Exercice 1.

Répondez par oui ou non en justifiant rapidement votre réponse et répondez aux questions annexes.

a) L'ensemble des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

b) Dans $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}), M^2 = M\}$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

c) Le rang de la famille de vecteurs suivante est 3 : $u\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} v\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} w\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} t\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\2\end{pmatrix}$

d) Une famille de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre.

e) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = (X+2)P'' + 3P'$

La matrice de f dans les bases canoniques $\{1; X; X^2; X^3\}$ pour $\mathbb{R}_3[X]$ et $\{1; X; X^2\}$ pour $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\begin{pmatrix}0 & 3 & 4 & 0\\0 & 0 & 8 & 12\\0 & 0 & 0 & 15\end{pmatrix}$

f) Dans $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel des solutions du système suivant $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ est de dimension 2

et a pour base : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

g)
La forme bilinéaire définie de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$f(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

avec : $X : (x_1; x_2; x_3)$ et $Y : (y_1; y_2; y_3)$ définit –elle un produit scalaire ?

Si oui, écrire sa matrice et la forme quadratique associée.

Exercice 2.

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel et A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Que remarquez vous sur les vecteurs colonnes de A ? Cette matrice est-elle orthogonale ? est-elle inversible ?

b) Déterminer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3.

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

a).Déterminer une base orthonormée de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - 4z = 0 \right\}$ et de l'orthogonal de F.

b) Que dire de $F \oplus F^{\perp}$? Ecrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F, dans une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs de F et de $F^{\perp}$.

c) Expliquez comment procéder pour trouver la matrice de cette symétrie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On ne demande pas de faire les calculs.

Exercice 4.

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) D'après le cours quelles informations pouvez- vous donner sur A. ?

b) Calculer le polynôme caractéristique de A. (On pourra vérifier que 6 et 0 sont les valeurs propres).

c)) Déterminer les espaces propres .Déterminer une base de vecteurs propres .Quelle est la matrice de f dans cette base ?
Quel calcul matriciel permet de retrouver cette matrice à partir de A ? (On ne demande pas de faire le calcul)