} \quad q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Mais on a aussi, du point de vue matriciel :

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Propriétés :**

- Pour un vecteur $\mathbf{u} \in E$ donné, $q(\mathbf{u})$ est un polynôme homogène de degré 2. Ainsi, tout polynôme homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées d'un vecteur $\mathbf{u}$ de $E$ peut correspondre à une forme quadratique $q$.

- En outre, à la question "*existe-t-il une forme bilinéaire symétrique dont q soit la forme quadratique et si oui, est-elle unique ?*", la réponse est "*oui*".

  Voici comment procéder : il suffit pour cela d'écrire la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ associée à ce polynôme homogène de degré 2 en plaçant, sur la diagonale, les coefficients $a_{ii}$ correspondant aux termes en $x_i^2$, et sur les termes hors diagonaux $a_{ij}$ et $a_{ji}$ la moitié des coefficients des termes en $x_i x_j$.

- Enfin, si à une même forme quadratique $q$, on peut effectivement associer diverses formes bilinéaires $f$ (de matrice associée $\mathbf{A}_f$ dans une base $\mathcal{B}$ fixée), ces formes bilinéaires ont toutes en commun **la même partie symétrique** :

  $$s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u})}{2}, \quad \text{de matrice associée} \quad \frac{\mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T}{2} \quad \text{indépendante de } f.$$

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$ :

$$q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 12x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_2x_3 + 5x_3x_1 - x_2x_1\,,$$

la forme matricielle symétrique associée étant

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 12 & -4 \\ 5/2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

## 2-2.1 Propriétés

Soit $f$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$, et $q$ la forme quadratique associée. Pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $E$ et tout scalaire $\lambda$, on a :

- $q(\lambda\mathbf{u}) = f(\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda^2 q(\mathbf{u})$ : $q$ n'est pas linéaire.
- $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \dfrac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right)$.
- $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\right)$.
- Pour une forme quadratique $q$ donnée, la forme bilinéaire symétrique $f$ qui lui est associée est aussi appelée forme polaire de $q$.
- On définit deux ensembles : Le noyau de $q$ : $N(q) = \{\mathbf{y} \in E, \forall \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\}$ le cône isotrope : $I(q) = \{\mathbf{x} \in E,\ q(\mathbf{x}) = 0\}$. Sauf cas particulier, ce n'est pas un espace vectoriel, mais un cône, c'est à dire un sous ensemble de vecteurs $C$ tel que si $x \in C$ alors pour tout scalaire $\lambda$, $\lambda x \in C$.

  On a $N(q) \subset I(q)$.
- $q$ est dite non dégénérée si $N(q) = \{\mathbf{0}\}$.
- q est dite définie positive si $\forall \mathbf{x} \in E$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$ et $q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- En dimension finie : $\dim E = \dim N(q) + \mathit{rang}\ (q)$ le rang de $q$ est par définition le rang de la matrice de $q$.

# 2-3 Formes quadratiques définies positives

## 2-3.1 Produit scalaire

On rappelle que un **produit scalaire** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ est une forme **bilinéaire, symétrique, et définie positive**. La définie positivité d'une forme bilinéaire $f$ sur $E$ correspond en fait à la définie positivité de sa forme quadratique, à savoir :

$$\forall \mathbf{u} \in E\,,\ q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}\,.$$

Ainsi, sur un même espace vectoriel $E$, à toute forme quadratique $q$ définie positive, on peut associer un produit scalaire sur $E$ en considérant la forme bilinéaire symétrique $f$ associée à $q$ (la forme polaire de $q$). Pour un tel un produit scalaire $f$, $f(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pourra aussi aussi être noté $\langle \mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\rangle$.

**Proposition 2-3.1** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $q$ une forme quadratique definie positive sur $E$. Alors, la forme polaire de $q$, qui est une forme bilinéaire symétrique (ou à symétrie hermitienne si le corps de référence est $\mathbb{C}$) définie postive sur $E$, constitue un produit scalaire sur $E$, et pour la norme associée, $E$ est un espace* EUCLIDIEN.

**Remarques :**

- Une façon de vérifier la définie positivité d'une forme quadratique $q$ donnée consiste à la décomposer en une somme de carrés de termes du premier degré.
- Une autre façon de vérifier la définie positivité d'une forme quadratique $q$ consiste à rechercher les valeurs propres de la matrice symétrique représentant $q$ et à vérifier qu'elles sont bien toutes positives strictement.

## 2-3.2 Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$ , soit la forme quadratique $q$ définie par

$$q(\mathbf{u}) = x^2 + 6xy + 4yz + 14y^2 + z^2\,,$$

avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Voyons si $q$ est définie positive. Pour ce faire, décomposons $q$ en somme de trois carrés dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) &= x^2 + 6xy + 4yz + 14y^2 + z^2 \\ &= (x+3y)^2 - 9y^2 + 4yz + 14y^2 + z^2 = (x+3y)^2 + 5y^2 + 4yz + z^2 \\ &= (x+3y)^2 + 5(y + \frac{2}{5}z)^2 - \frac{4}{5}z^2 + z^2 = (x+3y)^2 + 5(y+\frac{2}{5}z)^2 + \frac{1}{5}z^2\,. \end{aligned}$$

Cette somme de carrés dans $\mathbb{R}$ est positive, donc la forme quadratique $q$ est semi-définie positive ($\forall \mathbf{u} \in E,\ q(\mathbf{u}) \geq 0$). De plus :

$$q(\mathbf{u}) = (x+3y)^2 + 5(y+\frac{2}{5}z)^2 + \frac{1}{5}z^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{r} x+3y=0 \\ y+\frac{2}{5}z=0 \\ z=0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow\; x=y=z=0$$

$$\Leftrightarrow\; \mathbf{u}=\mathbf{0}\,.$$

**Bilan :** cette forme quadratique est bien définie positive, et la forme bilinéaire symétrique associée

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 14x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. Soit la forme quadratique $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_2x_1$, avec $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Voyons si $q$ est définie positive. Un rapide coup d'oeil nous permet de penser que le terme en $-2x_2^2$, terme en carré à coefficient négatif, risque de poser problème quant à la définie positivité, ne serait-ce que parce qu'on peut l'isoler (ou le sélectionner) en prenant $x_1 = 0$. En effet, il est facile de vérifier que $q$ est même **indéfinie**, c'est à dire qu'il existe des vecteurs $\mathbf{x}$ pour lesquels $q(\mathbf{x}) > 0$, et des vecteurs $\mathbf{y}$ pour lesquels $q(\mathbf{y}) < 0$. Par exemple, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ étant la base canonique de $E$,

$$q(\mathbf{e}_1) = 1\,, \quad \text{et} \quad q(\mathbf{e}_2) = -2\,.$$

# 2-4 Réduction en somme de carrés d'un polynôme homogène de degré 2

## 2-4.1 Exemple

Soit l'expression, dans $\mathbb{R}^3$, donnée par

$$P = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

Cette expression est un polynôme ayant trois variable, $(x_1, x_2, x_3)$, et de degré 2 pour chacune des variables. En effet, Chaque terme (ou monôme) a un degré global égal à 2. On dit alors que le polynôme $P$ est **homogène de degré 2**. Pour fixer les idées, $x^3yz^2$, par exemple, est un monôme de degré global 6, et $x^3yz^2 + 3x^2y^2z^2 - xy^4z$ est un polynôme homogène de degré 6.

Mettons l'expression $P$ sous la forme d'une somme de carrés. Pour cela, appliquons la méthode de Gauss qui consiste à grouper, par exemple, tous les termes en $x_1$ et à les faire apparaître dans un carré. Ainsi, dans cet exemple, on obtiendrait :

**1ère étape :** On regroupe les termes en $x_1$, $x_1^2+2x_1x_3 = (x_1+x_3)^2-x_3^2$, et, en remplaçant dans $P$, on obtient :

$$P = (x_1 + x_3)^2 - x_3^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_2x_3 = (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_2x_3\,.$$

**2ème étape :** On regroupe, cette fois, tous les termes en $x_2$ que l'on fait apparaître dans un carré : $2x_2^2 + x_2x_3 = 2\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \frac{1}{8}x_3^2$. D'où

$$P = (x_1 + x_3)^2 + 2\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + 2x_3^2 = (x_1 + x_3)^2 + 2\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{15}{8}x_3^2\,.$$

Comme dans l'élimination de Gauss, il n'y a ici que deux étapes, car il n'y a que trois coordonnées.

**Remarques :**

- Remarquons que la réduction en somme algébrique de carrés n'est pas unique car, au lieu de partir de $x_1$, nous aurions pu partir d'une autre variable. En partant de $x_2$, par exemple, nous obtiendrions :

$$P = 2\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{23}{8}\left(x_3 + \frac{8}{23}x_1\right)^2 + \frac{15}{23}x_1^2\,.$$

- L'un des intérêts de la réduction en somme de carrés d'un polynôme homogène de degré 2 concerne, comme nous le verrons en exercice, la recherche d'extremums.

## 2-4.2 Méthode générale

### Description

- Si le polynôme $P$ homogène de degré 2 a $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on regroupe tous les termes en $x_1$, et on obtient un terme de la forme : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 + Q$ où $Q$ est un polynôme homogène de degré 2 à $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$.
- Dans le polynôme $Q$ on regroupe alors tous les termes en $x_2$, pour obtenir un nouveau terme de la forme : $\left(\sum_{i=2}^{n} b_i x_i\right)^2 + Q_1$ où $Q_1$ est un polynôme homogène de degré 2 à $n-2$ variables $x_3, \ldots, x_n$, et ainsi de suite ...
- Au final, on obtient une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes entre elles.

  Dans l'exemple précédent, où on avait aboutit à la décomposition en somme de carrés suivante :

$$P = 2\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{23}{8}\left(x_3 + \frac{8}{23}x_1\right)^2 + \frac{15}{23}x_1^2,$$

  les formes linéaires en question sont :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) &\to x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\
(x_1, x_2, x_3) &\to x_3 + \frac{8}{23}x_1 \\
(x_1, x_2, x_3) &\to x_1 .
\end{aligned}$$

### Dans le cas où il n'y a pas de termes en carrés

**Exemple :** Soit $P = 2x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_2x_1$. On utilise alors la relation :

$$xy = \frac{1}{4}\left\{(x+y)^2 - (x-y)^2\right\}$$

pour obtenir, par exemple :

$$\begin{aligned}
P &= x_3\,(2x_1 + x_2) + 3x_2x_1 \\
&= \frac{1}{4}\left\{(x_3 + 2x_1 + x_2)^2 - (x_3 - (2x_1 + x_2))^2\right\} + \frac{3}{4}\left\{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\right\} .
\end{aligned}$$

# 2-5 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

## 2-5.1 Introduction

$E$ étant un espace vectoriel euclidien, le produit scalaire sur $E$ sera noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Soit $g$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice est symétrique dans la base canonique de $E$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Regardons si $g$ est diagonalisable.

**Prenons un exemple :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, et $g$ de matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $g$ sont 1 et -2 de multiplicités respectives 1 et 2, les espaces propres associés étant :

$$V_1 = \mathsf{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{et} \qquad V_{-2} = \mathsf{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

et $g$ est donc diagonalisable.

On remarque que ces deux espaces $V_1$ et $V_{-2}$ sont orthogonaux, c'est à dire tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. De plus, on peut choisir une base orthonormée pour écrire la matrice diagonale de $g$. Il suffit, dans un premier temps, d'orthogonaliser la base de $V_{-2}$, de dimension 2, en appliquant le procédé de Schmidt. On obtient :

$$V_{-2} = \mathsf{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Enfin, il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}$.

**Bilan :** Dans la base orthonormée

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\},$$

la matrice de l'endomorphisme $g$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

### 2-5.2 Généralisation

**Proposition 2-5.1** *On démontre les résultats suivants :*

- *Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.*
- *Ses valeurs propres sont réelles.*
- *Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*
- *Il existe toujours une base orthonormée formée de vecteurs propres.*

**Remarques :**

- Il est intéressant de diagonaliser dans une base orthonormée de vecteurs propres car alors, la matrice de passage $\mathbf{U}$ de la base canonique initiale à la nouvelle base orthonormée vérifie
$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T \,.$$
- Le fait que, dans un espace euclidien, tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormale de vecteurs propres s'écrit en termes d'algèbre linéaire sous la forme :
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{U} \,, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \,.$$
C'est d'ailleurs l'un des principaux intérêts des notations matricielles, à savoir d'exprimer de manière très concise des propriétés ou des transformations.

## 2-6 Diagonalisation d'une forme quadratique

On peut associer à toute forme quadratique $q$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $E$ une forme bilinéaire symétrique $f$. De manière équivalente, cette forme bilinéaire symétrique peut être représentée sous forme matricielle par la matrice symétrique $\mathbf{A}$ des coefficients $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, où les $\mathbf{e}_k$ sont les vecteurs de la base canonique par exemple. De manière plus explicite, on a en effet :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\,, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{Y}\,,$$

$\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ étant les vecteurs des composantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$.

La matrice $\mathbf{A}$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres ($\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$, avec $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$), et dans cette base de vecteurs propres, la matrice $\mathbf{A}$ devenant $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, la forme quadratique $q$ se transforme alors en somme élémentaire de carrés :

$$\forall \mathbf{x} \in E\,, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2\,,$$

où les $z_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont les composantes de $\mathbf{x}$ dans la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{u}_i\,.$$

Cette dernière égalité peut aussi s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Z} = \mathbf{U}(\mathbf{U}^T \mathbf{X})\,,$$

avec $\mathbf{Z} = \mathbf{U}^T \mathbf{X}$ le vecteur des composantes $z_i$.

**Remarques :**

- Il est à noter que $z_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{X}$ n'est rien d'autre que le produit scalaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\mathbf{A}$ (i.e. la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{U}$) avec le vecteur $\mathbf{x}$. Cela correspond au calcul des composantes d'un vecteur dans une base orthonormée donnée, que l'on obtient effectivement par produit scalaire avec les vecteurs de cette base.

- D'un point de vue géométrique, l'écriture de $q$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$$

signifie simplement que la forme quadratique $q$ se décompose en paraboles élémentaires, dirigées selon les axes des vecteurs propres $\mathbf{u}_i$, et de courbures respectives $\lambda_i$.

- De manière équivalente, on peut aussi dire que les iso-contours

  $$q(\mathbf{x}) = C^{\text{ste}}$$

  sont des coniques dans $\mathbb{R}^n$ dont les axes principaux correspondent aux vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ associée à la forme quadratique $q$.

- **Cas particulier :** si la forme quadratique $q$ est définie positive, alors les valeurs propres $\lambda_i$ ci-dessus sont nécessairement toutes strictement positives, et les iso-contours $q(\mathbf{x}) = C^{\text{ste}}$ correspondent alors à des hyper-ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$.

  Par exemple, $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = C$, avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, est l'équation d'une ellipse dans $\mathbb{R}^2$, et l'équation

  $$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = C\,,$$

  avec $\lambda_{1,2,3}$ strictement positifs, représenterait une surface dans $\mathbb{R}^3$ du type "*ballon de rugby*".