Partiel du 8/11/2003 ENSEEIHT APAD

1) Répondre par oui ou non en justifiant votre réponse

a) Dans $M_3(R)$, la matrice A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2

b) $E = \{(x, y, z) \in R^3, x + y - 2z = 0\}$ E est un espace vectoriel de dimension 1.

c) Soit f l'endomorphisme de $R_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Pour tout polynôme P, $f(P) = 3P' + P$ La matrice de f dans la base $(1;1-X;1-X^2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Dans $M_3(R)$, la matrice B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

e) Dans $M_2(C)$, la matrice B= $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

2) Soit a un nombre réel fixé et la matrice A= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_4(R)$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.En déduire les valeurs propres et leur multiplicité.
b) Déterminer la dimension des espaces propres.
c) A est-elle diagonalisable ? si oui, écrire une base de vecteurs propres .
d) Déterminer une matrice de passage orthogonale.

3) Soit la fonction f définie de R^3 dans R par : $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+xz-2zy$.
Déterminer les extremum de f .

1) **SEUL c) EST VRAI en effet** :

a)Calculons le déterminant de A : $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

Le déterminant de A est non nul, donc A est inversible, donc le rang de A est 3.

b)Tout vecteur de E est de la forme : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x/2+y/2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

donc E=vect$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ces deux vecteurs étant non colinéaires ils forment une base de E .

Ainsi E est de dimension 2.

c) Calculons les images des vecteurs de la base B (1 ;1-X ;1-X²)
f(1)=1
f(1-X)=-3+(1-X)
f(1-X²)=3(-2X)+(1-X²)=-6X+1-X²=6(1-X)+(1-X²)-6

Bans la base B, f(1) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; , f(1-X) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

f(1-X²) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ainsi la matrice de f dans la base B est bien : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) La matrice B étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.
1 est valeur propre double et 3 est valeur propre simple.
Il suffit de voir si la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est bien 2.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+z=0 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc $E_1 = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (la composante x peut être choisie quelconque) Ainsi B n'est pas diagonalisable.

e) Cherchons les valeurs propres de la matrice B :

P(X)=$\begin{vmatrix} 1-X & i \\ i & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(-1-X)-i^2 = X^2-1+1 = X^2$

Ainsi, B a une seule valeur propre double . $\lambda = 0$
Déterminons la dimension de l'espace propre associé c'est en fait le noyau de B .
Il nous suffit de connaître sa dimension. Or det B=0 donc B n'est pas inversible donc
Les vecteurs colonnes de B sont colinéaires donc le rang de B est égal à 1.
Ainsi, la dimension du noyau (qui est l'espace propre associé à la valeur propre 0) est 1
Or la multiplicité de la valeur propre 0 est 2 donc B n'est pas diagonalisable.

2)

a) $P(X)=\begin{vmatrix} a-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-X+3 & a-X+3 & a-X+3 & a-X+3 \\ 1 & a-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a-X \end{vmatrix} =$

$(a-X+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a-X \end{vmatrix} = (a-X+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-X-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-X-1 & \\ 1 & 0 & 0 & a-X-1 \end{vmatrix} =$

$(a-X+3)(a-X-1)^3$

Les valeurs propres sont donc : a+3 de multiplicité 1 et a-1 de multiplicité 3.
(On aura remarqué que les réels a+3 et a-1 ne peuvent être égaux)

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{a-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (a-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z+t=0$

donc une base de cet espace propre est (puisque t peut s'exprimer : t = -x-y-z)

$\left\{ u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ la dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre .

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{a+3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (a+3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+y+z+t=0 \\ x-3y+z+t=0 \\ x+y-3z+t=0 \\ x+y+z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t$

donc une base de cet espace propre est $\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre .

c) A est bien diagonalisable, une base de vecteurs propres est donc : (u,v,w,k)
On peut remarquer que les espaces propres sont bien orthogonaux .(Ce que l'on savait puisque la matrice A est symétrique réelle)

d)Appliquons le procédé de SCHMITT pour obtenir une base orthogonale de E_{a-1}.

Posons u'=u cherchons v'=bu'+v tel que u' $\perp$ v' :

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \\ -b-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1+2b=0 \Leftrightarrow b=-1/2$$

Donc v’$\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\\-1/2\end{pmatrix}$

cherchons w’=du’+bv’+w tel que u’ $\perp$ w’ et v’ $\perp$ w’ soit :

$d=\dfrac{-u'\bullet w}{u'\bullet u'}=\dfrac{-1}{2}$ et $b=\dfrac{-v'\bullet w}{v'\bullet v'}=\dfrac{-1/2}{3/2}=-1/3$ ainsi :w’$\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}$

Une base orthogonale est donc :u’ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ v’ $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ w’ $\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}$ $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ en divisant chaque vecteur par sa norme, on obtient les colonnes de la matrice de passage P. P=$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2\\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2\\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2\end{pmatrix}$