Nouveaux exercices pour la semaine 4

1. Exercice 1. Soit la fonction f définie de$R_n[X] \to \ R_n[X]$
   par :
   $$f(P) = P(2 - X)$$
   (a) Calculer fof, en déduire un polynôme annulateur de f.Expliquer pourquoi f est diagonalisable.
   (b) Soit une base B de$R_n[X]$ $B = (1 - X)^k, k \in [0; n]$ Ecrire la matrice de f dans cette base. conclure.
   (c) a étant un réel quelconque,
   Considérons la fonction $f_a$définie de $R_n[X] \to \ R_n[X]$
   par :
   $$f(P) = P(a - X)$$
   $f_a$est-elle diagonalisable ? Si oui, indiquer sans calculs une base dans laquelle sa matrice sera diagonale.
2. Exercice 2. Soit f un endomorphisme deR^3dont la matrice dans la base canonique est :
   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.En déduire les valeurs propres de A.
   (b) Montrer que A admet une valeur propre double si et seulement si a=0 ou a=-2.
   (c) Préciser dans les deux cas précédents si A est diagonalisable.
   (d) Dans le cas a=-2, déterminer une base de chaque espace propre.
3. Exercice 3. Soit f un endomorphisme de R^3dont la matrice dans la base canonique est :
   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$
   Déterminer les valeurs propres da a et les sous espaces propres.A est-elle diagonalisable ? Justifier en précisant les théorèmes utilisés.

4. Exercice 4. Soit f un endomorphisme de R^4dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f admet quatre valeurs propres simples. Qu'en déduisez vous ? (On trouve 2 ;1 ;3 ;-1)
5. Exercice 5. Soit f un endomorphisme de R^3dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Montrer que 8 est valeur propre triple.Expliquer pourquoi f ne peut être diagonalisable.
6. Exercice 6. Soit f un endomorphisme deR^3dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A est elle diagonalisable ? Si nous considérons A comme matrice deC^3, montrer que A est diagonalisable.
(Les valeurs propres sont : 1+i ;1-i ;2)
7. Exercice 7. Soit le système réel de paramètre m, et d'inconnues x ;y ;z.

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = 0 \end{cases}$$

Calculer le déterminant du système. Montrer que le système est un système de CRAMER si et seulement si m est différent de 0 ;2 ;et -2. Résoudre ce système dans les cas suivants : m=0 ; m=1 ; m=2.
8. Exercice 8. Soit f un endomorphisme deR^3dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A est elle diagonalisable ? Déterminer une base orthonormale dans laquelle f est diagonalisable.

9. Exercice 9. Appliquer la méthode d'orthogonalisation de SCHMITT- pour construire une base orthogonale à partir de la base :

$$\dashv = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lfloor = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rfloor = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour le produit scalaire défini par la matrice :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$